ÁLGEBRA II (2014)–LISTA 4

Grupos II.

(1) Determine as inversas das seguintes permutações de S_8:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 3 & 2 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Além disso, determine a ordem de cada uma das permutações dadas, e escreva elas como produto de ciclos disjuntos.

(2) Diga se o seguinte subconjunto de S_4 é um subgrupo de S_4:

$$S = \{id, (1,3,2), (1,2,3), (1,2), (3,4), (2,3), (13)(2,4),$$
$$(1,2)(3,4), (1,2,3,4), (1,3,2,4), (2,1,3,4), (2,1,4,3)\}.$$

(3) Prove ou disprove:
(i) O subconjunto de S_n das permutações pares é um subgrupo de S_n;
(ii) O subconjunto de S_n das permutações impares é um subgrupo de S_n.
(iii) S_n é gerado pelos 3-ciclos.

(4) Escreva todos os elementos do grupo alterno A_4 (i.e. o subgrupo de S_4 formado pelas permutações pares).

(5) Dados grupos G_1 e G_2, mostre que existe um grupo cujos elementos são os elementos do conjunto

$$G_1 \times G_2 := \{(g_1, g_2) : g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}.$$

Em particular, escreva a tabela multiplicativa e a ardem dos elementos dos grupos

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

(6) Seja D_n o grupo diedral com $2n$ elementos. Seja s um reflexão em D_n e r rotaçso antihorária de ângulo $2\pi/n$. Prove que vale a seguinte relação:

$$sr = r^{n-1}s$$

(7) Seja R o retangulo no plano Cartesiano com vertices $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$, $(-2,-1)$. Seja V_4 os conjunto dos movimento que levam R em se, i.e. a refleção a em torno ao eixo x, a refleção b em torno ao eixo y, a rotação c antihorária de ângulo π, e a transfomação id que não move nada. Assim,

$$V_4 = \{id, a, b, c, d\}.$$

Prove que V_4 é um grupo com respeito a composição de movimentos. O grupo V_4 é chamado *grupo de Klein.* Mostre que V_4 não é isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$. Prove que V_4 é isomorfo ao grupo $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$, i.e. ao grupo dos invertíveis de $\mathbb{Z}_8$.

(8) Determine todos os subgrupos do grupo diedral D_4 e determine todos os laterais a diréita e a esquerda módulo um subgrupo de D_4. Verifique que todos os laterais tem a mesma cardinalidade.

(9) Prove (provando ou citando o resultado oportuno) ou disprove:
(i) Em um grupo de ordem 60 pode ter um subgrupo de ordem 15;
(ii) Em um grupo de ordem 60 pode ter um subgrupo de ordem 16;
(iii) Em um grupo de ordem 8 existe sempre um subgrupo de ordem 4 (dica: use o Exercício 5);
(iv) Em um grupo de ordem 2^n existe sempre um subgrupo de ordem 4;
(v) Em um grupo ciclico de ordem mn existe sempre um subgrupo de ordem m;
(vi) Em S_n existe sempre um subgrupo de ordem m, para todo $m \leq n$.

(10) Mostre as seguintes afirmações:

- um grupo de ordem 2 é isomorfo a $(\mathbb{Z}_2, +)$;
- um grupo de ordem 3 é isomorfo a $(\mathbb{Z}_3, +)$;
- um grupo de ordem 3 é isomorfo ou a $(\mathbb{Z}_4, +)$ ou ao grupo de Klein V_4.

um grupo de ordem