ÁLGEBRA III (2011)–LISTA 3

Teorema de Cauchy – p-grupos e Teorema de Sylow – Produto direto

(1) Prove que o centro de um grupo não abeliano de ordem p^3 tem ordem p. (Dica: o centralizante de um grupo é normal no grupo, logo podemos tomar o quociente pelo centro).

(2) Prove que se p é primo e m não é divisivel por p, logo $\binom{p^\alpha m}{p^\alpha}$ não é divisivel por p, para todo $\alpha \geq 0$ (Dica: raciocine em $\mathbb{Z}_p[x]$).

(3) Sejam S_3 e S_4 os grupos de permutações sobre 3 e 4 elementos. Encontre todos os p-Sylow de S_3, para p primo. Encontre todos os 3-Sylow de S_4 e um 2-Sylow de S_4.

(4) Prove que um grupo de ordem 65 possui um subgrupo normal não trivial.

(5) Prove que um grupo de ordem $2m$, onde m é um impar tal que $m > 1$, possui um subgrupo normal não trivial (Dica: escreva $m = p_1^{h_1} \cdots p_k^{h_k}$: o subgrupo normal é um produto $S_1 \cdots S_k$, onde S_i é um p_i-Sylows, para $i = 1, \ldots, k$).

(6) Seja K um corpo finito de cardinalidade $|K| = q = p^t$, onde p é um primo. Mostre que o grupo $GL_n(K)$ tem cardinalidade igual á

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}).$$

Considere o subgrupo S de $GL_n(K)$ das matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & * & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

onde os elementos abaixo da diagonal são zero e os elementos acima da diagonal são quaisquer. Prove que S é um p-Sylow de $GL_n(K)$ e que todos os p-Sylow de $GL_n(K)$ são contidos no subgrupo $SL_n(K)$ de $GL_n(K)$ das matrizes com determinante 1.

(7) Prove que um grupo de ordem 15 é ciclico.

(8) Determine o número dos p-Sylow do grupo das permutações S_p e deduza o seguinte *teorema de Wilson*:

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p.$$

(Dica: as únicas permutações de S_p de ordem p são os p-ciclos).

(9) Prove que o grupo $(\mathbb{Q}, +)$ não pode ser escrito como produto direto de dois subgrupos próprios.

(10) Prove ou disprove: dados dois grupos H e K, logo o centro do produto direto de H e K é igual ao produto direto dos centros de H e K, isto é vale:

$$C(H \times K) = C(H) \times C(K).$$

Material suplementar: Exercícios pag. 91 e 104 das notas de Maria Lucia Villela.