ÁLGEBRA III (2011)–LISTA 4

Revisão da teoria dos aneis

(1) Seja X um conjunto e seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto dos subconjuntos de X. Dado $A \in \mathcal{P}(X)$, seja $C(A) := X - A$. Mostre que $\mathcal{P}(X)$ é um anel comutativo com respeito á seguintes operações:

$$A + B := (A \cup B) \cap C(A \cap B), \text{ e } A \cdot B := A \cap B.$$

(2) Seja D um domínio. Mostre que o corpo dos quocientes $\mathbb{Q}(D)$ construido na sala de aula é efetivamente um corpo. Verifique que o corpo dos quocientes do anel dos intéiros $\mathbb{Z}$ é o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$, isto é $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\mathbb{Z})$.

Lembre que se $(A, +, \cdot)$ é uma anel, logo um ideal I de A é um subconjunto de A que é um subgrupo de $(A, +)$ e tal que $a \cdot i \in I$, para todo $a \in A$ e $i \in I$. Para um ideal I de um anel A, definimos a seguinte relação de equivalência sobre A:

$$a \,\rho_I\, a' \Leftrightarrow a - a' \in I$$

Nos exercícios (3)-(4)-(5) construiremos o chamado *anel quociente*. Note que a analogia com a construção do grupo quociente feita para grupos.

(3) Seja I um ideal de um anel A. Mostre que ρ_I é efetivamente uma relação de equivalência.

(4) Seja I um ideal de um anel A. Mostre que se $a \,\rho_I\, a'$ e $b \,\rho\, b'$, logo valem a seguintes propriedades:

$$a + b \,\rho_I\, a' + b' \text{ e } a \cdot b \,\rho_I\, a' \cdot b'.$$

(5) Seja I um ideal de um anel A. Seja A/I o conjunto das classes de equivalência associadas á relação ρ_I. Denote a classe de $a \in A$ por $a + I$. Mostre A/I com as operações $(a + I) + (b + I) = a + b + I$ e $(a + I) \cdot (b + I) = ab + I$ é um anel. Chamamos A/I *o anel quociente*.

Seja $f \colon A \to B$ um homomorfismo de aneis. Nos exercícios (6)-(7)-(8)-(9) mostraremos o chamado *teorema fundamental de homomorfismo entre aneis*. Note a analogia com o teorema fundamental de homomorfismo entre grupos.

(6) Mostre que $Kerf$ é um ideal de A. Mostre que Imf é um subanel de B.

(7) Mostre que $\pi \colon A \to A/Kerf$ definido por $\pi(a) = a + Kerf$ é um homorfismo de aneis.

(8) Mostre que $f^* \colon A/Kerf \to Imf$ definido por $f^*(a + Kerf) = f(a)$ é um isomorfismo de aneis, isto é um homomorfismo bijetivo de aneis.

(9) Deduza que dado o homomorfismo de aneis $f \colon A \to B$ encontramos um isomorfismo $f^* \colon A/Kerf \to Imf$ tal que $f^* \circ \pi = f$.

(10) Seja $K[x]$ o anel dos polinômios em uma variavel com coeficientes em um corpo K. Seja I um ideal de $K[x]$. Mostre que um qualquer polinômio de I de grau minimal gera I. Em particular, isto mostra que $K[x]$ é principal.

Priméiras propriedades das extensões de corpos

(1) Qual é a carateristica respetivamente de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p(x)$ e $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$?

(2) Prove que se F é uma extensão de um corpo K, logo F é um K-espaço vetorial com respeito á suas duas operações.

(3) Considere o subcorpo de $\mathbb{C}$ dado por $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ e seja $\alpha = \frac{1}{1+2\sqrt[3]{2}}$. Prove que $\alpha \in K$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Encontre $\mathbb{Q}(\alpha)$. (dica: prove que $x^3 - 2$ é irredutivel sobre $\mathbb{Q}$ e encontre $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q})]$).

(4) Diga quais das seguintes afirmações é verdadeira e porque:

(i) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$.
(ii) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
(iii) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é trascendente sobre $\mathbb{Q}$.
(iv) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ tem grau 6 sobre $\mathbb{Q}$.

(5) Diga se os seguintes elementos são algébricos ou trascendentes sobre $\mathbb{Q}$. Se algébricos, calcule o polinômio minimo:

$$\frac{\pi + 3}{\pi + \sqrt{4}}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{7}, \quad \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

(6) Determine uma base para as seguintes extensões:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) \text{ e } \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \text{ sobre } \mathbb{Q}$$
$$\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \text{ e } \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3}) \text{ sobre } \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$

(7) Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{i}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. (Dica: prove que $\sqrt{2} = \sqrt{i} - i\sqrt{i}$)

(8) Seja $\alpha = \sqrt{2} + i \in \mathbb{C}$. Mostre que α é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ e também sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $[\mathbb{R}(\alpha) : \mathbb{R}] = 2$ e que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$.

(9) Prove que a cardinalidade de um corpo finito é uma potência de um primo. (Dica: qual é o subcorpo fundamental de um corpo finito?)

(10) Mostre que $\{1, \sqrt{5}\}$ é uma base de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Material suplementar: Exercícios pag. 21 das notas de Maria Lucia Villela.