ALGEBRA LINEAR – PROVA 1 – 18/04/2012

Exercício 1. Considere o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \subset M_{2,2}(\mathbb{C}).$$
(a) Construa um isomorfismo de espaços vetoriais $\varphi\colon V \to \mathbb{C}^3$.

(b) Seja $E_i = \varphi^{-1}(e_i)$, para $i = 1, 2, 3$, onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canonica de $\mathbb{C}^3$. É verdade que existe uma única transformação linear $T\colon V \to V$ tal que
$$T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = E_1, \qquad T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = E_2, \qquad T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}?$$
Justifique a sua resposta, citando os resultados necessários.

(c) Caso exista uma T como pedido em (b), encontre a matriz de T com respeito a base $\{E_1, E_2, E_3\}$ e uma base do núcleo e imagem de T.

Exercício 2. Seja V um espaço vetorial. Uma *projeção de V em V* é uma transformação linear $T\colon V \to V$ tal que $T^2 = T$. Prove que se $T\colon V \to V$ é uma projeção, logo $V = N(T) \oplus Im(T)$.

Exercício 3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo de caraterística diferente de 2. Uma matriz $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ é dita *antisimetrica* se $A = -A^T$, onde A^T é a transposta da matriz A. Prove que se A é antisimetrica e n é impar, logo $\det(A) = 0$. O resultado continua valendo se n é par?

Exercício 4. Sejam A, B matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{R}$. Prove que
$$posto(A + B) \leq posto(A) + posto(B).$$