# ALGEBRA LINEAR – PROVA 2 – 26/05/2009

**Exercício 1.** (a) Encontre a forma canônica de Jordan das matrizes $A \in M_{8,8}(\mathbb{R})$ com polinómio minimo $P_A(x) = x^2(x-2)^3$ e tais que:

(i) $\dim \text{Núcleo}(A) = 2$

(ii) $A$ admite pelo menos dois autovetores linearmente independentes relativos ao autovalor 2.

(b) Considere a aplicação $T_A \colon \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ induzida por uma matriz $A$ como no ponto (a). Podemos afirmar que $\mathbb{R}^8$ é $T_A$-cíclico?

**Solução**: (a) As condições dadas implicam que a forma canonica de Jordam de $A$ tem dois blocos $J(0)$ e $J(2)$, relativos aos auoto-valores 0 e 2. Além disso, o priméiro subbloco de $J(0)$ é uma matirz $2 \times 2$ e o priméiro subblocos de $J(2)$ é um matriz $3 \times 3$. Como $\dim \text{Núcleo}(A) = 2$, logo $J(0)$ possui 2 subblocos, e como $A$ admite pelo menos dois autovetores linearmente independentes relativos ao autovalor 2, logo $J(2)$ possui pelo menos 2 subblocos. Como $A$ é uma matriz de $M_{8,8}(\mathbb{R})$, segue que ou $J(0) \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e $J(2) \in M_{5,5}(\mathbb{R})$, ou $J(0) \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ e $J(2) \in M_{4,4}(\mathbb{R})$. As formas canônicas procuradas são portanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 2 & 0 & 0 & & \\ & & & 1 & 2 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & 2 & & \\ & & & & & & 2 & 0 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 2 & 0 & 0 & & \\ & & & 1 & 2 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & 2 & & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 0 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 2 & 0 & 0 & \\ & & & & 1 & 2 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $\mathbb{R}^8$ não pode ser $T_A$-ciclico pois o polinómio mínimo $P_A$ não é igual ao polinómio carateristico $F_A$, sendo $grau P_A = 5$ e $grau F_A = 8$.

**Exercício 2.** (a) Usando a forma canônica racional, diga se as seguintes matrizes de $M_{4,4}(\mathbb{Q})$ são semelhantes em $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \gamma \\ 1 & -1 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}.$$

(b) Qual é a forma de Jordan de $A$ como matriz sobre o corpo:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}?$$

**Solução**: (a) O polinómio caraterístico de $A$ é $F_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 2)$ (verifique!). Note que $\lambda^2 - 2$ é irredutivel sobre $\mathbb{Q}$. O polinómio mínimo $P_A$ de $A$ de tem os mesmos fatores irredutiveis de $F_A$, logo é do tipo $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^i(\lambda^2 - 2)$, com $i \in \{1, 2\}$. Tem-se que $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2)$ (verifique!). Logo a forma canônica racional de todas as $A$ é

$$A = \begin{pmatrix} M_{(\lambda-1)(\lambda^2-2)} & 0 \\ 0 & M_{\lambda-1} \end{pmatrix}$$

onde $M_{(\lambda-1)(\lambda^2-2)}$ e $M_{\lambda-1}$ são as matrizes companheiras respetivamente dos polinómios $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2)$ e $\lambda - 1$. Portanto todas as $A$ são semelhantes. sobre $\mathbb{Q}$.

(b) Sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ o polinómio mínimo de $A$ é $P_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})$, que é um produto de fatores lineares distintos. Logo $A$ é diagonalizavel sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, e portanto a sua forma de Jordan é uma matriz diagonal com $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ na diagonal principal.

**Exercício 3.** Seja $V$ un espaço vetorial de dimensão finita. Encontre a forma canônica de Jordan de um operador nilpotente $T\colon V \to V$ de indice 5 tal que $\dim V = 12$, $\dim T(V) = 8$, $\dim T^2(V) = 5$, $\dim T^3(V) = 3$, $\dim T^4(V) = 1$.

