ÁLGEBRA III (2011)–LISTA 1

Grupos e subgrupos – Subgrupos normais e grupos quocientes

(1) Seja G um grupo e seja $g \in G$. Definimos o *centralizante de g em G* como
$$C(g) := \{x \in G : gx = xg\}.$$
Prove que $C(g)$ é um subgrupo de G. Assuma que $|G| = 2p$, com p primo, $g^2 = e$ e $g \neq e$. É possivel que $|C(g)| = 2$? É possivel que $|C(g)| = p$? É possivel que $|C(g)| = 2p$?

(2) Determine todos os subgrupos do grupo simetrico S_3. Diga quais subgrupos são normais e determine os relativos grupos quocientes.

(3) Mostre que se G é um grupo e N é um seu subgrupo de índice 2, logo N é normal em G.

(4) Verifique que $H := \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$ é um subgrupo normal de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Determine a relação de equivalência associada á H e as relativas classes de equivalência.

(5) Sejam H e K dois subgrupos normais de um grupo G tais que $H \cap K = \{e\}$. Prove que $hk = kh$ para todo $h \in H$ e $k \in K$.

(6) Prove ou disprove: se H é normal em K e K é normal em G, logo H é normal em G.

(7) Mostre que o conjunto
$$G := \{f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_{a,b}(x) = ax + b, \text{ para } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$$
é um grupo não abeliano com respeito á composição. Além disso, prove que o subconjunto T formado pelas funções $f_{1,b}$, ao variar de $b \in \mathbb{R}$ é normal em G e determine o grupo quociente G/T. Enfim, prove que o subconjunto H formado pela funções $f_{a,0}$, ao variar de $a \in R - \{0\}$ é um subgrupo de G. Podemos afirmar que H é normal em G?

(8) Prove a Proposição 8 da aula do dia 18/08/2011.

(9) Seja H um subgrupo do grupo G. Definimos o *normalizante de H em G* como
$$N_G(H) := \{x \in G : H^x = H\}.$$
Prove que $N_G(H)$ é um subgrupo de G e que H é normal em G. Além disso, prove que H é normal em G se e somente se $N_G(H) = G$.

(10) Seja σ uma permutação do grupo simetrico S_n. Mostre que σ se escreve de forma única como produto de ciclos disjuntos $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$. Dizemos que um ciclo τ tem *comprimento* n se $\tau = (i_1, \ldots, i_n)$ e escrevemos $c((i_1, \ldots, i_n)) = n$. Sejam $\sigma, \sigma' \in S_n$ e seja $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ e $\sigma' = \sigma'_1 \circ \cdots \circ \sigma'_{k'}$ o jeito de escrever σ e σ' como produto de ciclos disjuntos. Dizemos que σ e σ' *tem a mesma estrutura ciclica* se $k = k'$ e $c(\sigma_i) = c(\sigma'_i)$, para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Mostre que se σ e σ' tem a mesma estrutura ciclica, logo σ e σ' são conjugadas. Use isso para descrever os subgrupos normais de S_4.

Material suplementar: Exercícios pag. 66 das nota de Maria Lucia Villela.