ÁLGEBRA (2014)–LISTA 10

Teoria de Galois

(1) Sejam dados $f(x) = x^5 - 2$ e $g(x) = (x^5 - 2)(x^3 - 3)$, polinómos de $\mathbb{Q}[x]$. Sejam F e E os corpos de fatoração respectivamente de $f(x)$ e $g(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.
(i) Calcule $[F : \mathbb{Q}]$ e dimostre que $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5})$.
(ii) Descreva $Gal(F/\mathbb{Q})$ como subgrupo do grupo das permutações das raizes de $f(x)$.
(iii) Calcule $[E : \mathbb{Q}]$.

(2) Seja K o corpo de fatoração de um polinómio separável irredutível $f(x) \in F[x]$ de grau n. Mostre que $|Gal(K/F)|$ é divisível por n e que $Gal(K/F)$ é isomorfo a um subgrupo transitivo[1] de S_n. Deduza que $[K : F]$ divide $n!$

(3) Seja $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grau 5 e seja F o corpo de fatoração de $f(x)$. Mostre que se $[F : \mathbb{Q}] = 5$, logo todas as raizes de $f(x)$ são reais.

(4) De um exemplo de extensão K/F tal que
(i) K/F é normal mas não é de Galois;
(ii) K/F é separavel mas não é de Galois.

(5) Seja F um corpo de caracteristica diferente de 2 e seja K/F uma extensão Galoisiana tal que $[K : F] = 4$. Prove que se $Gal(K/F) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, logo $K = F(\sqrt{a}, \sqrt{b})$, para alguns $a, b \in F$.

(6) Seja L um corpo de caracteristica $p > 0$. Considere $K = L(x, y)$ e $F = L(x^p, y^p)$, onde x e y são indeterminadas. Note que $F \subset K$.
(i) Prove que K é o corpo de fatoração sobre F do polinómio $f(t) = (t^p - x^p)(t^p - y^p) \in F[x]$.
(ii) Prove que $[K : F] = p^2$.
(iii) Mostre que K/F não pode ser gerado por um único elemento.
(iv) Mostre que existem infinitos e distintos corpos intermediários entre F e K.

(7) Seja K/F uma extensão de grau 2, com F de caracteristica $\neq 2$. Prove que K/F é de Galois.

(8) Seja K/F uma extensão de Galois. Suponha que $Gal(K/F)$ é o grupo alterno A_4. Mostre que não existem extensões intermediárias L/F tais que $[K : L] = 2$.

[1]Um subgrupo G de S_n é *transitivo* se para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ existe $\sigma \in G$ tal que $\sigma(i) = j$.

(9) Seja K/F uma extensão de Galois com $[K : F] = n$. Se p é um primo que divide n, prove que existe um subcorpo L de K tal que $[K : L] = p$.

(10) Seja $f(x) \in F[x]$ e K o corpo de fatoração de $f(x)$. Determine o grupo $Gal(K/F)$ e encontre toda as extensões intermediárias de K/F nos seguintes casos:
(i) $F = \mathbb{Q}$ e $f(x) = x^4 - 7$;
(ii) $F = \mathbb{F}_5$ e $f(x) = x^4 - 7$;
(iii) $F = \mathbb{Q}$ e $f(x) = x^5 - 2$;
(iv) $F = \mathbb{F}_2$ e $f(x) = x^6 + 1$;
(v) $F = \mathbb{Q}$ e $f(x) = x^8 - 1$.