ÁLGEBRA LINEAR – PROVA 3 – 04/06/2012

Exercício 1. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Mostre que se T é normal e $T^k v = 0$, onde v é um vetor de V e k é um intéiro positivo, logo $Tv = 0$.

Solução: (a) O operador T é normal (isto é $TT^* = T^*T$) sobre um espaço complexo, logo é diagonalizavel. Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V que diagonaliza T e seja

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

a matriz de T com respeito a base β. A matriz de T^k na base β é

$$[T^k]_\beta = [T]_\beta^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Assim se $T^k v = 0$, com $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, segue que $\alpha_i \lambda_i^k = 0$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, para um i fixado em $\{1, \dots, n\}$, temos que ou $\alpha_i = 0$, ou $\lambda_i^k = 0$, e no último caso temos $\lambda_i = 0$. Segue que $Tv = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i = 0$.

Exercício 2. Seja $<,>$ um produto interno sobre K^n, onde K é o corpo complexo ou real. Lembre que uma matriz $A \in M_{n,n}(K)$ é *positiva* se $A = A^*$ e $< Av, v >$ é um real positivo, para todo $v \in K^n$. Mostre que se A é positiva e A^2 é um multiplo do operador identidade, logo T é um multiplo da identidade.

Solução: Se A é positiva, logo $L_A\colon K^n \to K^n$ é autoadjunto e portanto é diagonalizavel. Seja β uma base com respeito a qual L_A possui matriz diagonal D e suponha que D seja a matriz

$$D = [T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Existe uma matriz invertivel P tal que $P^{-1}AP = D$. Temos $P^{-1}A^2P = D^2$. Suponha que $A^2 = \mu \cdot id$, onde $\mu \in K$. Logo A^2 comuta com P e P^{-1}. Em particular, temos $A^2 = D^2$, então $\mu = \lambda_i^2$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Como A é positiva, logo todo autovalor de L_A é positivo, portanto $\lambda_i = \sqrt{\mu} > 0$ e $D = \sqrt{\mu} \cdot id$. Em particular, D comuta com P e P^{-1} e segue que $A = PDP^{-1} = D = \sqrt{\mu} \cdot id$, e portanto A é multipla da identidade.

Exercício 3. Lembre que uma projeção é dita *projeção ortogonal* se é autoadjunta. Seja T um operador normal de um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Mostre que se T é uma projeção, logo T é uma projeção ortogonal.

Solução: Uma projeção é uma projeção ortogonal se e somente se é autoadjunta. De outro lado, o teorema espetral diz que um operador T normal sobre um espaço complexo é diagonalizavel, logo um operador normal é autoadjunto se e somente se os seus autovalores são reais. Portanto para provar que se T é uma projeção normal, logo T é uma projeção ortogonal, basta provar que os autovalores de uma projeção são reais. De fato, se T é uma projeção e $Tv = \lambda v$, com v vetor não nulo, logo

$$\lambda v = Tv = T^2 v = \lambda^2 v$$

que implica $(\lambda^2 - \lambda)v = 0$. Como $v \neq 0$, segue que $\lambda^2 - \lambda = 0$, i.e. $\lambda \in \{0, 1\}$. Em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 4. Seja T um operador autoadjunto de um espaço vetorial V de dimensão finita munido de produto interno.

(a) Mostre que existem números reais não nulos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e projeções ortogonais $E_1, \dots, E_n$ tais que

$$T = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_n E_n.$$

(b) Mostre que se $T^k = 0$ para algum intéiro positivo k, logo $T = 0$.

(c) Mostre que se V é complexo, logo existe um operador U tal que $U^2 = T$. É possivel escolher U normal? É possivel escolher U autoadjunto?

Solução: (a) Pelo teorema espetral, T é diagonalizavel, portanto se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de T, temos

$$V = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_n}.$$

Logo todo vetor v se escreve de jeito único como $v = v_1 + \cdots + v_n$, onde $v_i \in W_{\lambda_i}$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Se E_i é a projeção sobre o autoespaço W_{λ_i}, para $i \in \{1, \dots, n\}$, temos

$$Tv = T(v_1 + \cdots + v_n) = \sum_{i=1}^{n} T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 E_1(v) + \cdots + \lambda_n E_n(v).$$

Além disso, os $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são reais, pois T é autoadjunto, e podemos supor eles não nulos, a menos de eliminar no somatorio final o termo com $\lambda_i = 0$ (se houver). So falta mostrar que a projeção E_i é ortogonal. De fato temos $T|_{W_{\lambda_i}} = \lambda_i E_i$ e como T é autoadjunto e W_{λ_i} é T-invariante, segue que $\lambda_i E_i$ é autoadjunto. Portanto

$$\lambda_i E_i = (\lambda_i E_i)^* = \overline{\lambda_i} E_i^* = \lambda_i E_i^*$$

que, sendo $\lambda_i \neq 0$, implica que E_i é autoadjunto.

(b) Primeramente observamos que se $\{v_1, \dots, v_m\}$ são vetores não nulos respetivamente de autoespaços $W_{\lambda_1}, \dots, W_{\lambda_m}$, logo eles são vetores independentes. De fato se $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$, com $a_i \in K$, temos

$$0 =< a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m, v_i >=< a_i v_i, v_i >= a_i < v_i, v_i >$$

onde usamos que autoespaços distintos de um operador autoadjunto são ortogonais. Como $< v_i, v_i >$ é positivo, segue que $a_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, portanto $\{v_1, \dots, v_m\}$ é LI. Agora suponha que $T^k = 0$, para algum intéiro positivo k. Note que $E_i E_j = 0$, para $i \neq j$. Logo para todo vetor $v = v_1 + \cdots + v_n$, com $v_i \in W_{\lambda_i}$, temos

$$0 = T^k v = (\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_n E_n)^k v = \lambda_1^k E_1(v) + \cdots + \lambda_n^k E_n(v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k v_i.$$

Mas vimos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI, logo $\lambda_i^k = 0$ e portanto $\lambda_i = 0$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, isto é os autovalores de T são todos nulos e portanto $T = 0$.

(c) Como V é complexo, logo existe uma raiz $\mu_i \in \mathbb{C}$ de λ_i, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Se definimos

$$U := \mu_1 E_1 + \cdots + \mu_n E_n,$$

logo claramente $U^2 = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_n E_n = T$. O operador U é normal. De fato

$$U^* U = (\mu_1 E_1 + \cdots + \mu_n E_n)^* (\mu_1 E_1 + \cdots + \mu_n E_n) =$$

$$= (\overline{\mu_1} E_1^* + \cdots + \overline{\mu_n} E_n^*)(\mu_1 E_1 + \cdots + \mu_n E_n) = (\overline{\mu_1} E_1 + \cdots + \overline{\mu_n} E_n)(\mu_1 E_1 + \cdots + \mu_n E_n)$$

$$= |\mu_1|^2 E_1 + \cdots + |\mu_n|^2 E_n.$$

Similmente $UU^* = |\mu_1|^2 E_1 + \cdots + |\mu_n|^2 E_n$, logo $U^* U = UU^*$, isto é U é normal.

Não é possivel garantir que U seja autoadjunto. De fato, se fosse possivel, logo $T = U^2$, com U autoadjunto, e portanto T seria não negativo. Logo os autovalores de T seriam não negativo, o que em geral pode ser falso para um operador T autoadjunto.