ÁLGEBRA III (2011)–LISTA 2

Teorema de homomorfismo – Ação de grupos – Equação das classes

(1) Seja n um inteiro positivo. Considere o grupo $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ e o subgrupo normal $H = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\}$ de G (das raizes de ordem n da unidade). Mostre que $\mathbb{C}^*/H$ é isomorfo á $\mathbb{C}^*$.

(2) Seja G o grupo aditivo formado pelas funções contínuas definidas em $[0,1]$ com valores em $\mathbb{R}$. Considere o subconjunto de G dado por

$$N = \{f \in G : f(1/3) = 0\}.$$

Prove que N é normal em G e diga á qual grupo conhecido é isomorfo G/N.

(3) Considere os subgrupos $S = 16\mathbb{Z}$ e $T = 28\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{Z}, +)$. Verifique que os quocientes $(S+T)/S$ e $T/S \cap T$ são isomorfos.

(4) Seja $G = GL_2(\mathbb{R})$ o grupo das matrizes invertiveis 2×2 com coeficientes reais. Considere os subgrupos de G dados por

$$H = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > \qquad K = < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$$

Estude H e K e prove que HK não é um subgrupo de G.

(5) Seja G um grupo e $H \lhd G$. Se $|H| = 2$, logo H é contido no centro de G?

(6) Considere $GL_n(\mathbb{R})$, o grupo das matrizes invertiveis $n \times n$ com coeficientes reais. Para $A \in GL_n(\mathbb{R})$, seja $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a transformação linear associada. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$. Se

$$W^A = L_A(W), \text{ para } A \in GL_n(\mathbb{R}), W \in \mathcal{S},$$

logo definimos uma ação de $GL_n(\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{S}$? Se sim, quem são as orbitas da ação? É uma ação transitiva?

(7) Seja G um grupo finito e H, K subgrupos de G. Definindo uma ação oportuna de K sobre o conjuntos dos laterais á direita de H, prove que

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

(8) Considere o grupo simetrico S_3. Encontre as classes conjugadas em S_3 e verifique a equação das classes em S_3.

(9) Considere o grupo diedral $D_4 =< r, s : r^4 = s^2 = id; sr = r^3 s >$. Verifique que o centro de D_4 é $C(D_4) = \{id, r^2\}$ e que a equação das classes é

$$|G| = |C(D_4)| + \frac{|D_4|}{C(r)} + \frac{|D_4|}{C(s)} + \frac{|D_4|}{C(r^3 s)},$$

onde $C(r) = \{id, r, r^2, r^3\}$, $C(s) = \{id, s, r^2, r^2 s\}$, $C(r^3 s) = \{id, r^3 s, r^2, rs\}$.

(10) Quantas palavras diferentes (mesmo sem sentido) podemos criar a partir da palavra $UNIVERSIDADE$?

Material suplementar: Exercícios pag. 80 das nota de Maria Lucia Villela.