ÁLGEBRA (2014)–LISTA 5

Extensões de corpos

(1) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{7})$. Calcule $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.

(2) A propriedade que segue é conhecida como *universal mapping property* para o anel de polinómios.

(i) Seja A um anel contendo um corpo F. Se $a_1, \ldots, a_n \in A$, logo mostre que existe um único homomorfismo de aneis $\varphi\colon F[x_1, \ldots, x_n] \to A$ tal que $\varphi(x_i) = a_i$, para todo i.

(ii) Suponha que B é um anel contendo um corpo F, e que $f\colon \{x_1, \ldots, x_n\} \to B$ é uma função injetora que satisfaz a seguinte propriedade: para todo anel A que contem F e elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$, logo existe um único homomorfismo de aneis $\varphi\colon B \to A$ tal que $\varphi(f(x_i)) = a_i$, para todo i. Então mostre que B é isomorfo a $F[x_1, \ldots, x_n]$.

(3) Seja F um corpo e $F(a)$ uma extensão finita de F. Para todo $\alpha \in F(a)$, define $L(\alpha) = a \cdot \alpha$. Mostre que L é uma F-transformação linear de $F(a)$. Além disso, mostre que o polinómio mínimo $min(F, a)$ é igual ao polinómio caracteristico de L, i.e. é igual ao $det(xI - L)$.

(4) Seja K/F uma extensão de corpos.

(i) Mostre que se $[K : F]$ é primo, logo não existem extensões L de F contidas em K e tais que $L \neq F$ e $L \neq K$.

(ii) Mostre que se $a \in K$ é tal que $[F(a) : F]$ é impar, logo $F(a) = F(a^2)$.

(5) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ não são isomorfos como corpos, mas são isomorfos como $\mathbb{Q}$-espaços vetoriais.

(6) Seja $\mathbb{A}$ o fecho algébrico de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{C}$. Prove que $[\mathbb{A} : \mathbb{Q}] = +\infty$.

(7) Lembre que a caracteristica de um anel R com identidade é o menor intéiro positivo n tal que $n \cdot 1 = 0$, se houver, senão a caracteristica de R é zero. Seja R um anel com unidade e define $\varphi\colon \mathbb{Z} \to R$ como $\varphi(m) = m \cdot 1$. Mostre que $Ker\varphi = m\mathbb{Z}$ para um único intéiro nonnegativo m, e que m é igual a caracteristica de R.

(8) Encontre um exemplo de anel de caracteristica n para todo $n \geq 0$. Mostre que se R é um domínio, logo a caracterisica de R é um primo, ou é igual a zero.

(9) Seja R um anel comutativo com unidade. O *subanel primo de* R é a interseção de todos os subaneis de R. Mostre que o subanel primo de R é um subanel de R que é contido em todos os subaneis de R. Além disso, prove que o subanel primo é igual ao conjunto $\{n \cdot 1 : n \in \mathbb{Z}\}$, onde 1 é a identidade de R.

(10) Seja F um corpo.

(i) Mostre que se a caracteristica de F é $p > 0$, logo o subanel primo de F é igual a $\mathbb{F}_p$, e se a caracteristica de R é zero, logo o subanel primo de R é igual a $\mathbb{Z}$.

(ii) O *subcorpo primo de* F é a interseção de todos os subcorpos de F. Mostre que o subcorpo primo de F é o corpo dos quocientes do subanel primo de F e que é contido em todos os subcorpos de F. Mostre que o subcorpo primo de F é isomorfo a $\mathbb{F}_p$ (resectivamente. $\mathbb{Q}$) se a caracteristica de F é $p > 0$ (respectivamente zero).