Tópicos de História da Matemática

através de Problemas

(Notas de Aula)

Estas notas de aula são os frutos das leituras de muitos artigos e livros de História da Matemática. Extratos e entendimentos as compõem. Dedico-as:

às minhas alunas e aos meus alunos do curso de Licenciatura em Matemática que fizeram esta disciplina comigo, que através da atenção que sempre me deram e os debates constantes que sempre mantiveram em sala de aula, motivaram meu desejo emocionado de estudar cada vez mais para procurar melhorá-las, dando-lhes um valor no curso;

às minhas alunas Ohanna Mourão e Aline Madeira que souberam digitá-las com paciência, boa vontade e com um zelo impressionante. A elas meu agradecimento e minha admiração;

ao Professor Pedro Nobrega que me fez repensar os elos no saber matemático;

ao Professor Abramo Hefez que me mostrou emoção e silêncio para pensar a Matemática;

ao Professor Leonardo de Carvalho que me proporcionou o diálogo para repensar o ensino da história da Matemática;

ao Professor Wanderley Rezende, introdutor da disciplina História da Matemática no curso de Licenciatura.

Pierre

<u>Obs</u>.: Estas notas são destinadas exclusivamente às alunas e aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Fluminense.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA - GUIA DE DISCIPLINA

Introdução

Mostrar a dimensão histórica do saber matemático é o principal papel da disciplina História da Matemática na formação do(a) Professor(a) de Matemática. A maneira como esta disciplina será apresentada é caracterizada pelo seu nome: *História da Matemática Através de Problemas*. Esta maneira é significativa pois identifica o acesso ao conhecimento matemático pela via dos problemas que a Matemática gera ao longo de sua história. Assim, a incorporação da categoria histórica como fio condutor desses problemas restitui à produção do saber matemático como um todo, suas transformações e sua persistência, entre impasses, conjecturas, intuições e certezas ao longo do tempo. Evidentemente que esta abordagem deverá sobretudo permitir um entendimento geral do modo como o pensamento matemático se desenvolve e produz o conhecimento matemático.

A Matemática vista com sua história permite o estabelecimento de relações e de influências entre a Álgebra, a Geometria, a Aritmética e a Análise; permite perceber como seus problemas geram, no fluxo do pensamento matemático, novas questões e, consequentemente, novas descobertas/novas construções.

Objetivos da Disciplina

Objetivo Geral

Conceber a história da Matemática como uma fonte de entendimento dos problemas da Matemática.

Objetivos Específicos

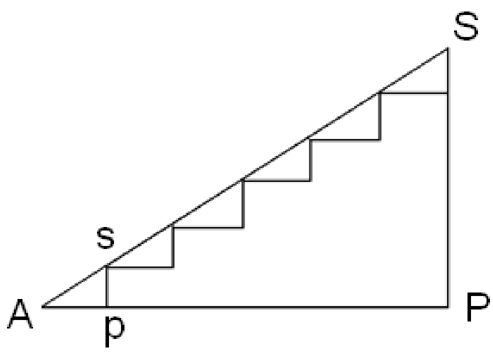
Apresentar através dos principais momentos da História da Matemática a concepção das ideias na Matemática e o aparecimento dos problemas delas resultantes, colocando-as nos seus contextos cultural, econômico e institucional. De forma mais detalhada, identificam-se os seguintes pontos:

- possibilitar o esclarecimento de conceitos, propriedades e métodos matemáticos que são ensinados;
- mostrar a existência de uma continuidade entre os conceitos e os processos matemáticos do passado e do presente;
- refletir as preocupações práticas ou teóricas das diferentes culturas;
- aprofundar o conhecimento matemático;
- treinar a leitura de textos matemáticos primários;
- aprofundar a consciência da Matemática como conhecimento em constante desenvolvimento;
- discutir tópicos matemáticos de forma construtiva;
- estabelecer o aprendizado sobre o desenvolvimento histórico de um tópico da Matemática;
- estabelecer o aprendizado, através da história, sobre os matemáticos e seus trabalhos;
- estabelecer o aprendizado de como "fazer" matemática através do percurso de suas ideias;
- dar pontos de referência sobre a constituição de um saber do qual se conhece o estado final, mas não a gênese;
- enriquecer as experiências didáticas.

Os três seguintes artigos propõem discussões interessantes sobre o papel da História da Matemática no desenvolvimento do pensamento matemático, na construção do conhecimento matemático e no ensino da matemática.

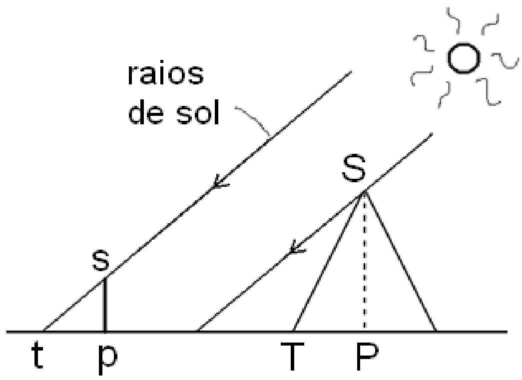
Breve apresentação da história da Matemática até o final do século VII AC

Os textos provenientes das primeiras civilizações orientais do Egito ou da Babilônia não são suficientes para nos permitir a maneira pela qual pôde-se constituir uma aritmética, uma geometria e uma álgebra, desenvolvidas desde o 2º milênio antes da nossa era. Certamente não se tratam de especulações abstratas, mas de "receitas" transmitidas por castas de escribas especializados e destinados a regrar os problemas práticos que põe uma sociedade agrária já muito estruturada: trocas, litígios, partilhas e rendas. Os documentos que chegaram à nós (papiros e tabletas de barro cozido), entretanto, já mostram conhecimentos sobre as frações, as progressões aritméticas e geométricas, a extração de raízes quadradas; problemas de caráter algébrico (nos babilônios, com linguagem geométrica) equivalentes a equações lineares, quadráticas, cúbicas e biquadráticas. Em geometria plana, figura tais como quadrado, retângulo, trapézio, circunferência, ângulo reto, são conhecidas provavelmente em ligação com o uso de utensílios tais como: o cordel do agrimensor, o esquadro do pedreiro a roda do oleiro. A ideia de semelhança é atestada nos babilônios dos quais um texto enuncia que em uma escada a relação da altura com a largura de um degrau é a mesma que esta da altura total da escada com a sua projeção horizontal.



$$\frac{sp}{Ap} = \frac{SP}{AP}$$

Por outro lado, os gregos atribuem a Tales de Mileto um procedimento de medida da altura de uma pirâmide, sem dúvida conhecida dos egípcios: se observa o comprimento de sua sombra e a relação da altura com esta sombra é a mesma que esta da altura de um bastão com o comprimento da sombra deste bastão.



$$\frac{sp}{tp} = \frac{SP}{TP}$$

Quanto a geometria espacial, os monumentos que subsistem testemunham dos arquitetos e dos pedreiros conhecimentos empíricos para o cálculo correto de volumes de sólidos tais como o paralelepípedo retângulo, o cubo, o cilindro, o cone, a pirâmide e os troncos esses dois últimos (<u>tronco</u> – <u>*frustum*</u> em latim). Os conceitos que intervêm só concernem aos objetos concretos: medidas suscetíveis de adição e de subtração como comprimento, área, volume, ângulo, com unidades e tomando seus múltiplos e submúltiplos. As "receitas" dizem respeito a exemplos onde os dados são explicitados, elas são procedimentos de cálculo sem justificação como a avaliação de áreas onde a forma e as dimensões são conhecidas, por exemplo, o triângulo isósceles ou retângulo, o trapézio e o círculo. Não existem fórmulas no sentido que nós as entendemos; a generalização de um procedimento de cálculo é percebida a partir de uma série de exemplos onde os dados variam. Ou seja, as instruções são tão especificas que se tem certeza do processo geral, e que após ter-se resolvido uma grande quantidade de problemas, não haverá mais nenhuma dúvida. Não há, contudo, indicação explícita de como se descobriram as regras matemáticas implícitas.

A matemática pré-grega

Existem registros de uma historia bimilenar da matemática pré-grega. Os manuscritos mais antigos da matemática grega datam do século VI a.C. Por esta época já se podia olhar para uma história da matemática respeitável e, pelo menos, com dois mil anos de idade. Nesses dois milênios, resultados significativos tinham sido obtidos pelos babilônios e egípcios decisivos para os desenvolvimentos posteriores da matemática. Os egípcios articularam técnicas complexas de cálculo com números fracionários. Na Mesopotâmia foram alcançados resultados brilhantes pela aplicação do cálculo numérico à resolução de problemas práticos: resultados que conduziram a elaboração de problemas de cálculo extremamente complicados, capazes de determinar as raízes de equações algébricas com uma incógnita, ou também de sistemas de equações com duas incógnitas.

A Matemática no antigo Egito

O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO NA HISTÓRIA E NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

The false position method in History and in Mathematics Education

Cleide Farias de Medeiros[1]
Alexandre Medeiros[2]

Resumo: Este texto coloca em uma perspectiva histórica o tratamento algébrico precoce que, costumeiramente, é dedicado ao ensino elementar da Aritmética. Defendendo que um tal tratamento algébrico precoce carrega vários pontos negativos para formação do educando, o texto discute o "método da falsa posição" como uma alternativa viável para um tal ensino introdutório. Apontando as raízes históricas de tal método, o texto procura evidenciar as origens, aplicações e varias formas de visualizar este procedimento iterativo, desde a manipulação de materiais concretos, passando por aplicações geométricas, até atingir o Cálculo Numérico, como um dos procedimentos iterativos na resolução de equações lineares. Uma das conclusões é que, embora não seja o referido método, em sua forma mais simples, nenhum substitutivo para a resolução algébrica simbólica e moderna de equações e de sistemas de equações, ele se constitui certamente em um precioso trampolim para iniciarmos o salto em direção a um estudo mais formalizado. Particularmente, o método da falsa posição revela-se uma utilíssima ferramenta pedagógica na Educação Matemática, principalmente quando vinculado à suas origens históricas, suas abordagens concretas iniciais e suas associações com a Geometria e a Geometria Analítica.

Unitermos: Historia e Educação Matemática, Aritmética, Método da Falsa Posição, Processos Iterativos Elementares.

Abstract: *This text is a historical perspective on the early algebraic approach that is usually applied to the elementary teaching of Arithmetic. By arguing that such an initial algebraic treatment contains several drawbacks for elementary education, the 'false position method' is discussed and is presented as a viable alternative for such introductory teaching. By pointing out the historical roots of the method, the text tries to make clear several ways of visualizing this iterative procedure. This is done by incorporating the use of manipulative and geometrical applications as well as the use of numerical calculus as an iterative procedure for solving linear equations. Although one conclusion is that in its simpler form this method does not constitute any substitute for the modern symbolic algebraic resolution of equations of linear systems, it certainly represents a valuable springboard*[1] *to reach a more formalized study. Particularly, the false position method is a very useful pedagogical tool in mathematics education, mainly when it is interwoven with its initial concrete approaches and its associations with geometry and analytical geometry.*
Keyword: *History and Mathematics Education, Arithmetic, Method of False Position, Elementary Iterative Processes.*

Introdução.

---

[1] *PhD (Centre for Studies in Science and Mathematics Education – University of Leeds). Mestre em Psicologia da Educação (Pontificia Universidade Católica de São Paulo). Professora do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco*
[2] *PhD (Centre for Studies in Science and Mathematics Education – University of Leeds). MSc (Feusp). Consultor cientifico da Scienco. Instituto Scienco de Pesquisas Educacionais.*

Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

O método da falsa posição, da falsa suposição ou, ainda, do falso pressuposto, é uma forma muito antiga de resolver problemas que atualmente podemos interpretar como relacionados a equações e sistemas de equações lineares. O ensino elementar da Aritmética tem sido substituído nos últimos anos pelo ensino de uma Álgebra disfarçada.

Isso é particularmente observado na resolução de problemas que podem ser modelados por equações lineares. Tais problemas são costumeiramente resolvidos de uma forma exclusivamente simbólica, quer com a adoção imediata de letras na representação das quantidades desconhecidas, quer com uma Álgebra disfarçada na utilização de quadradinhos ou outras figurinhas que tomam o lugar da incógnita e são operadas seguindo as regras da Álgebra. Esta simbolização precoce traz sérios danos para a formação do pensamento especulativo, da exploração das relações numéricas porventura existentes na situação em causa e da própria intuição matemática a ser necessariamente desenvolvida. Por outro lado, investigando a historia do ensino da Matemática, podemos encontrar que em um passado ainda recente, métodos mais intuitivos e exercitadores do raciocínio (e não apenas de procedimentos mecânicos) eram utilizados na escola. Dentre tais abordagens aritméticas destaca-se o antigo "método da falsa posição". Em sua gênese histórica, o método da falsa posição é um procedimento iterativo de resolução de problemas lineares já bastante antigo. Suas origens remontam ao antigo Egito e aos primórdios da civilização chinesa, tendo sido largamente utilizado, desde então, por matemáticos de varias civilizações. Em sua essência, o método da falsa posição consiste em um procedimento de tentativas e erros. Entretanto, como veremos, há algo mais consistente por trás dessa postura aparentemente tão simples. Suas origens perdem-se no tempo, tendo surgido independentemente em vários locais e em varias civilizações da Antiguidade, como uma tentativa de resolver problemas práticos ligados ao comercio, à cobrança de impostos, ao armazenamento de animais e à agrimensura (LUMPKIN, 1992). Esta multiplicidade de formas e locais independentes de surgimento fortalece a convicção de ser tal método uma abordagem naturalmente convidativa ao pensamente, ou intuitiva. Observe que seus usos iniciais eram, alem disso, desprovidos de qualquer justificativa e, portanto, dotados de uma característica realmente intuitiva, parecendo sensato afirmar que esta seria uma forma natural que leigos tenderiam espontaneamente a usar (EVES, 1958). Crianças que foram ainda introduzidas nos meandros da Álgebra simbólica, quando confrontadas com problemas relacionados com equações e sistemas de equações lineares nem sempre conseguem resolvê-los. Entretanto, quando o fazem de forma bem sucedida, agem, quase sempre, por tentativas e erros, seguidos de correções apropriadas e, portanto, de um modo semelhante ao método da falsa posição.

