

**LISTA 1**  
**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**

PROFESSOR MARCO

**Exercício 1.** Mostre que todo inteiro que seja quadrado possui resto igual a 0 ou 1 quando dividido por 4. Deduza que se  $(a, b, c)$  é uma terna Pitagórica, logo  $a$  e  $b$  não podem ser ao mesmo tempo ímpares.

**Exercício 2.** Prove que se  $(a, b, c)$  é uma terna Pitagórica, logo

$$\frac{a}{c} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, \quad \frac{b}{c} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

para alguns inteiros  $p$  e  $q$ . Deduza o resultado de Euclides, que diz que toda terna Pitagórica  $(a, b, c)$  é do tipo

$$a = (p^2 - q^2)r, \quad b = 2pqr, \quad c = (p^2 + q^2)r$$

para alguns inteiros  $p, q, r$ .

**Exercício 3.** O número  $2^{13} - 1$  é primo. Use este fato para escrever o quinto número perfeito (em ordem de grandeza).

**Exercício 4.** Use o algoritmo de Euclides para encontrar o MDC de 456 e 759. Escreva tal MDC como combinação linear  $s \cdot 456 + t \cdot 759$ , para algum  $s, t$ . Mais em geral, dados inteiros  $a$  e  $b$ , mostre que existem inteiros  $s$  e  $t$  tais que

$$MDC(a, b) = s \cdot a + t \cdot b.$$

Use este resultado para mostrar que, se  $p$  é um primo que divide um produto  $a \cdot b$ , logo  $p$  divide ou  $a$  ou  $b$ .

**Exercício 5.** Mostre que é possível escrever  $\sqrt{2}$  como fração contínua no seguinte jeito

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

**Exercício 6.** Prove que a equação  $ax + by = c$ , para inteiros  $a, b, c$ , possui soluções inteiras  $x$  e  $y$  se e somente se  $MDC(a, b)$  divide  $c$ . A equação  $12x + 15y = 1$  possui soluções inteiras?

**Exercício 7.** Prove que se  $m$  e  $p$  são inteiros e  $mp$  tem resto 1 quando dividido por um inteiro  $a$ , logo  $MDC(p, a) = 1$ .

**Exercício 8.** Prove o teorema chinês do resto enunciado na sala de aula no caso especial de 2 equações lineares.

**Exercício 9.** Suponha que seja dado o segmento de comprimento unitário. Mostre que se sabemos construir segmentos de comprimento  $a$  e  $b$ , logo é possível construir também segmentos de comprimentos  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $a \cdot b$ ,  $a/b$  e  $\sqrt{a}$ .

**Exercício 10.** Temos um grupo de pessoas que queremos contar. Sabemos que o número de pessoas é menor do que 100, e que, quando alinhados por 3, por 5 e por 7, ficam fora respectivamente 2, 3 e 4 pessoas. Qual é o número de pessoas? (Dica: teorema chinês do resto).