ALGEBRA LINEAR – PROVA 1 – 15/04/2009

Notações: K=Corpo, $\mathbb{R}$ = números reais, $M_{n,m}(K)$ = matrizes $n \times m$.

Exercício 1. Considere os espaços vetoriais reais $V = \mathbb{R}^3$ com base canônica $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $W = \mathbb{R}[x]_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

a) Escreva a única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(e_1) = 2 - 3x$, $T(e_2) = 5x^2$ e $T(e_3) = -2 + 3x + 10x^2$. É T um isomorphismo? Porque?

b) Considere o conjunto $\beta = \{1, x, 1 + x^2\}$ de W. Verifique que β é uma base de W e encontre a matriz de T nas bases α e β.

c) Encontre as equações de Núcleo(T) e Im(T) com respeito as bases α e β. Encontre uma base de Núcleo(T) e Im(T). Calcule dim(Núcleo(T)) e dim(Im(T)).

Exercício 2. Seja V o espaço vetorial $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$. Seja V^{sim} e V^{ant} os subespaços das matrizes simetricas e antisimetricas.

a) Escreve uma base $\beta = \beta^{sim} \cup \beta^{ant}$ de V, onde β^{sim} é uma base de V^{sim} e β^{ant} é uma base de V^{ant}.

b) Considere o subespaco $W =< I >$ de V, onde $I \in V$ é a matriz identidade. Encontre as equações de W com respéito a base β.

c) Seja β^* a base dual de β. Para $v^* \in \beta^*$, escreva esplicitamente $v^*(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$.

Exercício 3. a) Usando indução, prove que, dados escalares $a_1, \ldots, a_n \in K$, logo

$$\det \begin{pmatrix} a_1 - 1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 - 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 - 1 & \cdots & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n - 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot (-1 + \sum_{i=1}^{n} a_i)$$

b) Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V sobre K. Tome o vetor $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ onde $a_1, \ldots, a_n \in K$. Prove que $\{v_1 + v, \ldots, v_n + v\}$ é uma base para V se e somente se $a_1 + \cdots + a_n \neq -1$.

Exercício 4. Seja $V = M_{n,n}(K)$. Para cada $B \in V$, define $f_B : V \to K$ via $f_B(A) = \text{traço}(B^t A)$. Prove que $V^* = \{f_B : B \in V\}$.

Exercício 5. Prove que se uma matriz $A \in M_{n,m}(K)$ é tal que posto$(A) \leq 1$, logo existem matrizes $B \in M_{n,1}(K)$ e $C \in M_{1,m}$ tais que $A = B \cdot C$. Se $n = m$, deduzir que $A^2 = \text{Traço}(A) \cdot A$ e que, para todo escalar $t \notin \{0, \text{Traço}(A)\}$, a matriz $A - t \cdot I$ é invertivel, onde I é a matriz identidade.