Embora o método da falsa posição seja um assunto muito antigo, algumas variações do mesmo te aplicações bem mais recentes. A ideia, por exemplo, de proceder-se, no Cálculo Numérico, por tentativas e erros, seguidos de repetidas correções na solução de equações não-lineares é inspirada no antigo método da falsa posição, recebendo, assim, a mesma denominação e sendo conteúdo usual em cursos de fundamentos da computação.

Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

Alguns Exemplos de Aplicação do Método da Falsa Posição

A História da Matemática no antigo Egito pode ser investigada através dos registros deixados por escribas em alguns documentos preciosos como os papiros Rhind, de Berlim e de Moscou. O papiro Rhind, compilado por Ahmes, por volta de 1650 a.C., traz 85 problemas. Os problemas de 24 a 27 do papiro Rhind tratam de situações que interpretaríamos, atualmente, como típicas de serem modeladas por equações lineares (COLLETE, 1986). O problema de número 26, por exemplo (JOSEPH,1991), diz o seguinte:

Uma quantidade e o seu quarto adicionado torna-se 15. Qual é esta quantidade?

A solução desde problema em termos algébricos modernos e, portanto simbólicos, pode parecer-nos simples e direta. Com efeito, simbolizando por x a quantidade desconhecida, podemos encontrar a solução resolvendo a equação:

$$x + \frac{x}{4} = 15 \quad \therefore \quad 4x + x = 60 \quad \therefore \quad 5x = 60 \quad \therefore \quad x = \frac{60}{5} \quad \therefore \quad x = 12$$

Notemos, entretanto, que, embora tal solução pareça, efetivamente, muito simples, ela já requer que o estudante compreenda que os símbolos podem ser operados semelhantemente aos números. A inocente soma dos monômios $4x + x$ para dar $5x$ só faz sentido dentro de um contexto algébrico já desenvolvido. De modo análogo, a passagem, aparentemente trivial, de fazermos $5x = 60$ resultar em $x = 12$, só pode ser compreendida baseando-se na aceitação prévia de que a divisão de ambos os membros de uma equação algébrica por uma quantidade diferente de zero não altera a igualdade. Operar diretamente com números, como no caso aritmético, não é nem cognitivamente nem matematicamente a mesma coisa que operar diretamente com símbolos. A simples transferência das propriedades operatórias dos números para os símbolos corresponde a um enorme salto conceitual que deu origem à Álgebra e não deve jamais ter sua complexidade trivializada, sob pena de introduzirmos as crianças em um jogo sem sentido. Também pouco adianta o subterfúgio de utilizarmos outros símbolos em lugar de letras. Assim, fazemos como é comum:

$$\boxdot + \frac{\boxdot}{4} = 15 \quad \therefore \quad 4\boxdot + \boxdot = 60 \quad \therefore \quad 5\boxdot = 60 \quad \therefore \quad \boxdot = \frac{60}{5} \quad \therefore \quad \boxdot = 12$$

equivale a não entendermos a complexidade da verdadeira natureza da dimensão simbólica. A questão da dificuldade matemática e cognitiva não está no simples uso de uma letra para simbolizarmos uma quantidade desconhecida, mas sim no fato de operarmos um tal símbolo como operamos um numero, seja esse símbolo um quadradinho, um triangulo ou uma outra coisa qualquer, inclusive uma simples palavra. Eis porque a Álgebra, ainda que totalmente retórica, é ainda uma Álgebra.

Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

Mesmo sem usarmos símbolos explícitos, o simples fato de operarmos mentalmente com a incógnita, como se estivéssemos operando, de uma maneira geral, com números, é que confere a dimensão algébrica ao problema.

Este não era, entretanto, a forma como os antigos egípcios resolviam o problema. Sem possuírem uma Álgebra simbólica, utilizavam recursos retóricos para enquadrar a situação e um procedimento de tentativas e erros, conhecido como cálculo de "aha", nome dado à quantidade desconhecida. Esse procedimento viria a ser conhecido, posteriormente, como o método da falsa posição. Tal método tinha seu ponto de partida com o levantamento inicial de uma hipótese, ou posição inicial, sobre o valor da quantidade a ser determinada. Esta posição, ou suposição inicial, não era, entretanto, totalmente aleatória, mas sim, algo conveniente que obedecia a um propósito bem claro: o de simplificar os cálculos pela iniciativa de evitar as frações presentes na formulação do problema (BUNT, JONES & BEDIENT, 1988). No caso do exemplo acima, o escriba egípcio escolhia um valor para a quantidade desconhecida (aha) que evitasse a fração $\frac{1}{4}$. Uma boa escolha seria o próprio número 4. É preciso perceber, entretanto, que este valor 4 atribuído inicialmente à quantidade desconhecida não tinha a pretensão de ser algo como um palpite verdadeiro; era, realmente, uma mera tentativa a ser apropriadamente corrigida logo em seguida. Aplicando a esta posição inicial as condições do enunciado do problema, o escriba raciocinava da seguinte forma: se a resposta fosse 4, então $4 + \frac{1}{4} de\ 4 = 5$. Como o resultado esperado era igual a 15, a posição inicial assumida para a incógnita (4) era evidentemente falsa. Entretanto, tendo em vista que o resultado obtido (5) precisava ser multiplicado por 3 para se chegar ao valor da soma correta (15), na mesma proporção deveria ser multiplicada a falsa posição inicial (4) para se obter o valor correto da incógnita. Assim, o método da falsa posição apontava para um valor de "aha" igual a 4 x 3 = 12.

É importante notarmos que o método da falsa posição adotava, portanto, duas linhas mestras. Em primeiro lugar, a adoção inicial de uma falsa posição quanto ao valor da incógnita, adoção esta baseada na conveniência da eliminação das frações. Em segundo lugar, a correção do valor atribuído inicialmente à incógnita por uma proporção entre os valores resultantes das somas (o correto e o obtido com a posição inicial) e os valores das incógnitas (o correto e a própria falsa posição inicial).

Para sermos mais fiéis com a historia, seria conveniente assinalarmos que os antigos egípcios, ao utilizarem o cálculo de "aha", expressavam as frações sempre reduzidas a somas das chamadas "frações unitárias", onde estas significavam frações de numeradores iguais a 1. Elas eram indicadas por um símbolo sobre os números, mas neste artigo adotaremos, por simplificação, a representação moderna de separar os números por um traço (STRUIK, 1989).

Assim, por exemplo, frações, como $\frac{2}{5}$, eram escritas como $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; $\frac{3}{4}$ era escrita como $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ e assim por diante. Por simplicidade e para dirigir a nossa atenção para o método da falsa posição em si mesmo, descrevemos o raciocínio seguido pelos antigos egípcios evitando sua complicada notação de frações.

———————

De modo análogo ao problema acima discutido, o problema de número 24 do papiro Rhind, afirmava que: "Uma quantidade desconhecida acrescida de seu sétima, vale 19. Qual é esta quantidade?"

A solução pelo método da falsa posição é semelhante à do problema anterior. O escriba assume para o cálculo de "aha" a falsa posição 7. Tal escolha deve-se, como no caso anterior, à tentativa de evitar frações.

Uma vez operados os cálculos indicados no enunciado, o escriba obtém: $7+\frac{7}{7}=8$. Como o resultado deveria dar 19, a escolha tria sido evidentemente errada. A razão $\frac{19}{8}$, entre o resultado correto e o calculado deve ser a mesma que aquela existente entre o valor correto de "aha" e a falsa posição assumida. Logo, seria preciso multiplicar 7 por $\frac{19}{8}$ para obter-se o valor esperado da quantidade desejada (RESNIKOFF & WELLS, 1984).

Justificativa e Generalidade do Método da Falsa Posição

Acostumados que estamos com procedimentos simbólicos gerais, ficamos, por vezes, sentindo-nos meio que ludibriados pela marcante simplicidade do método da falsa posição na solução de problemas do primeiro grau. Por isso, esboçamos aqui uma forma simbólica mais geral de discutir as razoes de um tal procedimento dar certo, de ser algo geral a ser aplicado a problemas daquele tipo. É interessante observarmos, entretanto, que os antigos egípcios não trabalhavam com esse tipo de justificativa, nem tinham clareza da generalizada do método. Em algumas outras situações em que o método poderia ser igualmente aplicado, eles adotavam formas alternativas de operar. É preciso, portanto, explicitar porque o método funciona e a extensão em que ele pode ser tido como funcionando para todas as equações lineares ou apenas para o tipo mais simples $ax=b$.

Equações como $x+\frac{x}{4}=15$ e $x+\frac{x}{7}=19$ relativas, respectivamente, aos problemas 26 e 24 do papiro Rhind podem ser escritas modernamente como $ax=b$. Suponhamos, portanto, que a falsa posição escolhida x_0, não funcione. Logo: $ax_0=c$. O método indica que se multiplicarmos a falsa posição x_0 pela razão $\frac{b}{c}$, obteremos a resposta correta, ou seja que: $\left(\frac{b}{c}\right)x_0$ é a resposta correta. Em verdade, quando multiplicamos a equação por $\frac{b}{c}$, obtemos:

$\left(\frac{b}{c}\right)ax_0 = \left(\frac{b}{c}\right)c$, ou seja: $a\left(\frac{b}{c}\right)x_0 = b$

Portanto, se: $x = \left(\frac{b}{c}\right)x_0$, então: $ax = b$, ou seja $x = \left(\frac{b}{c}\right)x_0$ é a raiz da equação.

Em outras palavras, se:

$ax = b$ e $ax_0 = c$, temos que $\frac{a\times}{a\times_0} = \frac{b}{c}$, logo: $x = x_0\frac{b}{c}$

Este método é sempre valido para equações lineares escritas na forma $ax=b$. Entretanto, se tivermos $ax + d = c$, poderemos subtrair d de ambos os lados da igualdade, tal que: $ax = c - d$ e fazendo $c - d =$ b, teremos $ax = b.$

As Origens Históricas do Método da Falsa Posição

Um ponto que por muito tempo caracterizou um certo eurocentrismo na História da Matemática dói o de creditar a criação do método da falsa posição a Leonardo de Pisa, por volta do século XIII. Entretanto, os estudos da História Antiga, realizados ainda no século XIX, demonstraram o desacerto de uma tal perspectiva, fazendo remontar as origens de um tal método a fontes mais antigas e não européias.

É muito difícil traçar a origem exata do método da falsa posição. Tanto os autores quanto as datas de importantes documentos da História Antiga da Matemática são de atribuições bastante imprecisas. Certo é que tanto no antigo Egito quanto na China, o referido método era há muito conhecido, ainda que com denominações diversas e com distintas convicções quanto à sua validade e generalidade. Como já afirmamos acima, um dos documentos mais antigos que faz referencia ao método da falsa posição é o papiro de Rhind, compilado pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C. Esse texto, entretanto, é um relato de conhecimentos bem mais antigos e não da autoria de Ahmes. Fica, portanto, difícil precisar os verdadeiros autores das ideias ali expostas, assim como a época dos seus surgimentos.

Por outro lado, sendo o método da falsa posição, historicamente, um tipo de procedimento originalmente retórico, como de resto a própria Matemática egípcia, alguns têm relutado em aceitá-lo como parte integrante da Álgebra, vendo-o, apenas, como um pequeno caso de Aritmética aplicada.

Essa postura, entretanto, carrega também um viés ideológico eurocentrista defasado no tempo. Ela consiste em tomar como Álgebra apenas aqueles raciocínios expressos de uma forma completamente simbólica. Uma postura radicalmente oposta e bem mais aberta, do ponto de vista antropológico e cultural, é a de aceitar-se a história da Álgebra como dividida em três períodos: o retórico, o sincopado e o simbólico. Nesta perspectiva, o método da falsa posição pode ser encarado como um legítimo representante da primeira fase da história da Álgebra: a da Álgebra retórica, no qual, apesar da existência de símbolos utilizados para denotar quantidades e operações, o raciocínio utilizado, o desenvolvimento do processo de solução do problema, era completamente expresso em forma de prosa. A questão da aceitação ou não de raciocínios expressos de forma retórica como sendo uma Álgebra é marcadamente ideológica. Como assinala Joseph (1991) a transformação da Álgebra retórica para a simbólica, que marca um dos mais importantes avanços na Matemática, requereu duas importantes condições. A primeira foi o desenvolvimento de um sistema numérico posicional que permitiu escrever os números de forma concisa, trazendo, com isso, o desenvolvimento eficiente das operações. A segunda foi o aparecimento das práticas comerciais e administrativas que auxiliaram na adoção, não apenas de um sistema numérico, mas também de símbolos para representar os operadores.

