ÁLGEBRA II (2014)–LISTA 2

Polinómios.

(1) Determine o $MDC(f,g)$ usando o algoritmo euclidiano das divisões, para os seguintes pares de polinómios com coeficientes no corpo K especificado

(i) $K = \mathbb{Q}$ e

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad g(x) = 2x^2 - 2$$

(ii) $K = \mathbb{Q}$ e

$$f(x) = x^4 + x - 1, \quad g(x) = x^3 - 2$$

(iii) $K = \mathbb{Q}$ e

$$f(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 2x + 1, \quad g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

(iv) $K = \mathbb{Z}_7$ e

$$f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1, \quad g(x) = x^4 - 2x^3 - 2x - 1$$

(2) Para cada item (i), (ii), (iii) do exercício (1), encontre polinómios $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ que satisfazem a identidade de Bézout

$$f(x) \cdot \alpha(x) + g(x) \cdot \beta(x) = MDC(f,g).$$

(3) Encontre, se possível, uma fatoração de $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ em polinómios irredutíveis respetivamente sobre cada um dos corpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

(4) Decomponha em fatres irredutíveis os seguintes polinómios sobre os corpos $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2$:

$$x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + x + 12$$
$$x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 4$$

(5) Diga para quais valores de $a \in \mathbb{Z}$ o seguinte polinómio é irredutível sobre $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$:

$$3x^3 + 20ax^2 + 50a^2x + 60$$

(6) Diga se o seguinte polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}$:

$$x^5 + 7x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 8$$

(7) Diga se as seguintes afirmaes so verdadeiras ou falsas:

(i) Todo polinómio é redutível sobre $\mathbb{C}$.

(ii) Um poliómio é irredutível sobre $\mathbb{R}$ se e somente se ele possui grau um ou dois.

(iii) Todo polinómio com coeficientes em um corpo e de grau 1 é irredutível sobre o corpo.

(iv) Um polinómio com coeficientes em $\mathbb{Z}$ que seja irredutível sobre $\mathbb{Q}$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$.

(v) Um polinómio com coeficientes em $\mathbb{Z}$ que seja irredutível sobre $\mathbb{Z}$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.
(vi) Se não existe nenhum primo p que satisfaz as hipotesis do critério de irredutibilidade de Eistenstein, logo o poliómio é redutível.
(vii) Se um polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, logo é irredutível sobre todo $\mathbb{Z}_p$.

(8) Prove a irredutibilidade sobre $\mathbb{Q}$ dos seguintes polinómios:

$$x^5 - x + 1$$
$$3x^5 + 21x^4 + 49x^2 + 28$$
$$x^5 + 4x + 1$$

(9) Enunciar o teorema de fatoração única dos polinómios. Prove ou disprove a seguinte afirmação: *a irredutibilidade de um polinómio sobre um corpo K depende do corpo K.*

(10) Se encontre a fatorações em polinómios irredutíveis sobre $\mathbb{Z}_5$ do seguinte polinómio:

$$x^4 + 2x + 3$$