ALGEBRA LINEAR – PROVA 2 – 04/06/2012

Exercício 1. Encontre as formas canônica e racional das matrizes $A \in M_{10,10}(\mathbb{R})$ que possuem poliómio caraterístico $F_A(x) = x^2(x+1)^4(x+2)^4$ e tais que

$$\dim Nucleo(A) = 1, \ \dim W_{-1} = 2, \ \dim W_{-2} \geq 3$$

onde W_λ indica o auto-espaço relativo a um auto-valor λ de A.

Solução: A forma canônica de Jordan J_A de A possui 3 blocos de Jordan $J(0)$, $J(-1)$ e $J(-2)$ de dimensões respetivamente $2,4,4$ (dados pelos espoentes de F_A). Como $\dim W_0 = \dim \ Nucleo(A) = 1$, logo $J(0)$ possui 1 subbloco, então necessariamente

$$J(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\dim W_{-1} \geq 2$, logo $J(-1)$ possui 2 subblocos, então $J(-1)$ é uma das seguintes matrizes

$$J_1(-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad J_2(-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $\dim W_{-2} \geq 3$, logo $J(-2)$ possui pelo menos 3 subblocos, $J(-2)$ é uma das seguintes matrizes

$$J_1(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad J_2(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

As possiveis formas de Jordan são potranto dois, dadas por uma das seguintes matrizes em blocos

$$J_1 = \begin{pmatrix} J(0) & & \\ & J_1(-1) & \\ & & J_1(-2) \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} J(0) & & \\ & J_2(-1) & \\ & & J_1(-2) \end{pmatrix}.$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} J(0) & & \\ & J_1(-1) & \\ & & J_2(-2) \end{pmatrix} \qquad J_4 = \begin{pmatrix} J(0) & & \\ & J_2(-1) & \\ & & J_2(-2) \end{pmatrix}.$$

Para encontrar as formas racionais, usamos a estratégia vista na sala de aula. As formas racional são

$$R_{J_1} = \begin{pmatrix} M_{q_1} & & \\ & M_{q_2} & \\ & & M_{q_3} \end{pmatrix} \qquad R_{J_2} = \begin{pmatrix} M_{q'_1} & & \\ & M_{q'_2} & \\ & & M_{q'_3} \end{pmatrix}$$

$$R_{J_3} = \begin{pmatrix} M_{q_1''} & & & \\ & M_{q_2''} & & \\ & & M_{q_3''} & \\ & & & M_{q_4''} \end{pmatrix} \qquad R_{J_4} = \begin{pmatrix} M_{q_1'''} & & & \\ & M_{q_2'''} & & \\ & & M_{q_3'''} & \\ & & & M_{q_4'''} \end{pmatrix}$$

onde $q_1 = x^2(x+1)^3(x+2)^2$, $q_2 = (x+1)(x+2)$, $q_3 = (x+2)$, $q_1' = x^2(x+1)^2(x+2)^2$, $q_2' = (x+1)^2(x+2)$, $q_3' = x+2$, $q_1'' = x^2(x+1)^3(x+2)$, $q_2'' = (x+1)(x+2)$, $q_3'' = q_4'' = x+2$, $q_1''' = x^2(x+1)^2(x+2)$, $q_2''' = (x+1)^2(x+2)$, $q_3''' = q_4''' = x+2$ e onde M_q é a matriz companheira de um polinómio $q \in \mathbb{R}[x]$.

Exercício 2. Sejam A e B duas matrizes nilpotentes $n \times n$ com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$ que possuam os mesmos polinómios mínimo e o mesmo posto. Prove ou disprove:
(a) Se $n = 6$, logo A e B são semelhantes.
(b) Se $n = 7$, logo A e B são semelhantes.

Solução: Se $(k_1, \ldots, k_m)$ é o sistema de invariantes de uma matriz nilpotente $n \times n$ de índice k, logo $k_1 = k$ e $m = \dim Nucleo(A) = n - posto(A)$.

(a) Verdadeiro: Sejam A e B matrizes nilpotentes 6×6. O expoente do polinomio mínimo de uma matriz nilpotente é o seu índice de nilpotencia, logo A e B possuem o mesmo índice $k \leq 6$. Devemos provar que A e B possuem o mesmo sistema de invariantes. Se $k = 6$, o sistema de invariantes de A e B é (6). Se $k = 5$, o sistema de invariantes de A e B é $(5, 1)$. Se $k = 4$, os sistemas de invariantes possivéis são $(4, 2)$ e $(4, 1, 1)$. No primeiro caso, o posto é 4 e no segundo caso o posto é 3. Como A e B possuem o mesmo posto, logo A e B possuem os mesmo sistema de invariantes. Se $k = 3$, os sistemas de invariantes possiveis são $(3, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 1, 1, 1)$. No primeiro caso o posto é 4, no segundo é 3, no tercéiro é 2. Como A e B possuem o mesmo posto, logo A e B possuem os mesmo sistema de invariantes. Se $k = 2$, os sistemas de invariantes possivéis são $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 1, 1)$. No primeiro caso o posto é 3, no segundo é 2, no tercéiro é 1. Como A e B possuem o mesmo posto, logo A e B possuem os mesmo sistema de invariantes. Enfim, se $k = 1$, o sistema de invariantes é $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

(b) Falso: Considere duas matrizes nilpotentes 7×7 com sistemas de invariantes $(3, 3, 1)$ e $(3, 2, 2)$. As duas matrizes possuem o mesmo índice 3, logo possuem polinómio mínimo x^3, e o posto delas é 4. Porém os fatores invariantes são diferentes, logo as matrizes não são semelhantes.