Entretanto, se apesar de não possuir um Caráter simbólico, podemos pensar na existência de uma Álgebra egípcia, há ainda uma outra questão a ser devidamente considerada, ligada à consciência da justificativa e da generalidade dos raciocínios utilizados. Analisando as soluções de problemas, contidos nos papiros, envolvendo quantidades desconhecidas, observamos que elas eram, em principio, comparáveis com as nossas equações lineares. Contudo, os processos ali descritos são puramente aritméticos, ao tendo se constituído, nas mentes dos egípcios, em um assunto distinto, em uma verdadeira solução de equações e sem explicações do porque os métodos eram usados ou do porque eles funcionavam (KLINE, 1990). O método da falsa posição, na forma utilizada pelos antigos egípcios, ou seja, contido de forma não explicita no cálculo de “aha”, não chega, portanto, a se constituir exatamente em uma Álgebra. Isso se dá não pela simples falta de símbolos em seus raciocínios, mas pelo fato dos egípcios não terem estado em alerta para a justificativa e da generalidade daquele método adotado.

Caso tivesse havido essa consciência acerca da justificativa e da generalidade de seu método, poderiam ter sido os egípcios, efetivamente, os primeiros usuários de uma Álgebra retórica. Entretanto, a ausência dessa consciência no cálculo de “aha” para problemas tidos hoje como relativos às equações lineares, coloca os antigos egípcios apenas como legítimos precursores da Álgebra retórica.

A versão egípcia do método da falsa posição, implícito no calculo de “aha”, tem uma validade geral para a solução de equações lineares, mas isso não parece ter sido percebido pelos escribas, pois, tal método nem sempre é usado. Parece claro que eles não sabiam que o método sempre funcionaria ou, talvez acreditassem que outros métodos usados no papiro Rhind também fossem métodos gerais. De uma forma ou de outra, não pode ser dito que eles, realmente, compreendiam as equações lineares.

O simbolismo aparece, usualmente, como a única linha demarcatória existente na história da Álgebra, mas o estado de alerta quanto à justificativa e à generalidade dos processos matemáticos utilizados é tão importante quanto a forma adotada para representar a matematização dos problemas. Desta forma, faltou aos egípcios m sistema metódico geral para resolver equações lineares com uma incógnita, no mesmo sentido que lhes faltou, também, um sistema alfabético escrito. Apesar de possuírem um desajeitado sistema de escrita, este incluía todos os ingredientes para que um método de representação alfabética bem sucedido pudesse vir a ser desenvolvido. Da mesma forma, suas coleções de técnicas matemáticas particulares incluíam procedimentos que em sua essência, não percebida, eram gerais, para resolver equações lineares em uma incógnita. Embora tais procedimentos fossem efetivamente gerais, eles realmente nunca tiveram consciência de tal fato. Em nenhum dos casos, portanto, nem na escrita nem na Matemática, eles reconheceram que os seus sistemas incluíam, alem de técnicas especiais ou supérfluas, uma generalidade latente (RESNIKOFF & WELLS, 1984).

Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

A proto-Álgebra egípcia, se assim podemos conceituar parte de sua Matemática, foi também indubitavelmente retardada pelos seus métodos desajeitados de lidar com as frações. Os cálculos extensos e complicados com frações, fora do escopo de analise do presente trabalho, foram, assim, igualmente, uma das razões pelas quais os antigos egípcios nunca desenvolveram uma Aritmética ou uma Álgebra em um nível avançado (KLINE, 1990). Este ponto, porém, está fora do escopo de analise do presente trabalho.

Mesmo considerando que maior parte da Matemática egípcia tenha se constituído de uma Aritmética pouco cômoda, de uma proto-Álgebra ligada a problemas práticos e com aplicações às medidas de figuras geométricas (STRUIK, 1989), devemos, ainda assim, encará-los como os legítimos precursores de vários tópicos agora incluídos como assuntos da Álgebra escolar. Isso, certamente, é totalmente verdadeiro em relação aos problemas de "aha" (BUNT, JONES & BEDIENT, 1988)

Incertezas quanto a autores e datas de importantes documentos matemáticos, existem, também, relacionadas, com os antigos registros chineses a respeito do método da falsa posição. Este método aparece, por exemplo, na clássica obra chinesa intitulada "Nove Capítulos sobre a Arte Matemática", de autoria e data desconhecidas. Sabemos apenas que, por volta de 213 a.C., um matemático de nome Ch'ang Ts'ang coletou os antigos escritos matemáticos chineses existentes àquela época e parece haver editado os "Noves Capítulo...".

Há, contudo, uma tradição, sem evidências históricas muito consistentes, que admite ter sido esse texto originalmente preparado sob a direção de Chóu-Kung, que morreu em 1105 a.C. Tem sido ainda conjecturado que tal trabalho seria ainda mais antigo, datando do século 27 a.C. De toda forma, as evidências parecem efetivamente apontar para a existência dos conhecimentos contidos nos "Nove Capítulos..." em épocas bem anteriores ao ano 1000 a.C. (SMITH, 1958). O capítulo 7 desse importante documento matemático chinês é dedicado ao método da falsa posição, denominado, então, de "método do excesso e da deficiência". Os chineses referiam-se ao método, também, como a abordagem do: "assumindo que". Parece-nos relevante observarmos que com tais denominações, os matemáticos chineses em lugar de colocarem o foco de suas atenções no resultado final, na quantidade a ser calculada, como no caso da denominação egípcia do "calculo de aha", estavam enfocando o próprio processo envolvido na solução do problema. Ainda que retórico, um tal procedimento chinês, centrado no processo do calculo a ser efetuado e não apenas no resultado final, indica uma marcante diferença conceitual a ser devidamente considerada. Longe de constituir-se em uma mera questão semântica, a denominação chinesa do método da falsa posição sugere uma reflexão sobre a existência de uma tensão dialética entre os processos e os conteúdos envolvidos. A abordagem chinesa deste método, com o foco no processo, mesmo que desprovida de um simbolismo nos raciocínios, aproxima-se mais de um tratamento algébrico do que a abordagem egípcia. Em uma sequência cronológica, o método da falsa posição pode ser encontrado nos trabalhos do grande matemático grego Diofanto de Alexandria, por volta do ano 250 da nossa era, já então envolvidos em procedimentos algébricos sincopados, mesclando retórica com simbolizações.

Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

Entretanto, mais importante do que o simbólico adotado é o fato de encontrarmos presente em Diofanto, como de resto na matemática grega em geral, a ideia da necessidade da justificativa e da generalização. Ainda entre os gregos, encontramos, também, referencia ao método da falsa posição em alguns problemas contidos na influente "Antologia Grega", elaborada por Metrodorus, por volta do ano 500. Na sequência histórica, vamos encontrar este método exposto nos trabalhos de notáveis matemáticos árabes como Al-Khowarizm (c.810) e Abu Kamil (c.850), assim como entre matemáticos hindus, como o grande Bhaskaracharya (1114-1185), sucessor do não menos famoso Bramagupta (BOYER & MERZBACH, 1989).

A Matemática hindu tem uma história muito antiga, comparável à egípcia e à chinesa. Entretanto, o contato com a atitude grega diante da Matemática, na era Alexandrina, inaugura uma nova fase do pensamento matemático hindu. Por volta do ano 300, logo após a época de Diofanto, vamos encontrar na Índia um livro intitulado "Vaychali Ganit", de autoria de Sarvesh Srivasta, no qual cálculos matemáticos básicos já aparecem em notação decimal. Nele encontramos, também, referencias às frações e ao método da falsa posição aplicado a questões envolvendo compras e vendas.

Na primeira metade do século VII, Bhaskara I (600-680) já introduzia vários elementos simbólicos na construção de uma Álgebra capaz de lidar com grande número de problemas relacionados não apenas com equações lineares, mas, também, com algumas equações quadráticas e cúbicas.

Os séculos VII e VIII marcam o início da Matemática árabe. Por volta do ano 810, Al-Khowarizm escreve importantes trabalhos matemáticos sobre Aritmética, Álgebra, Geografia e Astronomia. Sua Álgebra, em particular, mesmo sendo essencialmente retórica, constitui um marco decisivo na historia da Matemática. A palavra Álgebra deriva do nome de seu texto *Hisab Al-jabr Wá-Mugabala,* que significa, literalmente, cálculos por completamento e balanceamento (ou restauração). O seu próprio nome é a fonte de origem da palavra algoritmo. As novas técnicas são utilizadas por Al-Khowarizm comparativamente com a utilização do método da falsa posição, então, denominado de *elchatayn*, em problemas lineares. Problemas concretos, que poderiam ser tidos como envolvendo equações lineares, haviam sido resolvidos, até então, por falsa posição, sem clareza, entretanto, da formulação de uma equação. A partir de Al-Khowarizm, esses problemas passam a ser efetivamente expressos e resolvidos, ainda que de forma retórica, em termos da ideia de equações lineares. Entretanto, é conveniente notarmos que a denominação de "equação" só viria a ser adotada muito posteriormente. É importante assinalarmos que Al-Khowarizm propiciou um enorme avanço à Álgebra, principalmente com a introdução do simbolismo, o seu trabalho situa-se a um passo atrás dos trabalhos de matemáticos anteriores hindus e mesmo do de Diofanto. Este é um caso típico que ilustra a "não-linearidade" do desenvolvimento da Matemática.

Por volta do ano 900, Abu-Kamil, legítimo sucesso de Al-Khowarizm, escreve o "Livro sobre a Álgebra", no qual estuda aplicações deste campo da Matemática a problemas geométricos. Foi através desse livro que o Ocidente veio, muito tempo depois, a tomar conhecimento inicial da Álgebra e em especial do método da falsa posição. Com efeito, Leonardo de Pisa, introdutor principal da Álgebra na Europa, viria a basear sua obra sobre o referido livro Abu-Kamil.

Antes de a Álgebra chegar na Europa, podemos observar os avanços da mesma entre os matemáticos hindus. Bhaskara II, também conhecido como Bhaskaracharya (1114-1185) ou Bhaskara, o professor sucessor de Bramagupta como astrônomo em Ujuin, escrever sobre Aritmética, Álgebra e Trigonometria esférica. Sua Álgebra é sincopada, não apenas retórica. Ela é quase simbólica, devido ao alto nível de uso do simbolismo assinalando um avanço sobre as obras de Bramagupta e dos matemáticos árabes. Entretanto, a versão árabe da Álgebra é que viria a ser transmitida inicialmente ao Ocidente, fazendo com que a história da Matemática apresente assim avanços e retrocessos em seu curso, naquilo que por vezes é denominado de um percurso dialético, não-linear. Em sua Álgebra, contida no seu livro intitulado *Lilavati*, o grande Bhaskara utiliza ainda o método da falsa posição conjuntamente com as novas técnicas introduzidas pelos árabes (Ball, 1960). Sua utilização, entretanto, já é de uma natureza crescentemente simbolizada.

A Álgebra só chegara à Europa após a morte de Bhaskara II, já no ano de 1202, através do célebre livro de Leonardo Fibonacci (1170-1240), também conhecido como Leonardo de Pisa, o *Liber Abacci*, ou *Livro dos Cálculos*, Traduzido, algumas vezes, de forma equivocada, como o *Livro do Ábaco,* é comum que se seja tentado a pensar tratar-se tal obra de um compêndio de regras de utilização do "ábaco", antigo instrumento oriental utilizado também nos cálculos. A mensagem, porém, do texto de Leonard de Pisa é realmente a missão de introduzir o sistema decimal, os algarismos arábico e as novas técnicas de Álgebra entre os comerciantes da Europa. O impacto deste importante livro no pensamento matemático europeu foi tremendo, ainda que não tenha ele se tratado de uma obra verdadeiramente original, mas da compilação de ensinamento dos árabes, dentre eles, o método da falsa posição. Aliás, é preciso que seja destacado que o método da falsa posição não é apresentado apenas como um pequeno conteúdo matemático a mais a ser conhecido.

Todo o capítulo 13 do *Liber Abacci* é dedicado a referido método, à forma como o mesmo havia sido usado desde a Antiguidade bem como à sua extensão da "dupla falsa posição" a qual não está sendo abordada neste presente artigo. Fibonacci, latinizando a denominação dada pelos árabes, intitula o método como: *De regulis elchatayn.* A apresentação da Álgebra no Líber Abacci é, contudo, ainda nitidamente retória. Ela não incorpora, neste sentido, os enormes avanços conferidos na segunda metade do século anterior por Bhaskara.

Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

Deve-se, entretanto, a Fibonacci uma contribuição semântica no simbolismo algébrico: a introdução, em latim, da corrutela da expressão árabe "El chatayn" de onde se originam os termos correspondentes nas várias línguas ocidentais da palavra "equação" (não dá ideia de equação, que é bem anterior). Esta palavra, no entanto, que muito depois viria a ser incorporada até os dias atuais na Matemática, passou uns 250 anos até tornar-se de uso generalizado entre os matemáticos. Também no campo semântico, a história da Matemática apresenta seus avanços e retrocessos, acima comentados (RESNIKOFF & WELLS, 1984).

Já em pleno Renascimento, Luca Pacioli (1494-1514), viria a dar sequência neste percurso histórico, através da escrita, em 1494, da sua famosa *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*. Este foi o primeiro livro impresso sobre Aritmética e Álgebra em todo o mundo. A multiplicidade de cópias tiradas deu a ele uma influência até então nunca vista em outra obra de Matemática. O livro está fortemente baseado nos trabalhos de Leonardo de Pisa e sua importância deve-se, em grande parte, à sua ampla circulação e à conseqüente influencia exercida. Muitas das soluções de problemas apresentadas por Pacioli são produzidas utilizando o método da falsa posição onde ele, encurtando a denominação dada por Fibonacci, intitula-o, simplesmente de *El cataym*. Este método ganhou, com o passar do tempo, várias denominações diferentes, até estabelecer-se, efetivamente, como o "método da falsa posição" nos trabalhos de Peletier (1549), Trechant (1566), Baker (1568) e Suevus (1593).

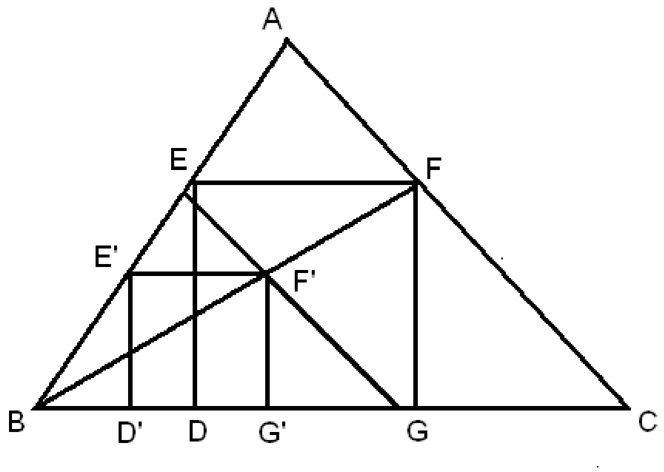
O Método da Falsa Posição e a Semelhança Geométrica

Como vimos acima, o método da falsa posição consiste, basicamente, em uma tentativa de resolver um problema matemático através da adoção inicial de uma solução provisória e conveniente a ser, posteriormente, modificada através de um raciocínio envolvendo proporções. Essa característica faz com que possamos, também, encontrar similaridades com certas soluções adotadas em alguns problemas geométricos envolvendo relações de semelhança. Esse tipo de abordagem utilizada na construção inicial de certas figuras geométricas recebe o nome de "método da similitude". Ele consiste na construção de uma figura, semelhante àquela desejada e obtenção mais simples. Uma vez obtida tal figura inicial, de forma a obter os requisitos da figura pretendida.

Tome-se como exemplo a tentativa de inscrever um quadrado DEFG em m dado triângulo ABC, conforme a figura abaixo, tal que o lado DG do quadrado repouse ao longo da base BC do triângulo.

Tomemos, inicialmente, um ponto qualquer D' sobre a base BC e tracemos o quadrado D'E'F'G', no qual E' está sobre BA e G' está sobre BC. O quadrado, assim obtido, é evidentemente menor do que aquele pretendido.

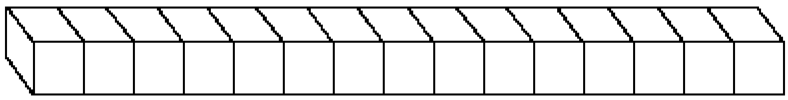
Utilizando, entretanto, relações de proporção, podemos ampliar um tal quadrado proporcionalmente em direção à figura pretendida. Para isso, utilizamos o ponto B como um centro de similitude e ampliamos o quadrado D'E'F'G' até que o mesmo atinja o tamanho apropriado pela projeção de F' em F sobre AC etc. (EVES, 1958).



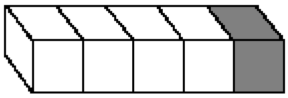
Visualizando o Método da Falsa Posição com Materiais Concretos

O método da falsa posição pode ser visualizado, no ensino da Matemática, com o uso de materiais concretos. Para ilustrar esta possibilidade, tomemos como exemplo o problema 26 do papir de Rhind, já discutido anteriormente. Em termos simbólicos, ele equivale a resolver a equação: $x + \frac{1}{4}x = 15$. Vejamos como proceder, por exemplo, utilizando barrinhas Cuisenaire para expor a solução de tal problema por falsa posição:

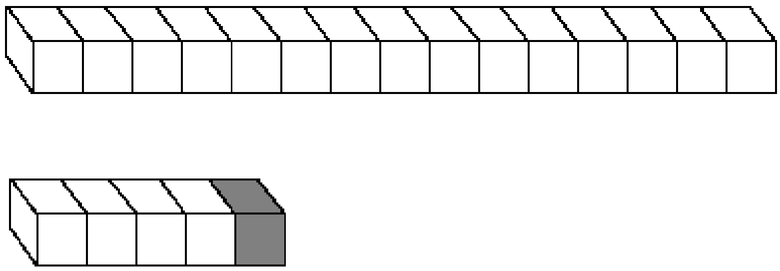
Tomamos, de início, uma disposição de 15 cubos alinhados, para representarmos o valor da soma total.



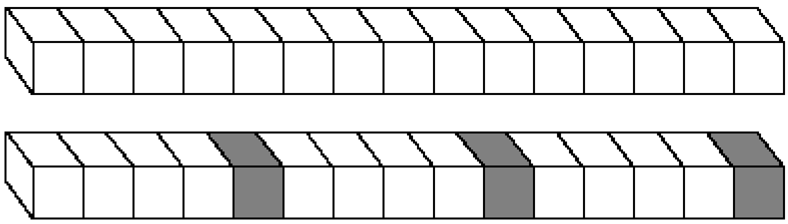
Em seguida, tomamos uma sequência de quatro cubos alinhados, para representar a quantidade desconhecida e acrescentamos a tal sequência $\frac{1}{4}$ desta mesma sequência para representar a soma $\times + \frac{\times}{4}$.



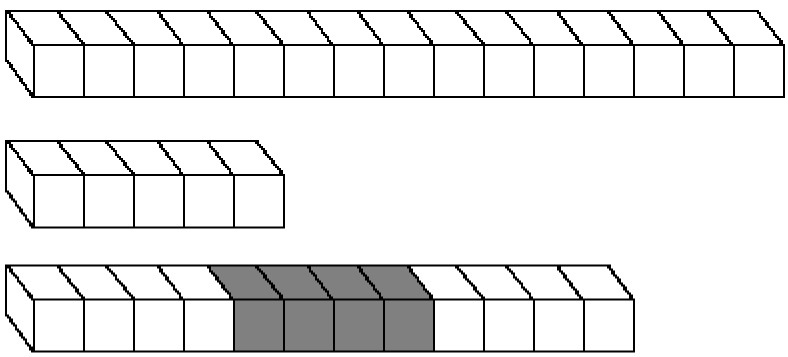
Colocamos, agora, lado a lado, as duas sequências de barrinhas: a solução tentativa obtida por falsa posição (barra menor) e a solução correta (barra maior). Um simples exame visual deixa transparente o desacerto da quantidade escolhida.



A comparação das barras mostra, também, que a soma obtida por falsa posição (barra pequena) é 3 vezes menor do que o valor correto desta soma (barra maior).



Deste modo, a falsa posição escolhida (sequência inicial de quatro cubinhos) deve ser igualmente três vezes maior para obtermos a solução desejada. Tal solução desejada (12) é representada na figura acima, em termos do mesmo material concreto até então utilizado.



Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

Certamente, este exemplo não se constitui em uma demonstração da generalidade do método em causa. Além disso, a "visualização" do processo possibilitada pelas barrinhas, no exemplo tratado, é uma decorrência do fato da razão entre a falsa posição e a resposta correta ser um número inteiro. Em casos mais complicados, este artifício não seria aplicável. Ainda assim, entretanto, como um caso ilustrativo particular, uma visualização deste tipo pode ter o seu valor pedagógico: o de der algo análogo a um trampolim para que um salto heurístico possa ser efetuado com maior segurança, posteriormente.

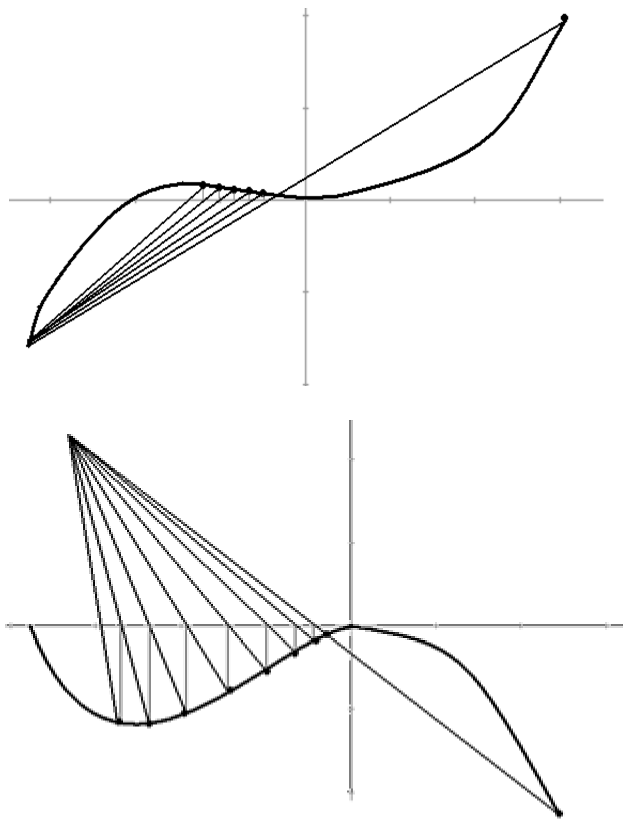
O Método da Falsa Posição e a Geometria Analítica: As Aproximações Iterativas

Não apenas nas apresentações mais elementares podemos encontrar boas visualizações do método da falsa posição. Também nos processos iterativos utilizados no Cálculo Numérico para a resolução de equações podemos encontrar formas de visualizações propiciadas pela Geometria Analítica. A título de ilustração, observemos o princípio subjacente a uma tal abordagem com o auxílio da representação gráfica das funções. Para começarmos, caberia lembrarmos que uma iteração algébrica consiste em um processo de resolução de uma equação baseado em uma repetição de várias tentativas, no qual adotamos uma sequência de operações em que o objeto de cada uma é o resultado da que a precede.

Os métodos iterativos de resolução de equações não-lineares consistem na construção de uma série de soluções aproximadas x_1, x_2, ... , x_n, x_{n+1}, de uma equação dada $f(x) = 0$. Eles são conteúdos usuais em cursos de cálculo numérico e de fundamentos de computação. (LOURENÇO, 2002; ABRAMOWITZ & STEGUN, 1972; PRESS, FLANNERY, TEUKOLSKY & VETTERLING, 1992). Cabe salientarmos que é impossível prever, logo de início, se o método converge para uma solução aproximada da equação não-linear. A situação fica mais simples se conhecermos um intervalo no qual a função mude de sinal, pois isso é uma indicação de que a mesma cruz o eixo das abscissas, ou seja, uma indicação de que ta função apresenta raízes naquele intervalo. Deste modo, se conhecermos dois pontos a e b que satisfaçam a condição e que $f(a).f(b) < 0$, será possível garantir a convergência assim como também o número máximo de iterações requeridas para estimar a precisão desejada.

Como não há nenhum algoritmo geral capaz de determinar a solução num tempo finito, devemos frequentemente aceitar soluções aproximadas como substituição aos métodos algébricos clássicos. Apesar de fixarmos nossa atenção no método da falsa posição, é preciso assinalarmos que há várias formas de procedermos por iteração na busca das soluções de equações não-lineares e que elas podem ser agrupadas, de um modo geral, em métodos de intervalo e em métodos abertos. A abordagem mais simples baseada no método da falsa posição enquadra-se dentro dos métodos de intervalo assim como outras, tais como o método da bissecação, o método da falsa posição modificada e o método de Muller. Métodos abertos, mais complexos, por seu lado, incluem abordagens como o método da secante, o método de Newton, o método de Richmond, o método das substituições sucessivas e método de Steffensen, todos fora do escopo de análise do presente trabalho.

O método iterativo da falsa posição consiste em um algoritmo para encontrar raízes que utiliza o ponto onde uma aproximação linear da função dada cruza o eixo das abscissas como partida para a próxima iteração, mantendo o mesmo ponto inicial para cada iteração a ser procedida, conforme ilustra a figura abaixo.



