

ALGEBRA LINEAR – PROVA 2 – 26/05/2009

**Exercício 1.**

(a) Encontre a forma canônica de Jordan das matrizes  $A \in M_{8,8}(\mathbb{R})$  com polinômio mínimo  $P_A(x) = x^2(x-2)^3$  e tais que:

- (i)  $\dim \text{Núcleo}(A) = 2$
- (ii)  $A$  admite pelo menos dois autovetores linearmente independentes relativos ao autovalor 2.

(b) Considere a aplicação  $T_A: \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$  induzida por uma matriz  $A$  como no ponto (a). Podemos afirmar que  $\mathbb{R}^8$  é  $T_A$ -cíclico?

**Exercício 2.**

(a) Usando a forma canônica racional, diga se as seguintes matrizes de  $M_{4,4}(\mathbb{Q})$  são semelhantes em  $\mathbb{Q}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \gamma \\ 1 & -1 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}.$$

(b) Qual é a forma de Jordan de  $A$  como matriz sobre o corpo:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}?$$

**Exercício 3.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Encontre a forma canônica de Jordan de um operador nilpotente  $T: V \rightarrow V$  de índice 5 tal que  $\dim V = 12$ ,  $\dim T(V) = 8$ ,  $\dim T^2(V) = 5$ ,  $\dim T^3(V) = 3$ ,  $\dim T^4(V) = 1$ .

**Exercício 4.** Seja  $K$  um corpo algebricamente fechado de característica 0. Encontre as formas canônicas de Jordan e racional de uma matriz  $A \in M_{n,n}(K)$  tal que  $\text{Traço}(A^i) = 0$ , para todo  $i \geq 1$ .

**Exercício 5.** Prove que se  $A$  é uma matriz real simétrica, logo o seu polinômio mínimo tem somente raízes reais.