ALGEBRA LINEAR – PROVA 3 – 06/07/2009

Exercício 1. Sejam V e W os espaço vetoriais complexos $V = \mathbb{C}^2$ e $W = \mathbb{C}^3$.
(a) Quais das seguintes são produtos internos sobre V?

$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_1}$$

$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2}$$

$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= i|x_1||y_1|$$

(b) Use o algoritmo de Gram-Schmidt para ortonormalizar a seguinte base de W, com respéito ao produto interno canônico de W:

$$\{(i, -i, 0), (0, i, 0), (0, i, i)\}.$$

Solução: (a) Para o priméiro: como $< (0,1), (0,1) >= 0$ e $(0,1) \neq (0,0)$, logo o priméiro não é um produto interno.

Para o segundo: temos

$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= (x_1, x_2)^t \cdot A \cdot \overline{(y_1, y_2)}$$

onde A é a matriz diagonal com 1 e 2 na diagonal principal. Por um conto geral feito na sala de aula, segue que o segundo é um produto interno.

Para o terceiro: como $< (0,1), (0,1) >= 0$ e $(0,1) \neq (0,0)$, segue que o terceiro não é um produto interno.

(b) Sejam $v_1 = (i, -i, 0)$, $v_2 = (0, i, 0)$, $v_3 = (0, i, i)$. Seguindo o algoritmo de Gram-Schmidt, definimos

$$w_1 := v_1, \;\; w_2 := v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 = (\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, 0).$$

$$w_3 := v_3 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >} w_2 - \frac{< v_3, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 = (0, 0, i).$$

Normalizando a base ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$ obtemos a base ortonormal

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(i, -i, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(i, i, 0), (0, 0, i) \right\}.$$

Exercício 2. Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido de produto escalar canônico. Considere a base canônica β. Seja q a forma quadrática de V induzida pela forma bilinear cuja matriz é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com respeito a base β. Encontre a forma bilinear simétrica b que induz q. Encontre uma base ortonormal de V, com respéito ao produto interno canônico de V, e com respeito á qual b é diagonal. Calcule o posto e o índice de q.

Solução: (a) A forma bilinear $\widehat{b}$ com matriz A com respéito à base canônica β é

$$\widehat{b}((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_2.$$

A forma bilinear simetrixa que induz a forma quadrática q é

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

que é a forma bilinear com matriz associada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O polinómio caraterístico de B é $F_B(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Vamos encontrar uma base ortonormal de V formada por auto-vetores de B. Um auto-vetor relativo ao auto-valor $\lambda = 0$ é $v_1 = (0, 0, 1)$, um auto-vetor relativo ao auto-valor $\lambda = 1$ é $v_2 = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0)$ e um auto-vetor relativo ao auto-valor $\lambda = -1$ é $v_3 = 1/\sqrt{2}(1, -1, 0)$. Segue que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal de V formada por auto-vetores de B. Se $Bv_i = \lambda_i v_i$, logo temos

$$b(v_i, v_j)v_i^t B v_j = v_i^t \lambda_j v_j = \lambda_j v_i v_j = \lambda_j \delta_{i,j}.$$

Portanto a matriz de b com respéito a base $\{v_1, v_2, v_3\}$ é

$$[b]_{\{v_1,v_2,v_3\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Segue que o posto de q é 2 e o seu índice é 1.

Exercício 3. Seja $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido com respeito a uma base β de $\mathbb{R}^2$ através da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Existe um produto interno de $\mathbb{R}^2$ com respéito ao qual T é autoadjunto?
(b) Existe um produto interno de $\mathbb{R}^2$ com respéito ao qual T é unitário?

Solução: (a) O polinómio carateristico de T é $F_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, logo o seu polinómio mínimo é $P_T(\lambda) = F_T(\lambda)$, portanto T é diagonalizavel pois P_T é produto de fatores lineares distintos. Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por auto-vetores de T. Seja $<,>$ o produto interno standard de $\mathbb{R}^2$ com respéito à base $\{v_1, v_2\}$. Segue que $\{v_1, v_2\}$ é uma base *ortonormal* com respeito ao produto interno $<,>$ e como é formada por auto-vetores de T, pelo viceversa do teorema espetral (para operadores sobre espaços reais) segue que T é auto-adjunto.

(b) A resposta é não: suponha por absurdo que existe um produto interno $<,>$ com respeito ao qual T é uniário. Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base autovetores de T (que existe pelo ponto (a)), com $Tv_2 = 2v_2$. Logo

$$< v_2, v_2 >=< Tv_2, Tv_2 >=< 2v_2, 2v_2 >= 4 < v_2, v_2 >$$

e como $v_2 \neq 0$ segue que $1 = 4$, contradição.

Exercício 4. Seja N um operador normal sobre um espaço complexo. Mostre que:

(a) N é hermitiana (respetivamente unitária) se e somente se os seus autovalores são reais (respetivamente se e somente se os seus autovalores têm módulo 1).

(b) Se M é uma transformação tal que $MN = NM$, logo $MN^* = N^*M$. (Sugestão: se $A = MN^* - N^*M$, calcule o traço de AA^*).

Solução: Como N é normal, pelo teorema espetral temos
$$N=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i E_i$$
onde λ_i são os auto-valores distintos de T, $E_i^2=E_i=E_i^*$ para todo i, $E_iE_j=0$ para $i\neq j$, e $E_1+\cdots+E_k=id$. Segue que
$$N^*=\sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda_i}E_i^*=\sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda_i}E_i$$
(a) Se N é hermitiana, vimos na sala de aula que $\lambda_i\in\mathbb{R}$ para todo i. Viceversa, se $\lambda_i\in\mathbb{R}$ para todo i, segue que $N^*=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iE_i=N$, logo N é hermitiana.

Se N é unitária, vimos na sala de aula que $|\lambda_i|=1$, para todo i. Viceversa se $|\lambda_i|=1$ para todo i, logo
$$N^*N=(\sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda_i}E_i)(\sum_{j=1}^{k}\lambda_jE_j)=\sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda_i}\lambda_iE_i=\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i|^2E_i=\sum_{i=1}^{k}E_i=id$$
e portanto N é unitária.

(b) Vimos na sala de aula que traço$(AA^*)=0$ implica $A=0$. Logo vamos provar que traço$(AA^*)=0$. Para isso, usaremos que $N^*N=NN^*$, que $MN=NM$, e portanto $N^*M^*=M^*N^*$, e que traço$(CD)=$ traço(DC) para toda matriz C,D. Temos
$$\text{traço}(AA^*)=\text{traço}(MN^*-N^*M)(NM^*-M^*N))=$$
$$\text{traço}(MN^*NM^*-N^*MNM^*-MN^*M^*N+N^*MM^*N)=$$
$$=\text{traço}(MN^*NM^*)-\text{traço}(N^*MNM^*)-\text{traço}(MN^*M^*N)+\text{traço}(N^*MM^*N).$$
Como
$$\text{traço}(MN^*NM^*)=\text{traço}(MNN^*M^*)=\text{traço}(MNM^*N^*)=\text{traço}(N^*MNM^*)$$
e como
$$\text{traço}(MN^*M^*N)=\text{traço}(N^*M^*NM)=\text{traço}(M^*N^*NM)=\text{traço}(M^*NN^*M)=$$
$$=\text{traço}(MM^*NN^*)=\text{traço}(N^*MM^*N)$$
segue que traço$(AA^*)=0$.