Expressando a aproximação linear da função dada em termos da equação de uma reta que passa por dois pontos, podemos escrever:

$$y - y_1 = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_1)}{x_{n-1} - x_1}\,(x_n - x_1)$$

com y = 0. Usando $y_1 = f(x_1)$ e resolvendo para x_n, temos a seguinte forma para iteração pretendida:

$$x_n = x_1 - \frac{x_{n-1} - x_1}{f(x_{n-1}) - f(x_1)}\, f(x_1)$$

A junção, portanto, da Geometria Analítica ao método da falsa posição dá ao mesmo um novo contexto de validade, ampliando a sua capacidade de utilização na resolução de equações.

Conclusões

Ainda que o espectro de visualizações do método da falsa posição, coberto neste artigo, seja amplo o suficiente para abarcar desde as apresentações mais elementares àqueles envolvendo processos iterativos mais complexos, o verdadeiro foco da nossa atenção concentrou-se na utilização do referido método, em as forma mais elementar, como um potente recurso pedagógico no ensino introdutório da Matemática. Dessa forma, podemos concluir que embora não seja o referido método, em sua forma mais simples, nenhum substituto para a resolução algébrica simbólica e moderna de equações e de sistemas de equações, ele se constitui, certamente, em um precioso trampolim para iniciarmos o salto em direção a um estudo mais formalizado. A grande vantagem da abordagem conferida pelo método da falsa posição como elemento inicial do processo de ensino das equações consiste no seu potencial exploratório, na porta que deixa aberta para o desenvolvimento da intuição. Dentro deste quadro, de tomar o método da falsa posição como um elemento introdutório no ensino das equações, impõe-se a necessidade de trabalharmos com os estudantes as imagens do mesmo, provenientes de suas associações com materiais concretos e com figuras geométricas.

A ideia de assumir um valor tentativo para uma quantidade desconhecida para em seguida corrigi-lo com o auxílio de uma simples proporção, como em uma regra de três, tornar-se-ia, desde o século XVI, um conhecimento obrigatório a ser ensinado nos cursos elementares de Matemática; Essa tradição de ensinar o método da falsa posição carregava, implicitamente, boa parte da historia da construção do conhecimento algébrico e durou até muito recentemente. Reformas pedagógicas, de orientações questionáveis, entretanto, retiraram dos currículos elementares de Matemática o ensino do referido método. Mesmo boa parte dos professores atuais parece simplesmente ignorar, por completo, a existência do mesmo.

Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

Esquecendo todo o passado do referido método, preferiram alguns educadores ignorar essa tradição, encarando-o, talvez, como uma mera técnica matemática totalmente superada e cujo ensino não levaria a lugar nenhum. Ainda que aceitássemos tão esdrúxula assertiva, precisaríamos assinalar que mesmo se fosse verdade que o método da falsa posição não pudesse nos levar mais a lugar nenhum, restaria, ainda assim, o reconhecimento de que ele, no campo da Matemática, já nos trouxe de muito longe.

O significado histórico do papel desempenhado pelo método da falsa posição na construção da Álgebra está ligado ao exercício de um pensamento intuitivo que sempre antecede as formalizações. Entretanto, a exclusão de um ta estudo do ensino elementar pode contribuir para uma certa atrofia do desenvolvimento do raciocínio exploratório.

Tendo em mente uma perspectiva histórica da produção do conhecimento, só depois de explorar as intuições é que deveriam ser feitas mecanizações de procedimentos via uma simbolização mais rigorosa das abordagens matemáticas. Resgatar, portanto, o potencial heurístico contido no estudo do método da falsa posição parece um desafio a ser encarado por todos aqueles educadores que vêem no ensino da Matemática algo bem maior e mais prazeroso que um mero repassar de técnicas e procedimentos mecânicos.

Referências

ABRAMOWITZ, M & STEGUN, C.A. (Ed.). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dovers Publications, 1972.

BALL, R.W. A short account of the history of mathematics. 2.ed. New York: Dovers Publications, 1960.

BOYER, C.B. & MERZBACH, U.C. A history of mathematics. 2.ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

BUNT, L; JONES, P; BEDIENT, J. The historical roots of elementary mathematics. 2.ed. New York: Dover Publications, 1988.

COLLETE, J.P. Historia de las matematicas. 2.ed. Cidade de México: Siglo Ventiuno Editores, 1986.

EVES, H. On the practicality of the rule of false position. Mathematics Teacher, Syracuse, v.51, p.606-608, 1958.

JOSEPH, G. The crest of the peakcock: non_european roots os mathematics, I.B.London: Tauris & Co Ltd. Publishers, 1991.

Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

KLINE, M. Mathematical thought from ancient to modern times. 2. Ed. Oxford: Oxford Universiy Press, 1990. V.1

LOURENÇO, V. Resolução de equações não lineares. Coimbra: Departamento de Engenharia Química da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra.
Disponível em: http://WWW.eq.uc.pt/~bufig3/eqnaolineares.htm. Acesso em: 2 mar.2002.

LUMPKIN, B. From Egypt to Benjamin Banneker: African Origins of False Position Solutions. Vita Mathematica, Toronto, ON, 192.

MEDEIROS, A. & MEDEIROS, C. Materiais manipulativos na compreensão do algoritmo russo da multiplicação. In: ENCONTRO PERNAMBUCANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 1999. Recife. Atas... Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1999.

PRESS, W.O. *et al.* Secant method, false position method, and Ridders' Method. § 9.2 in numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing. 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. P.327-352.

RESNIKOFF, H.L. & WELLS JR, R.O. Mathematics in civilization. 2.ed. New Yor: Dovers Publications, 1984.

SMITH, D.E. History of mathematics. New York: Dovers Publications 1958.

STRUIK, D.J. História concise das matematicas. Lisboa: Gradiva, 1989.

Ciência & Educação, v.10, n.3, p.545-557, 2004.

Expansão em frações unitárias

Teorema (James Sylvester[1]) (1808): "Qualquer fração própria $\frac{a}{b}$ pode ser escrita como uma soma de frações unitárias distintas."

Demonstração (por indução sobre o valor do numerador) :

Para a=1, $\frac{a}{b}=\frac{1}{b}$ *(V)*

Suponhamos a>1 e que toda fração própria com numerador menor do que <u>*a*</u> *possa ser escrita como a soma de frações unitárias distintas (hipótese de indução).*

Seja $\frac{1}{q}$ *a maior fração unitária tal que* $\frac{1}{q}<\frac{a}{b}$ $\left(\leftrightarrow \frac{b}{a}<q\right)$. *Logo* $\frac{1}{q}<\frac{a}{b}<\frac{1}{q-1}$.*Daí, da desigualdade* $\frac{1}{q}<\frac{a}{b}$ *obtemos* $0<\frac{a}{b}-\frac{1}{q}=\frac{aq-b}{bq}$ *e, portanto,*$aq-b>0$ *(pois* $bq>0$*), da desigualdade* $\frac{a}{b}<\frac{1}{q-1}$, *obtemos* $a(q-1)<b \leftrightarrow aq-b<a$ *com* $q-1>0$*. Consequentemente,* $0<aq-b<a$.

Como $\frac{a}{b}=\frac{1}{q}+\frac{aq-b}{bq}$ *e, pela* <u>*hipótese de indução*</u>*, a fração própria* $\frac{aq-b}{bq}$*(*), com* $aq-b<a$*, pode ser escrita como uma soma de frações unitárias distintas onde nenhuma delas é* $\frac{1}{q}$*(**).*

---

[1] *Inglês – 1814 à 1897.*

(*) $\frac{aq-b}{bq}$ *é uma fração própria.*
Suponhamos por absurdo que $aq-b>bq$.
Daí, com $b>a>aq-b>bq,\quad b>bq$. *O que é falso pois* $b,q \in \mathbb{Z}_{+}$.

(**) Temos que $\frac{aq-b}{bq}<\frac{1}{q}$*, pois, com* $\begin{cases} 0<\frac{a}{b}<1 & (1) \\ a>aq-b & (2) \end{cases}$ *,*

De (2), $\frac{a}{bq}>\frac{aq-b}{bq}$*, e de (1),* $\frac{a}{bq}<\frac{1}{q}$*. Logo,* $\frac{1}{q}>\frac{a}{bq}>\frac{aq-b}{bq}$ *e, consequentemente,* $\frac{1}{q}>\frac{aq-b}{bq}$.
Assim, se $aq-b=1$ *temos a fração própria* $\frac{1}{bq}\left(<\frac{1}{q}\right)$*. Por outro lado, se* $aq-b\neq 1$*, da fração própria* $\frac{aq-b}{bq}$ *vamos considerar* $\frac{1}{p}$ *a maior fração Unitária tal que* $\frac{1}{p}<\frac{aq-b}{bq}<\frac{1}{q}$*. Daí, retomamos o raciocínio inicial.*

A Matemática na Mesopotâmia

Os estudos relativos à vida do homem, nas suas origens, permitem afirmar que a partir de 5000 a.C. houve migrações de grupos humanos para as margens dos rios Nilo, Tigre e Eufrates (região que se chamou de "crescente fértil"). A matemática aparece através de farta documentação com realce na cultura desses povos que se instalaram na região denominada Mesopotâmia (do grego meso pótos - entre rios (Tigre e Eufrates)) (aproximadamente o que é hoje o Iraque), da qual se destaca a cidade denominada Babilônia.

A cultura matemática babilônia (*) caracteriza-se pelo grande número de documentos, com uma criação de caráter bem definido cujo valor se alicerça através de um sentido de ordem e de método que lhes dá um caráter cientifico. Esses documentos, pode-se situá-los em torno de 2000 a.C. Dispomos de milhares de tabuletas (tabletas) de argila seca contendo textos matemáticos. Os textos das tabletas eram escritos sobre a argila úmida e secas a sol. Elas são de três tipos:

1) Tabletas contendo tabelas de cálculo só contendo dados numéricos;
2) Tabletas contendo um texto enunciando um problema de matemática seguido de cálculos que levam a sua solução;
3) Tabletas com exercícios redigidos para escolares babilônios, com o intuito aparente de motivá-los. Alguns desses exercícios têm a característica de serem artificiais, isto é, com ausência de realismo do contexto.

(*) Ao se referir à matemática babilônia, quer-se dizer o tipo de matemática cultivada na Mesopotâmia. O termo "babilônio/a" é usado aqui em um sentido mais amplo do que o costumeiro nos relatos de história do Oriente Próximo, nos quais este termo se refere ao estudo em torno da cidade da Babilônia (que foi o maior centro de atividade cultural da Mesopotâmia).

Aritmética e álgebra babilônias

Os fragmentos históricos nos permitem concluir que os babilônios dispunham de um sistema de numeração posicional (*) (que tornou os babilônios excelentes calculistas), oriundo de processos de contagem, com as seguintes características:

- O sistema era sexagesimal (base 60) (o mais antigo sistema de posição que se conhece). Era utilizado nos textos matemáticos e astronômicos.
- Eles elaboraram tabelas para efetuar adições, multiplicações e calcular inversos multiplicativos.
- Seu sistema numérico sexagesimal lhes permitiu calcular valores para raízes quadradas com a aproximação tão boa quanto desejassem através de um algoritmo recursivo.
- Os fragmentos evidenciam que os babilônios possuíam uma álgebra "retórica", que lhes permitiu resolver certos tipos de equações quadráticas, cúbicas e biquadráticas.

Nota: 1) sistema posicional – o valor de cada símbolo numérico depende do seu lugar relativo número escrito.
Vantagens – torna mecânicas as operações fundamentais e permite exprimir todos os números qualquer que seja sua grandeza.

2) A origem do sistema sexagesimal não pode ser definida com certeza. Uma explicação plausível seria a utilização de um sistema de pesos cuja unidade principal era subdivida em 60 unidades. Em todo caso este era um sistema bastante adequado ao estudo da Astronomia.

(*) *A história da matemática e a arqueologia fazem conhecer uma grande variedade de "sistemas de numeração". O propósito inicial desses sistemas é vincular a cada inteiro positivo individual (até um limite que depende das necessidades da vida cotidiana) um nome e uma representação escrita, formadas de combinações de uma quantidade restrita de símbolos, se efetuando segundo leis mais ou menos regulares.*

O procedimento mais frequente consiste em decompor os inteiros (positivos) em somas de "unidades" sucessivas b_1, b_2, ... , b_i , ... onde cada uma é um múltiplo inteiro da precedente; em geral $\frac{bi}{b_{i-1}} = b$ a "base" do sistema. Quanto à escrita correspondente, ela deve indicar o número de "unidades" b_i de cada ordem i; em muitos sistemas os múltiplos sucessivos k b_i , onde $k = 1, 2, \ldots, \frac{bi}{bi+1} - 1$, são designados por símbolos que dependem ao mesmo tempo de k e de i. Um importante progresso consiste em designar todos os números kb_i (para o mesmo valor de k) pelo mesmo símbolo: é o principio do "sistema de numeração posicional", onde o índice i é indicado pelo fato que esse símbolo representando k b_i aparece na i-ésima posição na sucessão "das partes" que constituem a quantidade representada.

Aritmética babilônia

Sistema de numeração

- Há dois signos: 1 (▼) e 10 (❬)

- Há 59 "algarismos", escritos por justaposição do 1 e do 10, tantas vezes quantas necessárias (numeração decimal aditiva).