**Solução**: Devemos procurar o sistema de invariantes $(k_1, \ldots, k_r)$ de $T$. O sistema de invariantes de $T|_{T^4(V)}\colon T^4(V) \to T|_{T^4(V)}$ é $(1)$, pois $T|_{T^4(V)}$ é o operador nulo sobre um espaço de dimensão 1. Logo seguindo o teorema da sala de aula, segue que o sistema de invariantes de $T|_{T^3(V)}$ é $(2, 1)$, o sistema de invariantes de $T|_{T^2(V)}$ é $(3, 2)$, o sistema de invariantes de $T|_{T(V)}$ é $(4, 3, 1)$, o sistema de invariantes de $T$ é $(5, 4, 2, 1)$. Logo a forma canônica de Jordan de $T$ é

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_5 & & & \\ & \mathcal{N}_4 & & \\ & & \mathcal{N}_2 & \\ & & & \mathcal{N}_1 \end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{N}_k$ é a matriz nilpotente elementar $k \times k$.

**Exercício 4.** Seja $K$ um corpo algebricamente fechado de caracteristica 0. Encontre as formas canônicas de Jordan e racional de uma matriz $A \in M_{n,n}(K)$ tal que $\text{Traço}(A^i) = 0$, para todo $i \geq 1$.

**Solução**: Como $K$ é algebricamente fechado, logo $A$ é semelhante a uma matriz triangular superior com escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na diagonal principal. A condição que $\text{Traço}(A^i) = 0$, para todo $i \geq 1$, equivale a dizer que

$$\lambda_1^i + \lambda_2^i + \cdots + \lambda_n^i = 0, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{0.1}$$

Vamos provar por indução sobre $n$ que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. De fato, se $n = 1$, logo temos $\lambda_1 = 0$. Seja $n > 1$. Note que $A$ não é inversivel. De fato suponha que $A$ é inversivel. Pelo teorema de Cayley-Hamilton temos $0 = F_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 \cdot id$, onde $a_i \in K$ e $a_0 = \pm\det A$. Assim

$$\pm \det A \cdot id = -A^n - \cdots - a_1 A.$$

Como o traço é linear, temos

$$0 \neq detA \cdot \text{Traço}(id) = -\text{Traço}(A^n) - \cdots - a_1 \text{Traço}(A)$$

e assim pelo menos um dos Traço$(A^i)$ é nao nulo, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, absurdo. Como $A$ não é inversivel, logo existe um auto-valor $\lambda_i = 0$. Por indução obtemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Segue que $A$ é uma matriz triangular superior com todo elemento da diagonal principal nulo, logo $A$ é uma matriz nilpotente. Viceversa, toda matriz nilpotente $A$ satisfaz Traço$(A^i) = 0$, pois a sua forma canônica de Jordan tem todos os elementos da diagonal principal nulos. Assim as matrizes do exercícios são exatamente todas as matrizes nilpotentes. As formas canonicas de Jordan e racional destas matrizes são do tipo

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_{k_1} & & & \\ & \mathcal{N}_{k_2} & & \\ & & \mathcal{N}_2 & \\ & & & \mathcal{N}_{k_r} \end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{N}_k$ é a matriz nilpotente elementar $k \times k$ e $k_1 \geq k_2 \cdots \geq k_r \geq 1$.

**Exercício 5.** Prove que se $A$ é uma matriz real simetrica, logo o seu polinomio mínimo tem somente raizes reais.

**Solução**: Podemos ver $A$ como matriz complexa e definindo um operador sobre $\mathbb{C}^n$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um auto-valor de $A$ e $v \neq 0$ um auto-vetor relativo a $\lambda$. Seja $\overline{v}$ o conjugado do vetor $v$. Temos

$$\lambda(v^t\overline{v}) = (\lambda v)^t\overline{v} = (Av)^t\overline{v} = v^tA^t\overline{v} \underset{A \text{ simetrica}}{=} v^tA\overline{v} \underset{A \text{ real}}{=} v^t\overline{A}\overline{v} =$$
$$= v^t\overline{Av} = v^t\overline{\lambda v} = v^t\overline{\lambda}\overline{v} = \overline{\lambda}(v^t\overline{v}).$$

Obtemos $(\lambda - \overline{\lambda})v^t\overline{v} = 0$. Mas se $v = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, logo $v^t\overline{v} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \neq 0$. Portanto $\lambda = \overline{\lambda}$, isto é todos os zeros do polinómio carateristico (e então do polinómio mínimo) são reais.