ÁLGEBRA II (2014)–LISTA 3

Grupos I.

(1) Prove que todos os subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$ são do tipo

$$n\mathbb{Z} = \{na : a \in \mathbb{Z}\}, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}.$$

Com isso, deduza que todos os subgrupos de $\mathbb{Z}$ são ciclicos.

(2) Prove ou disprove as seguintes afirmações:
(i) A interseção de um número qualquer de subgrupos de um grupo G é um subgrupo do grupo G.
(ii) A união de dois subgrupos de um grupo G é um subgrupo de G.
(iii) Se $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial, logo $(V, +)$ é um grupo.

(3) Prove que o conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$$

é um subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$

(4) Mostre que, se a e b são elementos de um grupo G tais que $ab = ba$, logo o subgrupo gerdo por $X = \{a, b\}$ é abeliano.

(5) Seja G um grupo. Mostre que, dados $a, b \in G$, as equações $ax = b$ e $ya = b$ admitem uma única solução. Além disso, prove que, dados $a, b, x, y \in G$, valem as seguintes *leis de cancelação*:

$$ax = ay \Rightarrow x = y;$$

$$xa = ya \Rightarrow x = y.$$

(6) Seja $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e seja $\cdot$ o usual produto de multiplicação entre reais. Prove ou disprove:
(i) $(S, \cdot)$ é um grupo.
(ii) S é um grupo com respeito a seguinte operação:

$$x * y = x + y + xy, \text{ para } x, y \in S.$$

(7) Prove que um grupo ciclico é sempre abeliano, ou equivalentemente que um grupo não abeliano nunca é ciclico.

(8) Determine todos os subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$ que contem 6.

(9) Prove que, dado g um elemento de um grupo G, se $g^n = e$ para algum intéiro positivo n, logo a ordem de g divide n. Prove que um elemento $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ possui ordem n/d, onde $d = MDC(a,n)$. Determine em $\mathbb{Z}_{1000}$ todos os elementos de ordem 4 e 8.

(10) Seja

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & c \\ 0 & b \end{array} , \right) a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0 \right\}$$

Prove que G é um grupo. Encontre todos as possíveis ordens dos elementos de G. Faça agora o mesmo exercício com

$$G' = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & c \\ 0 & b \end{array} , \right) a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, b \neq 0 \right\}$$