- A numeração obedece a um princípio de posição na base 60. Assim, em notação, temos:

$$(a_n; a_{n-1}; \ldots; a_1; a_0)_{60} = a_n \times 60^n + a_{n-1} \times 60^{n-1} + \ldots + a_1 \times 60 + a_0 = (a)_{10},$$

onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \{1,2,\ldots,59\}$

Exemplos:

1) $3;20;19 = 3 \times 60^2 + 20 \times 60 + 19 = (12019)_{10}$
2) Escrever o número $(5147)_{10}$ na forma babilônia

Observemos inicialmente que $60^2 < 5147 < 60^3$.

A seguir calculamos quantas vezes o 60^2 está contido em 5147. Basta dividir 5147 por $60^2 = 3600$, o que nos dá $5147 = 1 \times 60^2 + 1547$.

Prosseguindo, calculamos quantas vezes 60 está contido em 1547, obtendo $1547 = 25 \times 60 + 47$.

Temos então:

$(5147)_{10} = 1 \times 60^2 + 25 \times 60 + 47 = 1;25;47$

<u>**Exercício:**</u> Converta para a numeração decimal ou babilônia, conforme o caso:

a) 23;2;34
b) 11;55;43;20
c) 674598
d) 10439546

Para efetuar as operações de adição e multiplicação, primeiro converta os números para a base 10, faça os cálculos e depois retorne o resultado à notação "babilônia".

Obs.: Os babilônios obviamente operavam diretamente no sistema deles. A adição se fazia normalmente como no sistema decimal. A multiplicação era efetuada recorrendo-se a tabelas construídas provavelmente a partir de adições sucessivas.

Exercício: Efetue:

a) 3;45 x 1;54
b) 5;18;9 + 1;13

Inversos, números regulares em base 60, divisão

Nota: Eventualmente, para efetuar as operações de adição e multiplicação e as operações de inversão e de divisão, converta os números para a base 10, faça os cálculos e depois retorne o resultado à notação babilônia.

Def.: Dois números formam um par de inversos se o seu produto é 1 (ou qualquer potência de 60 : 60^n, $n \in \mathbb{Z}_+$).

Exemplos:

a) 30 é o inverso de 2, pois 2 x 30 (=60) = 1
b) 7;30 é o inverso de 8, pois 8 x 7;30 (=60²) = 1
c) 44;26;40 é o inverso de 1;21, pois 1;21 x 44;26;40 = 1

Notação: Utilizaremos a seguinte convenção para numeração de posição de inversos:

$$(0.a_1, a_2, a_3, \ldots)_{60} = a_1 \times 60^{-1} + a_2 \times 60^{-2} + a_3 \times 60^{-3} + \ldots a_0 = (a)_{10},$$
$$\text{onde } a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{1,2, \ldots , 59\}$$

Obs.: As vezes a sequência dos a_n's não é finita. Diz-se que tal número não tem um desenvolvimento finito na base 60.

Def.: Um número é regular na base 60 se ele tem um inverso que possui um número finito de dígitos na representação posicional.

Obs.: A explicação atual (a partir do Teorema Fundamental da Aritmética) é que a expansão em potências negativas de 60 do inverso de um número é finita se, e somente se, sua decomposição em fatores primos só contém fatores da forma 2^a, 3^b, 5^c com a,b,c $\in \mathbb{Z}_+$

Dizendo em outro modo:

Quando é que uma fração $\frac{p}{q}$, mdc (p,q)=1, tem desenvolvimento finito em um sistema numérico de base b?

Quando ela pode ser transformada em uma fração com o denominador b^n. Isto é possível se o denominador q contiver somente fatores primos que também aparecem em b^n e portanto em b.

Exemplos:

1) 8 é um número regular.

De fato, inicialmente vemos que $8 = 2^3$, ou seja a decomposição de 8 tem somente o fator da forma 2^a, $a = 3 \in \mathbb{Z}_+$.

Daí, podemos escrever:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} \times \underbrace{\frac{3 \times 5}{3 \times 5}}_{=\,30} \times \underbrace{\frac{2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 5}}_{=\,30} =$$

$$\frac{3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 30 \times 2 \times 30} = \frac{450}{60^2} = \frac{7 \times 60 + 30}{60^2} = \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2} =$$

$$= 7 \times 60^{-1} + 30 \times 60^{-2} =$$

$$= 0.7,30$$

(número finito de dígitos na representação posicional)

2) 7 não é um número regular

Observemos inicialmente que 7 é um número primo que não aparece na decomposição de 60. Assim, o raciocínio do exemplo (1) não pode ser aplicado aqui. Vamos com isso mostrar que o desenvolvimento não é finito.

De fato, pois:

$$\frac{1}{7} = \frac{60}{7 \times 60} = \frac{\frac{60}{7}}{60} = \frac{8 + \left(\frac{4}{7}\right)}{60} = \frac{8}{60} + \frac{\frac{4}{7}}{60} = \frac{8}{60} + \frac{\left(\left(\frac{4}{7}\right) \times 60\right)}{60^2} =$$

$$= \frac{8}{60} + \frac{\frac{240}{7}}{60^2} = \frac{8}{60} + \frac{34 + \left(\frac{2}{7}\right)}{60^2} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{\frac{2}{7}}{60^2} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{\left(\frac{2}{7}\right) \times 60}{60^3} =$$

$$= \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{\frac{120}{7}}{60^3} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17 + \left(\frac{1}{7}\right)}{60^3} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17}{60^3} + \frac{\frac{1}{7}}{60^3}$$

É evidente que esse desenvolvimento se reproduz indefinidamente de forma periódica. Daí,

$$\frac{1}{7} = 0.8, 34, 17, 8, 34, 17, \ldots$$

Exercício:

1) Mostre que 11 não é um número regular.
2) Determine os números regulares na base 60 entre 1 e 59.

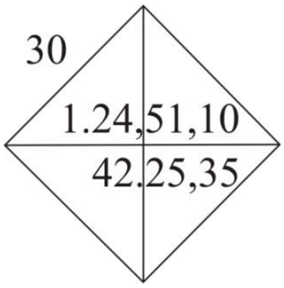
Comentário: A utilização da tabela de inversos pelos babilônios (valores de $\frac{1}{n}$ para diferentes valores de *n* expressos no sistema sexagesimal) permite reduzir a operação de divisão a uma multiplicação:

$$\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n}$$

Exercício: Calcule a divisão de 47 por 8.

<u>Valores aproximados na matemática babilônia</u>

- Aproximação para $\sqrt{2}$ (tableta YBC (Yale Babilonian Collection) 7289 - cerca de 1200 anos antes da época em que Pitágoras viveu ↔ ~1800 a.C.)



Esta tableta mostra que os babilônios sabiam que a diagonal de um quadrado é $\sqrt{2}$ vezes seu lado. Trata-se, provavelmente, de um exercício escolar que emprega uma aproximação para $\sqrt{2}$.

De fato, pois

$\frac{42.25,35}{30} = 1.24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,414212963\ldots$ que é muito próximo de $\sqrt{2}$ no sistema decimal.

- Raízes quadradas.

O método babilônio de extrair raízes quadradas é eventualmente chamado de "método de Herão" devido a <u>Herão de Alexandria</u> (século I d.C.) que o incluiu em sua "Métrica"$^{(*)}$. Essencialmente ele é o seguinte:

Seja x_1 o maior inteiro menor do que $\sqrt{R}$, onde R não é um quadrado perfeito. Para n=2,3... , use a <u>fórmula de</u> recorrência $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{R}{x_n}\right)$. Então x_1, x_2, x_3, ... é uma sequência de aproximação cada vez melhores para $\sqrt{R}^{(**)}$.

<u>Exemplo:</u> Calcular $\sqrt{2}$ *(R=2)*

$x_1 = 1 < \sqrt{2} < 2$
$x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1,5$

(*) em grego <u>Metriquê</u>. Esta obra compreende três livros sobre as diferentes maneiras de medir.
(**) Se R é um número quadrado, x_1 é a própria raiz menos um, e a sequência ainda assim convergirá para a raiz. É claro que este método é realmente útil para os casos nos quais R não é um número quadrado.

$$x_3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \cong 1,\underline{41}6666$$
$$x_4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{17}{12}+\frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408} \cong 1,\underline{4142}15$$
$$x_5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{577}{408}+\frac{2}{\frac{577}{408}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{577}{408}+\frac{816}{577}\right) = \frac{665857}{470832} \cong 1,\underline{414213}$$

e assim por diante, dependendo do grau e precisão desejado. Com isso,

$$1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \dots$$

é uma sequência de aproximações cada vez melhores para $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

<u>Obs.:</u> Este algoritmo é <u>quadraticamente convergente</u>, isto é, o número de dígitos corretos dobra a cada iteração.

<u>Exercício:</u> Verifique que esse método é um caso particular do <u>método (de iteração) de Newton</u> tomando $f(x) = x^2 - R$, onde R é o radicando na raiz quadrada a ser aproximada.

<u>Nota</u>1) Newton$^{(*)}$ descobriu um procedimento para aproximar os valores das raízes reais de equações algébricas. Esse procedimento que se conhece por *Método de Newton*$^{(**)}$ diz o seguinte, nesta sua variante:

$^{(*)}$Isaac <u>Newton</u> – inglês 1645 à 1727

$^{(*)}$De fato, <u>Método de Newton-Raphson</u>. Método introduzido por Newton em 1669 e depois simplificado por seu compatriota Joseph <u>Raphson</u> (1648 à 1715) em 1690. Raphson, igualmente como Newton considerou o método como puramente algébrico e restringindo sua utilização às equações polinomiais. Entretanto, em lugar de considerar como Newton, que afinava a aproximação de uma raiz através de uma <u>sequência de equações polinomiais</u>, ele colocou em evidência um <u>cálculo recursivo</u> de aproximações sucessivas da raiz na mesma equação polinomial. Somente em 1740 que Thomas <u>Simpson</u> (inglês – 1710 à 1761) descreve este método de cálculo iterativo utilizando derivada.

Obs.: Newton expôs seu método com um único exemplo:

Seja resolver a equação polinomial $x^3-2x-5=0$ e seja 2 um valor que difere da raiz por uma diferença pequena ($2^3-2(2)-5=8-9=1$). Fazendo $x=2+p$, tem-se $(2+p)^3-2(2+p)-5=p^3+ +6p^2+10p-1=0$. Desprezando os termos de graus 3 e 2 por serem pequenos, vem $10p-1=0 \leftrightarrow p= \frac{1}{10}= 0,1$. Fazendo agora $p=0,1+q$, tem-se $(0,1+q)^3+6(0,1+q)^2+10(0,1+q)-1 = q^3+6,3q^2+11,23q+0,061=0$. Desprezando de novo os dois primeiros termos por serem pequenos, vem: $11,23q+0,061=0 \leftrightarrow q=-0,0054$. Seja agora $q=-0,0054+r$. Daí, levando-o na terceira equação tem-se $(-0,0054+r)^3+6,3(0,0054+r)^2+11,23(-0,054+r) + 0,061=0$. Após os desenvolvimentos necessários e eliminando os dois primeiros termos, chega-se a: $11,16196r + 0,000541708=0 \leftrightarrow r=-0,00004853$. Finalmente, $x=2+0,1+(-0,0054)+(-0,00004853) = 2,09455147$ (valor exato até a sétima casa decimal). Raphson melhorou o método acima não utilizando as transformações das equações, ou seja, a sequência das equações. No exemplo de Newton, depois de ter obtido $p=0,1$, substituiu na equação original $x=2+0,1+q= 2,1+q$ e obteve $q=- 0,0054$. Substitui então $x=2,1+(-0,0054) + r = 2,0946+r$ na equação original, e assim sucessivamente de forma recursiva.

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável e tal que $f(x) = 0$ tem uma única raiz real em $]a,b[$, ($f(a).\ f(b) < 0$) com $f'(x)$ conservando o sinal em $]a,b[$. Chamemos de r essa raiz. Seja x_1 uma primeira aproximação para r. A reta tangente t_1 ao gráfico de f em $(x_1, f(x_1))$ tem por equação

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Sua interseção x_2 com o eixo Ox satisfaz

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)\ (x_2 - x_1)$$

Logo,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \text{(segunda aproximação)}$$

desde que $f'(x_1) \neq 0$.