Exercício 3. Seja A uma matriz $n \times n$ com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$. Suponha que A satisfaz a relação $A^3 = A$.
(a) Usando a forma canonica de Jordan, prove que se $\mathbb{K}$ é o corpo dos números complexos, logo A é diagonalizavel.
(b) O resultado em (a) permanece verdadeiro se $\mathbb{K}$ é um corpo qualquer?

Solução: (a) Como $A^3 = A$, logo o polinómio mínimo de A divide $x^3 - x = x(x^2 - 1)$. Segue que os possíveis auto-valores de A são $1, -1, 0$. Considere a forma canônica de Jordan J_A da matriz A. Os blocos de Jordan de J_A são do tipo $J(\lambda)$, com $\lambda \in \{0, 1, -1\}$. Como $A^3 = A$ e $J_A = P^{-1}AP$, onde P é uma matriz invertível, logo $J_A^3 = J_A$. Segue que cada bloco $J(\lambda)$ satisfaz a relação $J(\lambda)^3 = J(\lambda)$. Se por absurdo existe um bloco $J(\lambda)$ que é uma matriz $m \times m$, com $m > 1$, segue que as priméira duas linhas de $J(\lambda)$ são dadas por

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Logo os elementos o priméiro bloco 2×2 da $J(\lambda)^3$ em alto a esquerda é

$$\begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 3\lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Como $J(\lambda)^3 = J(\lambda)$, temos $\lambda^3 = \lambda$ e $3\lambda^2 = 1$ que não possui solução. Segue que todos os blocos $J(\lambda)$ são matrizes 1×1, isto é J_A é diagonal.

(b) A hipotese que o corpo de base seja $\mathbb{C}$ é indispensavel: por exemplos sobre um corpo de carateristica 2 a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfaz $A^3 = A$, mas não é diagonalizavel, pois o seu polinómio mínimo é $P_A = (x-1)^2$, que não é produto de fatores lineares distintos.

Exercício 4. Seja T um operador sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Seja P_T o polinómio mínimo de T e, dado $v \in V$, seja $P_{T,v}$ o polinómio T-anulador de v.

(a) Prove que se T é nilpotente de índice k, logo todo vetor $v \in V$ tal que $T^{k-1}v \neq 0$ satisfaz a relação $P_{T,v} = P_T$.

(b) Prove que se T é qualquer, existe sempre um vetor $v \in V$ tal que $P_{T,v} = P_T$.

Solução:

(a) Se o índice de T é k, logo $P_T = x^k$. Como $T^k v = 0$, para todo vetor $v \in V$, logo $P_{T,v}$ divide P_T,e portanto $P_{T,v} = x^h$, onde $h \leq k$. E se $T^{k-1}v \neq 0$, logo nenhum T^h anulam v, para $h \leq k$, implicando que $P_{T,v} = x^k = P_T$.

(b) Seja $P_T = P_1^{c_1} \cdots P_m^{c_m}$ a fatoração do polinómio mínimo de T. Pelo teorema da decomposição primária, existe uma decomposição $V = \oplus_{i=1}^m V_i$ tal que $V_i = N(P_i^{c_i}(T))$, e V_i são subespaços T-invariantes de V. Além disso, o polinómio minimo P_{T_i} de T_i satisfaz $P_{T_i} = P_i^{c_i}$. Denote por $T_i := T|_{V_i}$, para $i = 1, \dots, m$. O operador $P_i(T_i)$ é nilpotente sobre V_i, logo pelo ponto (a) existe um vetor $v_i \in V_i$ tal que $P_{P_i(T_i),v_i} = P_{P_i(T_i)}$. Note que $P_i^{c_i}(T_i)v_i = 0$, logo $P_{T_i,v_i}/P_i^{c_i}$, e portanto $P_{T_i,v_i} = P_i^{k_i}$, para $k_i \leq c_i$.

Queremos ver que $k_i = c_i$, isto é $P_{T_i,v_i} = P_i^{c_i}$. De fato, primeiramente note que como $P_{T_i} = P_i^{c_i}$, segue que $P_i^{c_i}(T_i) = 0$ e $P_i^{k_i}(T_i) \neq 0$, para todo $k_i < c_i$, e portanto $P_{P_i(T_i)} = x^{c_i}$. Além disso, como $P_i^{k_i}(T_i)v_i = 0$, segue também que $P_{P_i(T_i),v_i}/x^{k_i}$, logo

$$x^{c_i} = P_{P_i(T_i)} = P_{P_i(T_i),v_i}/x^{k_i}$$

que implica que $c_i \leq k_i$ e portanto $k_i = c_i$.

Considere $v := v_1 + \cdots + v_m$. Afirmamos que $P_{T,v} = P_T$. De fato: como $P_T(T) = 0$, logo $P_T(T)v = 0$ e então $P_{T,v}$ divide P_T. Viceversa: Para provar que P_T divide $P_{T,v}$ basta provar que cada $P_i^{c_i}$ divide $P_{T,v}$. E de fato, note que

$$0 = P_{T,v}(T)v = P_{T,v}(T)v_1 + \cdots + P_{T,v}(T)v_m. \tag{0.1}$$

Mas $P_{T,v}(T)(v_i) \in V_i$ (V_i é T-invariante) e como os espaços V_i são em soma direta, a (0.1) implica que $P_{T,v}(T)v_i = 0$, logo segue que $P_{T,v_i} = P_i^{c_i}$ divide $P_{T,v}$.