ÁLGEBRA (2014)–LISTA 6

Automorfismos – Corpo de fatoração: exemplos básicos

(1) Mostre que o único automorfismo de $\mathbb{Q}$ é a identidade.

(2) Seja F um corpo de característica $\neq 2$. Seja K/F uma extensão de corpos de grau 2. Mostre que $K = F(\sqrt{a})$ para algum $a \in F$, i.e. que existe um elemento $\alpha \in K$ tal que $\alpha^2 = a \in F$ e tal que $K = F(\alpha)$. Mostre que K/F é de Galois.

(3) Considere $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$, onde α é raiz do polinómio $1+x+x^2 \in \mathbb{F}_2[x]$. Mostre que a função $\sigma\colon K \to K$ dada por $\sigma(a+b\alpha) = a+b+b\alpha$, para $a, b \in \mathbb{F}_2$, é um $\mathbb{F}_2$-automorfismo de K.

(4) Mostre que os números complexos $i\sqrt{3}$ e $1+i\sqrt{3}$ são raizes de $f(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 12$. Seja K gerado por $\mathbb{Q}$ e pelas raizes de f. Existe um automorfismo σ de K tal que $\sigma(i\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$?

(5) Quais das seguintes extensões é de Galois?
(i) $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$, onde $\omega = e^{2\pi i/3}$;
(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$;
(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})/\mathbb{Q}$.

(6) Se K/F é de Galois e F/L é de Galois, logo K/L é de Galois?

(7) Seja $k := \mathbb{F}_p$ e seja $k(x)$ o corpo das funções racionais na variavel x com coeficientes em k. Define $\varphi\colon k(x) \to k(x)$ como $\varphi(f(x)) = f(x+1)$. Mostre que φ tem ordem p em $Gal(k(x)/k)$. Define $u := x^p - x$. Mostre que $k(u)$ é o corpo fixo pelo subgrupo G de $Gal(k(x)/k)$ gerado por φ. Mostre que x é algébrico sobre $k(u)$ e determine $min(k(u), x)$.

(8) Considere o polinômio $f(x) = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2(x)$.
(i) Prove que f é irredutivel sobre $\mathbb{Z}_2$. Encontre um corpo onde f possui uma raiz e liste explicitamente todos os seus elementos.
(ii) Encontre o corpo E de fatoração de f sobre $\mathbb{Z}_2$ e o grau $[E : \mathbb{Z}_2]$.

(9) Prove que $x^2 + x + 1$ e $x^2 - x + 1$ são irredutivel sobre $\mathbb{Q}$ (Dica: aplique a substitução $x = y+1$, mais de uma vez se precisar). Considere $f(x) = x^6 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Encontre o corpo de fatoração E de f sobre $\mathbb{Q}$ e calcule $[E : \mathbb{Q}]$.

(10) (i) Considere o polinômio $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$. Encontre o corpo de fatoração E de f sobre $\mathbb{Q}$ e encontre o grau $[E : \mathbb{Q}]$.
(ii) Determine o corpo de fatoração de $f(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2 - 2x - 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Qual é o corpo de fatoração de $f(x)$ (como polinômio de $\mathbb{R}[x]$) sobre $\mathbb{R}$?