A reta tangente t_2 que passa por $(x_2, f(x_2))$ tem por equação

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

Sua interseção x_3 com o eixo Ox satisfaz

$$0 - f(x_2) = f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

Logo,

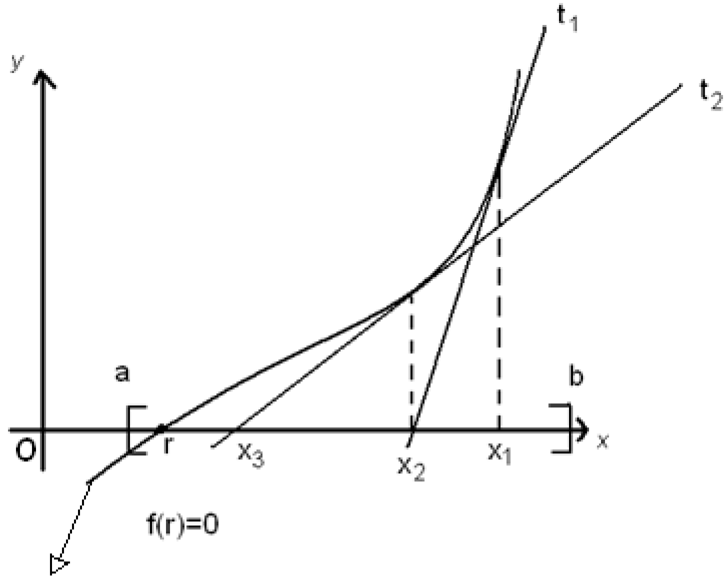
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad \text{(terceira aproximação)}$$

Desde que $f'(x_2) \neq 0$ e assim sucessivamente. A fórmula de recorrência é

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ ,\quad n=1,2,3...$$ (sendo x_n uma aproximação temos a (n+1)-ésima aproximação)

com $f'(x_n) \neq 0$.

A figura a seguir mostra a geometria que caracteriza o Método de Newton.



Este procedimento de iteração consiste em usar as retas tangentes ao gráfico de f para obter aproximação para a raiz r.

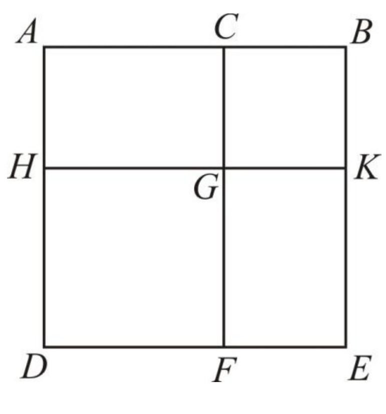
Observemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para r, isto é, $\lim_{n\to+\infty} x_n = r$

gráfico de f

<u>Nota</u> 2) O pensamento recursivo é uma forma de pensar algorítmica, pois segue sistematicamente passos pré-determinados para a solução de um problema. No entanto, há uma distinção entre o pensamento recursivo e o pensamento algorítmico tradicional: seu caráter <u>auto-referencial</u>. Em um processo recursivo <u>cada passo depende dos passos que o precedem</u>. De fato, ele é <u>iterativo</u> e <u>auto-referencial</u>.

<u>Nota 3) Provável procedimento geométrico utilizado pelos babilônios que caracteriza este raciocínio recursivo para calcular valores aproximados de raízes irracionais</u>

Inicialmente, vê-se que calcular $\sqrt{R}$ é achar um quadrado de área R. Assim, como forma de uma primeira aproximação, pode-se pensar em colocar nesse quadrado um outro quadrado com lado conhecido ($\Leftrightarrow \sqrt{R} \simeq$ lado desse outro quadrado) e, em seguida, utilizar o seguinte resultado geométrico:



□ABED = □HGFD + □CBKG + 2 □ACGH

Fazendo *m(AC)=a*, *m(CB)=b*, tem-se a versão geométrica da igualdade $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Daí, se <u>*a* é o lado conhecido</u> do quadrado obtém que a raiz de *R* é $a+b$. Para achar <u>uma raiz melhor do que *a*</u>, precisa-se então procurar uma boa aproximação para *b*. Isso pode ser feito considerando a área da região *ABEFGH.* Esta área é igual a $R-a^2$, que por sua vez é igual a $2ab+b^2$, isto é, $R-a^2 = 2ab+b^2$. Se <u>*b* for bem pequeno</u>, b^2 será ainda menor e, consequentemente, desprezível.

Logo, $R-a^2 = 2ab' \Leftrightarrow b'=\dfrac{R-a^2}{2a}$ que será uma boa aproximação para *b*. Assim, $a+b' = a+\dfrac{R-a^2}{2a} = a+\dfrac{R}{2a}-\dfrac{a^2}{2a} = a+\dfrac{R}{2a}-\dfrac{a}{2}= \dfrac{a}{2}+\dfrac{R}{2a} = \dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{R}{a}\right)$ é uma boa aproximação para a raiz de *R* melhor do que *a*. Através de duas iterações com a escolha $a=\frac{3}{2}$ presume-se que esse tenha sido o procedimento para encontrar uma aproximação para $\sqrt{2}$, como registrada na tableta YBC7289 (página 35).

<u>Álgebra babilônia</u>

A álgebra babilônia é retórica, quer dizer, os problemas algébricos são enunciados e resolvidos sem a utilizar de maneira sistemática notações algébricas ou simbólicas (como hoje). Os babilônios podiam resolver equações de segundo grau de certos tipos (completando quadrados, ou fazendo substituições), algumas equações cúbicas e biquadráticas.

Os problemas algébricos eram formulados e resolvidos verbalmente. As palavras "comprimento" (ou "lado"), "largura", e "área" eram frequentemente utilizadas para as incógnitas, <u>não porque essas incógnitas representassem necessariamente quantidades geométricas</u>, mas provavelmente porque muitos problemas algébricos provinham de situações geométricas e a terminologia geométrica acabou se tornando padrão. Um exemplo do modo como esses termos eram empregados para as incógnitas e do modo como os problemas eram enunciados é:

"Multipliquei comprimento e largura e a área é 600. Multipliquei o comprimento por si mesmo e obtive uma área. Multipliquei o excesso do comprimento sobre a largura por si mesmo e o resultado obtido multipliquei por 9. E isso fez um novo resultado equivalente a área obtida pela multiplicação do comprimento por si mesmo. Quem são o comprimento e a largura?"

<u>**Solução:**</u> *"A raiz de 9 é 3. Toma 3 para o comprimento e, visto que ele disse: multipliquei isso, em que o comprimento supera a largura, por si mesmo..., tirando 1 de 3, vem 2 para a largura. Multiplica 3 por 2, vem 6. Divide 600 por 6 dá 100. A raiz de 100 é 10. Multiplica 10 por 3, que foi*

tomado para o comprimento, o que faz 30; esse é o comprimento. Multiplica 2 por 10, tens 20; essa é a largura.”

<u>Exercício:</u> Avalie que a solução acima está vinculada ao “método da falsa posição”.

<u>Mais exemplos de textos babilônios</u>

1) “Somei a área e o lado e o resultado é 0.45”

Solução retórica proposta pelo escriba, por meio de uma série de procedimentos (como acima):

“ Tome 1.
Fracione 1, tomando a metade (0.30).
Multiplique 0.30 por si mesmo (0.15).
Some 0.15 a 0.45 (1).
1 é o quadrado de 1.
Subtraia 0.30 de 1.
0.30 é o lado.”

<u>Exercício:</u> Escreva o problema acima em notação algébrica atual resolvendo-o, e mostre que os procedimentos sugeridos pelo escriba são exatamente os passos necessários para a sua resolução.

<u>Nota:</u> Cada procedimento era executado com a ajuda de uma tabela. A terceira etapa exigia a consulta a uma tabela de multiplicações, ou de quadrados de números. A quinta etapa era resolvida em geral pela consulta a uma tabela de raízes quadradas.

2) “Adicionei sete vezes o lado de meu quadrado a onze vezes sua área: 6.15”

Solução:
“Tome 7 e 11.
Multiplique 11 por 6.15 e (o resultado) é 1;8,45.
Calcule a metade de 7 (3.30)
Multiplique 3.30 por si mesmo (12.15).
Acrescente a 1,8.45 : 1;21.
É o quadrado de 9.
Subtraia 3.30 de 9: tu escreverás 5:30.
O que devo multiplicar por 11 para que o resultado seja 5.30? 0.30 é seu fator.
O lado do quadrado é 0.30.”

<u>Exercício:</u> Idêntico ao anterior.

<u>Nota</u> <u>1)</u>: Não é dada nenhuma fórmula geral nos dois casos (como nossa fórmula quadrática), e isso é geralmente válido para toda a matemática babilônia. Contudo, <u>os procedimentos são tão específicos</u> que tem-se certeza de um processo geral; e, após ter-se resolvido uma grande quantidade de problemas, não haverá mais nenhuma dúvida.

<u>2)</u>: O uso dessa linguagem geométrica fazia os babilônios misturarem "unidades" diferentes. Alguns autores sugerem que, por exemplo, termo "quadrado" não possui nenhum significado geométrico a mais do que o usado em nossa álgebra. De fato, não existiria nenhuma situação geométrica real sendo considerada.

Um pouco mais sobre a álgebra babilônia

Em algumas tabuletas, encontramos problemas que, em notação algébrica atual, daria origem a uma equação da forma $x^2 + q = px$, com p e q positivos. Nessas tabuletas (ou tablitas) o problema é apresentado sob a forma do sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$$

Vejamos a solução, nos moldes babilônios (porém em notação moderna):

Temos

$$\frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}, \qquad (1)$$

De onde

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}.$$

E então sucessivamente

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{p^2}{4} - q$$

e

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{4}\right) - q}$$

Ora

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{(x-y)^2}{4}, \qquad (*)$$

(*) – O processo seguido pelos babilônios para os problemas apresentados sob a forma do sistema de equações acima, fundamentava-se nesta igualdade, ou seja,

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy$$

E assim

$$\frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{4}\right) - q}$$

Ou seja

$$\frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{4}\right) - q} \qquad (2)$$

Das equações (1) e (2) obtemos as soluções:

$$x = \left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{4}\right) - q}$$

e (**)

$$y = \left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{4}\right) - q}$$

Comentário: Não é demais repetir que não era assim que os babilônios procediam. Eles não dispunham do simbolismo algébrico. Mas os procedimentos indicados nas tablitas correspondem à aplicação dessas fórmulas.

Como os babilônios chegaram a seus procedimentos para resolver equações do 2º grau?

Segundo alguns autores, o fato de que muitos problemas que conduzem a equações do 2º grau serem dados sob a forma do sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

sugere que os escribas babilônios investigavam a relação entre o perímetro e a área de uma superfície retangular:

> Parece que antigamente muitos acreditavam, por exemplos, que a área de um terreno dependia somente de seu perímetro. Há varias histórias que indicam que os que sabiam que isso não era verdadeiro se 'aproveitavam' dos que nisso acreditavam. É assim plausível que os escribas babilônios, para demonstrarem que retângulos de perímetros iguais podiam ter áreas diferentes, construíram tabelas de áreas b relacionando-as com o perímetro constante 2a, usando valores diferentes para a base x e a altura y.

(**) – Se $\begin{cases} x - y = p \\ xy = q \end{cases}$ encontra-se analogamente $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ e $y = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$

Como poderiam os babilônios ter procedido?

Fazendo $x = \frac{a}{2} + z$, $y = \frac{a}{2} - z$ vemos que a área b é

$$b = xy = \left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2$$

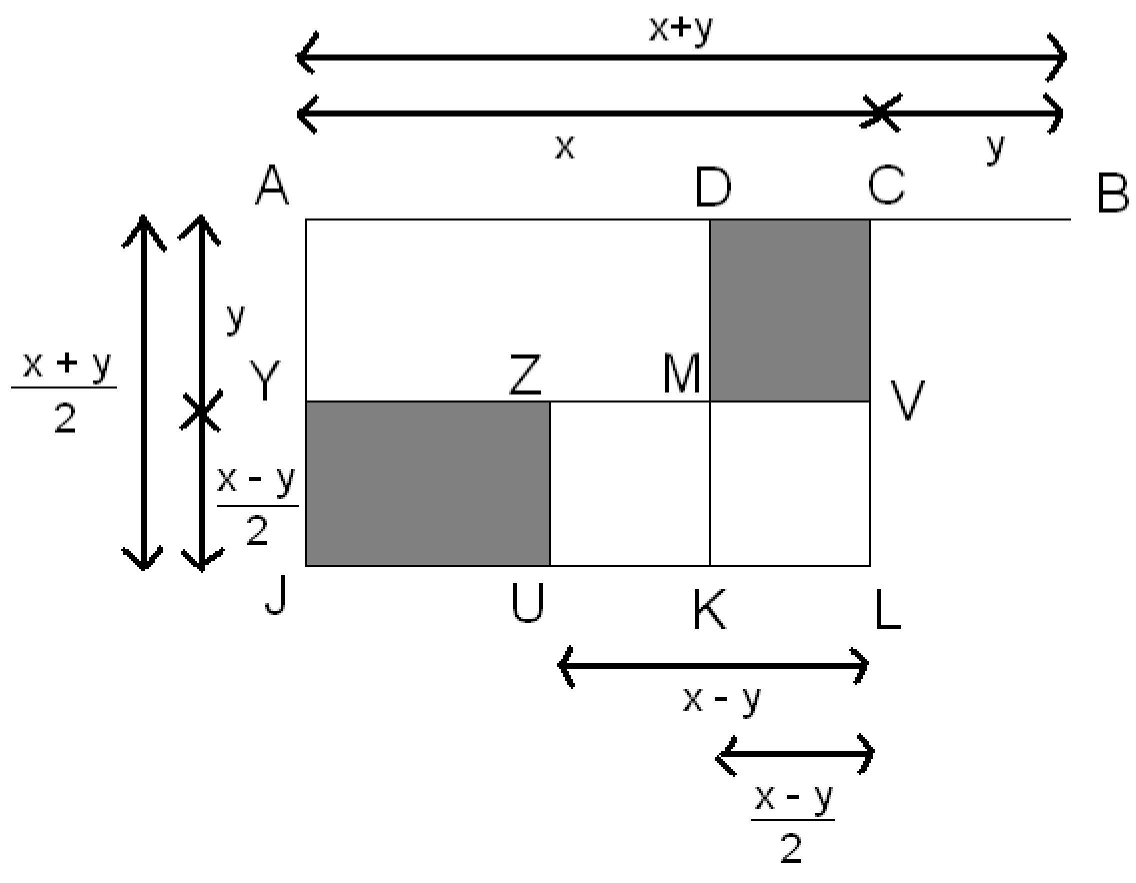
E, portanto

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Desse valor para z obtemos x e y.

