LISTA 2
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. (i) Mostre que a reta entre dois pontos racionais possui uma equação com coeficientes racionais.

(ii) Mostre que um círculo com centro um ponto racional e raio racional possui uma equação com coeficientes racionais.

Exercício 2. (i) Mostre que a interseção de duas retas pode ser calculada por operações racionais.

(ii) Mostre que a interseção de uma reta e de um círculo pode ser calculada por operações racionais e estração de raiz.

Exercício 3. Diga quais destes números é constructivel:
(i) $\sqrt[3]{2}$; (ii) $\sqrt[4]{5}$; (iii) $\sqrt[5]{6}$; (iv) $\sqrt[8]{4}$

Exercício 4. Mostre que a forma quadrática $ax^2+bxy+cy^2$ pode ser convertida a forma normal $a'x'^2+b'y'^2$ usando um oportuno θ na substituição

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\mathrm{sen}\theta \\ y = x'\mathrm{sen}\theta + y'\cos\theta. \end{cases}$$

Deduza que toda conica plana pode ser escrita, após uma oportuna mudança de coordenadas, na forma $a'x'^2+b'y'^2+c'x'+d'y'+e'=0$

Exercício 5. Encontre uma parametrização racional, i.e. polinómios $p(t)$ e $q(t)$ tais que todo (x, y) da curva e do tipo $(p(t), q(t))$, para algum t, das seguintes curvas
(i) $y^2 = x^3$;
(ii) $y^2 = x^2(x+1)$.

Exercício 6. Considere o plano projetivo.
(i) Mostre que a hiperbole $xy = 1$ possui dois pontos no infinito.
(ii) Mostre que a curva $y = x^3$ possui um único ponto no infinito.

Exercício 7. (i) Use que $\mathrm{sen}x = 2\mathrm{sen}(x/2)\cos(x/2)$ para provar que

$$\frac{\mathrm{sen}(x)}{2^n\mathrm{sen}(x/2^n)} = \cos(x/2)\cos(x/2^2)\ldots\cos(x/2^n).$$

(ii) Use (i) para provar que

$$\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = \cos(x/2)\cos(x/2^2)\cos(x/2^3)\ldots$$

(ii) Usando (ii), deduza a fórmula de Viéte:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots$$

Exercício 8. Prove a fórmula binomial de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^n b^{n-i}$$

Deduza que se p é primo, logo

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \text{mod}(p).$$

Exercício 9. O pequeno teorema de Fermat afirma que para todo intéiro a e todo primo p, temos

$$a^p \equiv a \text{ mod}(p)$$

Prove o pequeno teorema de Fermat seguindo os seguintes passos:

(i) primeiro faça a prova no caso $a > 0$ por indução sobre a, e usando Exercício 8 ao longo da prova;

(ii) depois faça a prova por a não positivo notando que $0 = (a + (-a))^p$ e usando o Exercício 8.

Exercício 10. Uma fórmula devida a Euler diz que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Use a fórmula de Euler para $s = 1$ para deduzir que existem um número infinito de primos.