

ALGEBRA LINEAR – PROVA 2 – 26/05/2009

Exercício 1.

(a) Encontre a forma canônica de Jordan das matrizes $A \in M_{8,8}(\mathbb{R})$ com polinômio mínimo $P_A(x) = x^2(x-2)^3$ e tais que:

- (i) $\dim \text{Núcleo}(A) = 2$
- (ii) A admite pelo menos dois autovetores linearmente independentes relativos ao autovalor 2.

(b) Considere a aplicação $T_A: \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ induzida por uma matriz A como no ponto (a). Podemos afirmar que \mathbb{R}^8 é T_A -cíclico?

Exercício 2.

(a) Usando a forma canônica racional, diga se as seguintes matrizes de $M_{4,4}(\mathbb{Q})$ são semelhantes em \mathbb{Q} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \gamma \\ 1 & -1 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}.$$

(b) Qual é a forma de Jordan de A como matriz sobre o corpo:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}?$$

Exercício 3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Encontre a forma canônica de Jordan de um operador nilpotente $T: V \rightarrow V$ de índice 5 tal que $\dim V = 12$, $\dim T(V) = 8$, $\dim T^2(V) = 5$, $\dim T^3(V) = 3$, $\dim T^4(V) = 1$.

Exercício 4. Seja K um corpo algebricamente fechado de característica 0. Encontre as formas canônicas de Jordan e racional de uma matriz $A \in M_{n,n}(K)$ tal que $\text{Traço}(A^i) = 0$, para todo $i \geq 1$.

Exercício 5. Prove que se A é uma matriz real simétrica, logo o seu polinômio mínimo tem somente raízes reais.