ÁLGEBRA LINEAR – PROVA 3 – 04/06/2012

Exercício 1. Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Mostre que se T é normal e $T^k v = 0$, onde v é um vetor de V e k é um inteiro positivo, logo $Tv = 0$.

Exercício 2. Seja $\langle, \rangle$ um produto interno sobre K^n , onde K é o corpo complexo ou real. Lembre que uma matriz $A \in M_{n,n}(K)$ é *positiva* se $A = A^*$ e $\langle Av, v \rangle$ é um real positivo, para todo $v \in K^n$. Mostre que se A é positiva e A^2 é um múltiplo do operador identidade, logo T é um múltiplo da identidade.

Exercício 3. Lembre que uma projeção é dita *projeção ortogonal* se é autoadjunta. Seja T um operador normal de um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Mostre que se T é uma projeção, logo T é uma projeção ortogonal.

Exercício 4. Seja T um operador autoadjunto de um espaço vetorial V de dimensão finita munido de produto interno.

(a) Mostre que existem números reais não nulos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e projeções ortogonais $E_1, \dots, E_n$ tais que

$$T = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n.$$

(b) Mostre que se $T^k = 0$ para algum inteiro positivo k , logo $T = 0$.

(c) Mostre que se V é complexo, logo existe um operador U tal que $U^2 = T$. É possível escolher U normal? É possível escolher U autoadjunto?