ALGEBRA LINEAR – PROVA 2 – 04/06/2012

Exercício 1. Encontre as formas canônica e racional das matrizes $A \in M_{10,10}(\mathbb{R})$ que possuem poliómio caraterístico $F_A(x) = x^2(x+1)^4(x+2)^4$ e tais que

$$\dim Nucleo(A) = 1, \ \dim W_{-1} = 2, \ \dim W_{-2} \geq 3$$

onde W_λ indica o auto-espaço relativo a um auto-valor λ de A.

Exercício 2. Sejam A e B duas matrizes nilpotentes $n \times n$ com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$ que possuam os mesmos polinómios mínimo e o mesmo posto. Prove ou disprove:

(a) Se $n = 6$, logo A e B são semelhantes.

(b) Se $n = 7$, logo A e B são semelhantes.

Exercício 3. Seja A uma matriz $n \times n$ com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$. Suponha que A satisfaz a relação $A^3 = A$.

(a) Usando a forma canonica de Jordan, prove que se $\mathbb{K}$ é o corpo dos números complexos, logo A é diagonalizavel.

(b) O resultado em (a) permanece verdadeiro se $\mathbb{K}$ é um corpo qualquer?

Exercício 4. Seja T um operador sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Seja P_T o polinómio mínimo de T e, dado $v \in V$, seja $P_{T,v}$ o polinómio T-anulador de v.

(a) Prove que se T é nilpotente de índice k, logo todo vetor $v \in V$ tal que $T^{k-1}v \neq 0$ satisfaz a relação $P_{T,v} = P_T$.

(b) Prove que se T é qualquer, existe sempre um vetor $v \in V$ tal que $P_{T,v} = P_T$.