ÁLGEBRA (2014)–LISTA 8

Separábilidade

(1) Mostre que um corpo de carateristica zero é perfeito.

(2) Mostre que um corpo F de carateristica $p \neq 0$ é perfeito se e somente se para todo $a \in F$ é possivel encontrar $b \in F$ tal que $b^p = a$.

(3) Prove que um corpo finito é perfeito.

(4) É conhecido o seguinte resultado:

O grupo multiplicativo de um corpo finito é ciclico.

Usando este resultado, mostre que uma extensão finita de um corpo finito é simples. Compare este exercício com o *Teorema do elemento primitivo* provado no curso.

(5) Seja F um corpo de característica $p > 0$. Define $f(x) := x^p - a \in F[x]$, onde $a \in F$. Prove que uma das seguintes condições é satisfeita:
(i) $f(x)$ é irredutível sobre F;
(ii) $f(x)$ possui uma raiz sobre F, i.e. existe $b \in F$ tal que $a = b^p$.

(6) Seja F um corpo de caractéristica $p > 0$. Seja $a \in K$ um elemento algébrico sobre F, onde K é uma extensão de F. Tome $f(x) = min(F, a)$. Prove que $f(x)$ é separável sobre F se e somente se $F[a^p] = F[a]$.

(7) Prove que dados polinómios $f(x), g(x) \in F[x]$, temos

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)$$
$$(f(g(x)))' = f(g(x) \cdot g'(x).$$

(8) Sejam K/L e L/F extensões. Mostre que se K/F é separável, logo K/L e L/F sso separáveis.