

LISTA 1
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. Mostre que todo inteiro que seja quadrado possui resto igual a 0 ou 1 quando dividido por 4. Deduza que se (a, b, c) é uma terna Pitagórica, logo a e b não podem ser ao mesmo tempo ímpares.

Exercício 2. Prove que se (a, b, c) é uma terna Pitagórica, logo

$$\frac{a}{c} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, \quad \frac{b}{c} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

para alguns inteiros p e q . Deduza o resultado de Euclides, que diz que toda terna Pitagórica (a, b, c) é do tipo

$$a = (p^2 - q^2)r, \quad b = 2pqr, \quad c = (p^2 + q^2)r$$

para alguns inteiros p, q, r .

Exercício 3. O número $2^{13} - 1$ é primo. Use este fato para escrever o quinto número perfeito (em ordem de grandeza).

Exercício 4. Use o algoritmo de Euclides para encontrar o MDC de 456 e 759. Escreva tal MDC como combinação linear $s \cdot 456 + t \cdot 759$, para algum s, t . Mais em geral, dados inteiros a e b , mostre que existem inteiros s e t tais que

$$MDC(a, b) = s \cdot a + t \cdot b.$$

Use este resultado para mostrar que, se p é um primo que divide um produto $a \cdot b$, logo p divide ou a ou b .

Exercício 5. Mostre que é possível escrever $\sqrt{2}$ como fração contínua no seguinte jeito

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

Exercício 6. Prove que a equação $ax + by = c$, para inteiros a, b, c , possui soluções inteiras x e y se e somente se $MDC(a, b)$ divide c . A equação $12x + 15y = 1$ possui soluções inteiras?

Exercício 7. Prove que se m e p são inteiros e mp tem resto 1 quando dividido por um inteiro a , logo $MDC(p, a) = 1$.

Exercício 8. Prove o teorema chinês do resto enunciado na sala de aula no caso especial de 2 equações lineares.

Exercício 9. Suponha que seja dado o segmento de comprimento unitário. Mostre que se sabemos construir segmentos de comprimento a e b , logo é possível construir também segmentos de comprimentos $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a/b e \sqrt{a} .

Exercício 10. Temos um grupo de pessoas que queremos contar. Sabemos que o número de pessoas é menor do que 100, e que, quando alinhados por 3, por 5 e por 7, ficam fora respectivamente 2, 3 e 4 pessoas. Qual é o número de pessoas? (Dica: teorema chinês do resto).