ÁLGEBRA III (2011)–LISTA 6

Teoria de Galois

(1) Determine o grupo de Galois dos seguintes polinômios com coeficientes em $\mathbb{Q}$:

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 10, \quad x^4 - 7x^2 + 10$$
$$x^3 - 1, \quad x^3 - 7, \quad x^4 - 5$$

(2) Determine todos os corpos intermediários da extensão de corpos $\mathbb{Q} \subset E$, onde E é o corpo de fatoração sobre $\mathbb{Q}$ do polinômio $f(x) = x^6 + x^4 - 4x^2 - 4 \in \mathbb{Q}[x]$.

(3) Mostre todos os detalhes da Proposição 18 das notas.

(4) Determine o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset K$, onde K é o corpo de fatoração sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ do polinômio $f(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2 - 2x - 2\sqrt{3}$

(5) Determine todos os $\mathbb{Q}$-automorfismos do corpo $F = \mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{5})$. Diga se F é uma extensão Galoisiana de $\mathbb{Q}$.

(6) Seja F uma extensão Galoisiana de K. Sejam H_1, H_2 subgrupos de $G(F,K)$ e T_1, T_2 subcorpos intermediários de $K \subset F$ tais que $G(F,T_1) = H_1$ e $G(F,T_2) = H_2$. Denote com $< H_1, H_2 >$ o subgrupo de $G(F,K)$ gerado por H_1, H_2. Denote com $T_1(T_2)$ o subcorpo de $K \subset F$ o menor subcorpo contendo T_1 e os elementos de T_2. Prove que

$$G(F, T_1(T_2)) = H_1 \cap H_2, \quad G(F, T_1 \cap T_2) =< H_1, H_2 > .$$

(7) Seja ω tal que $\omega^p = 1$ e $\omega \neq 1$, onde p é um primo. Encontre o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\omega)$.

(8) Encontre todos os $\mathbb{Q}$-automorfismos de $\mathbb{R}$.

(9) Seja R_{10} o grupo ciclico das raizes décimas da unidade. Seja ω uma raiz primitiva décima, isto é um gerador de R_{10}. Prove que o grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\omega), \mathbb{Q})$ é o grupo ciclico com 4 elementos. Encontre os corpos intermediários da extensão $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\omega)$.

(10) Seja $K \subset F$ uma extensão Galoisiana e suponha que o grupo de Galois da estensão é o $G(F,K) = D_{10}$, o grupo diedral com 10 elementos. Encontre todos os corpos intermediãrios T da extensão $K \subset F$, calculando o grau $[T : K]$ e dizendo quais extensões $K \subset T$ são Galoisianas.

Material suplementar: Exercícios pag. 76 das notas de Maria Lucia Villela.