Pesquisas recentes e minuciosas sobre a matemática babilônia sugerem que os escribas babilônios chegaram a este resultado usando raciocínios geométricos como no exemplo a seguir. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$



Na figura, AB = x+y, CB=y. Seja D o ponto médio de AB. Construa o quadrado ADKJ, cujo lado é $\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}$. Vemos imediatamente que

$$\frac{a}{2} = x - \frac{x-y}{2} \qquad\qquad \frac{a}{2} = y + \frac{x-y}{2}$$

Considere o quadrado ZUKM. Vemos que o retângulo de lados JU e UZ é congruente ao retângulo DCVM, pois é fácil ver que JU=y. Disso decorre imediatamente que o quadrado de lado $\frac{a}{2}$ excede o retângulo de lados x e y pelo quadrado de lado $\frac{x-y}{2}$.

O lado deste último quadrado mede $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$. Somando este comprimento com $\frac{a}{2}$, achamos x. Em seguida, é fácil achar y. Interpretações geométricas semelhantes permitem reconstruir um caminho possível para a solução babilônia do sistema

$$\begin{cases} x - y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

A mesma figura mostra que $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ (3)

Então, $\frac{b}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ (4)

Assim, $\frac{x+y}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^2}$ (5)

$\frac{(x+y)}{2} = z$, temos então que $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = z + \frac{a}{2}$ (6)

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = z - \frac{a}{2} \qquad (7)$$

Outros exemplos de equações resolvidas pelos babilônios são apresentados pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b \\ xy = a \end{cases}$$

os babilônios usavam também cálculos que podem ser interpretados como se empregassem a identidade fácil de verificar:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Em resumo, sabemos que os babilônios sabiam achar as soluções de certos “tipos” de equações do 2º grau, equações de 3º grau e algumas biquadráticas, provenientes de problemas envolvendo uma incógnita ou duas (em uma tradução em linguagem moderna, com nosso simbolismo algébrico, é claro).

<u>Exemplo:</u> Escreva o problema abaixo (já no sistema decimal) em notação algébrica atual resolvendo-o, e mostre que os procedimentos sugeridos pelo escriba são exatamente os passos necessários para a sua resolução.

"Comprimento, largura. Multipliquei o comprimento pela largura e fiz uma superfície. Acrescentei à superfície aquilo em que o comprimento supera a largura, isso faz 183. O comprimento e a largura, conjuntamente, fazem 27. Quais são o comprimento e a largura?"

<u>Solução:</u> *"Tu, pelo teu processo, acrescenta 27 a 183, faze 210. Acrescenta 2 a 27, faze 29. A sua metade é 14,5 , o quadrado de 14,5 é 210,25 ; de 210,25 tira 210, fica 0,25 ; a raiz de 0,25 é 0,5. Acrescenta 0,5 a 14,5; faze 15. Esse é o comprimento. Tira 0,5 , resulta 14; tira este 2 que tinhas acrescentado, ficam 12. Essa é a largura."*

Enunciado em notação algébrica atual: $\begin{cases} xy + (x - y) = 183 & \text{(I)} \\ x + y = 27 & \text{(II)} \end{cases}$, onde x é o comprimento e y é a largura

<u>Solução no texto babilônio</u>	**<u>Solução em linguagem algébrica atual</u>**
Soma 183 com 27	$\big(xy + (x - y)\big) + (x + y) = xy + 2x = x(y + 2)$ $= 183 + 27 = 210$
Soma 2 a 27	$2 + (x + y) = x + (y + 2) = 2 + 27 = 29$
A metade é $\frac{29}{2} = 14{,}5$	$\frac{x + (y + 2)}{2} = \frac{29}{2} = 14{,}5$
O quadrado é 210, 25	$\left(\frac{x + (y + 2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{29}{2}\right)^2 = (14{,}5)^2 = 210{,}25$
Subtraia 210 de 210,25	$\left(\frac{x + (y + 2)}{2}\right)^2 - x(y + 2) = 210{,}25 - 210 = 0{,}25$
A raiz de 0,25 é 0,5	$\sqrt{\left(\frac{x + (y + 2)}{2}\right)^2 - x(y + 2)} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$
Soma a 14,5	$\frac{x + (y + 2)}{2} + \sqrt{\left(\frac{x + (y + 2)}{2}\right)^2 - x(y + 2)} \quad (*)$ $= 14{,}5 + 0{,}5 = 15$ 15 é o comprimento x

(*)Esta expressão pode ser vista como uma raiz de uma equação do 2º grau da forma X² - -(x+ (y + 2))X + x(y + 2) = 0. Neste caso essa raiz é X = x. A outra raiz é X = y + 2.

Subtrai 0,5 de 14,5, 14,5 – 0,5 = 14 é a largura mais 2 ou y+2 = 14. Subtraia 2 de 14, 14-2=12 ou (y+2)-2 = 12 tem-se a largura y.

A partir dos dois primeiros procedimentos, podemos estabelecer um novo sistema de equações:

$$\begin{cases} x + (y + 2) = 29 \\ x(y + 2) = 210 \end{cases}$$

cuja solução dada na sequência dos procedimentos corresponde ao modelo de solução que está nas páginas 32 e 33.

Geometria babilônia

A geometria babilônia também tem o aspecto algébrico-aritmético, pois todos os problemas têm caráter numérico, e sua importância matemática reside na solução aritmética.

Entretanto, deve ficar bem caracterizado que várias propriedades geométricas eram corretamente aplicadas e conhecidas nas soluções de problemas. Entre elas destacam-se:

- o Teorema das linhas (retas) proporcionais e a teoria da semelhança;
- o Teorema dito de Pitágoras;
- a inscritibilidade do triângulo retângulo em um círculo;
- cálculo das áreas de triângulos, quadrados, retângulos e trapézios;
- volume do paralelepípedo retângulo, do cubo, do prisma reto, dos troncos do cone e da pirâmide;
- o valor de π, que era dado 3.

De fato, muitos detalhes dos processos geométricos permanecem ignorados ou obscuros, apesar de milhares de textos que nos chegaram, mas evidenciam o quão amplo era o conhecimento matemático na babilônia. Os fatos geométricos não constituem uma parte especial da matemática babilônia, pois são tratados de modo idêntico ao de qualquer outro que se traduza por relações numéricas.

Exemplos de textos babilônios

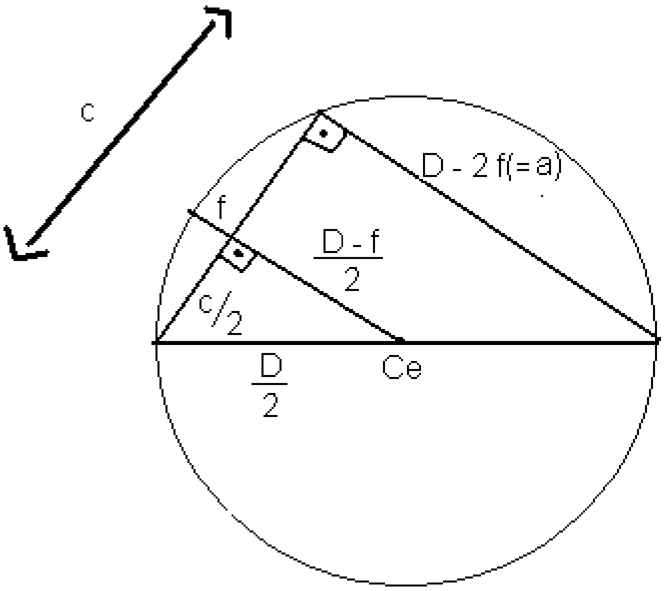
1 - “20, a circunferência; 2, a reta que baixei. Qual o comprimento da corda?”

Solução:

“Multiplica 2 por 2: 4.
Tira 4 de 20, o diâmetro, 16.
Eleva o diâmetro 20 ao quadrado: 6;40.
Eleva 16 ao quadrado: 4;16.
Tira 4;16 de 6;40: 2;24.
É o quadrado de 12.
É o comprimento da corda”

Em linguagem atual:

Conhecendo o diâmetro de uma circunferência e o comprimento da flecha, calcular a corda c correspondente a essa flecha.



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{a}{\left(\frac{D}{2}\right) - f} = \frac{c}{\frac{c}{2}} \leftrightarrow a = 2\left(\left(\frac{D}{2}\right) - f\right)$$

$$= D - 2f$$

Além disso,

$$D^2 = c^2 + (D - 2f)^2 \leftrightarrow$$

$$c^2 = D^2 - (D - 2f)^2 \leftrightarrow$$

$$c = \sqrt{D^2 - (D - 2f)^2}$$

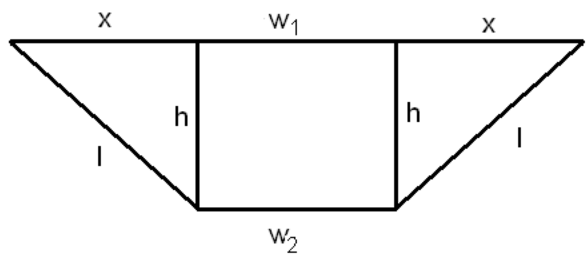
Comparando-se com a solução dada tem-se que D=20 e f=2, pois o escriba diz:

Multiplica 2 por 2 : 4	$2f = 2 \times 2 = 4$
Tira 4 de 20, o diâmetro, 16	$D - 2f = 20 - 4 = 16$
Eleva o diâmetro 20 ao quadrado: 6;40	$D^2 = 20 \times 20 = 6;40$
Eleva 16 ao quadrado: 4;16	$(D - 2f)^2 = 16 \times 16 = 4;16$
Tira 4;16 de 6;40 : 2;24	$D^2 - (D - 2f)^2 = 6;40 - 4;16 = 2;24$
	$\sqrt{D^2 - (D - 2f)^2} = \sqrt{2;24} = 12$
É o quadrado de 12	É o comprimento da corda

2 – "Em um trapézio (isósceles) 30 é o comprimento, 30 o segundo comprimento, 50 a largura superior, 14 a largura inferior, 30 vezes 30 é 15;0. Subtraia 14 de 50 e o resto é 36. Metade disso é 18. 18 vezes 18 é 5;24. Subtraia 5;24 de 15;0 e o resultado é 9;36. O que deveríamos multiplicar por si próprio para que o resultado seja 9;36? 24 vezes 24 é 9;36. 24 é a <u>reta divisora</u>. Adicione 50 e 14, as larguras, e (o resultado) é 1;4. Metade disso é 32. Multiplique 24, a reta divisora, por 32, e (o resultado) é 12;48".

<u>Exemplo:</u> Interprete os cálculos do texto acima em notação matemática atual identificando na figura de um trapézio isósceles os elementos do cálculo proposto. A partir daí diga o que foi calculado.

Este exemplo trata de achar a área de um trapézio isósceles de dimensões (veja a Figura abaixo).



O primeiro passo é achar o que na figura chamamos de x

$$x = \frac{W_1 - W_2}{2} = \frac{50 - 14}{2} = 18$$

Em seguida a altura h – a "reta divisora" do texto – é determinada por meio do teorema de Pitágoras:

$$\mathrm{h} = \sqrt{\mathrm{l}^2 - \mathrm{x}^2} = \sqrt{15 - 5;24} = \sqrt{9;36} = 24$$

Finalmente a área é calculada segundo a fórmula correta:

$$\mathrm{A} = \mathrm{h}.\frac{\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2}{2}.24 = 12;48$$

Plimpton 322

Def.: Um terno (a,b,c), a,b,c $\in \mathbb{Z}_+$, com a, b < c, que representa os lados de um triângulo retângulo é chamado terno de números pitagóricos; em outras palavras é uma solução com números inteiros positivos da equação $a^2 + b^2 = c^2$ (*).

Os babilônios estudaram um caso de ternos pitagóricos: tableta de Plimpton 322 (coleção G.A.Plimpton da Universidade de Columbia).

Def.: Um terno (a,b,c), a,b,c $\in \mathbb{Z}_+$, com a, b < c, é um terno babilônio no caso em que a,b,c são expressos na forma

$a = u^2 - v^2$ $\qquad$ $b = 2uv$ $\qquad$ $c = u^2 + v^2$

onde u,v $\in \mathbb{Z}_+$, mdc(u,v)=1, tendo como fatores primos apenas 2, 3 e 5 (os primos divisores de 60) e não sendo ambos ímpares (exceção à última linha da tableta). Os números u e v são chamados geradores do terno babilônio.

Assim, temos que

$$(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$$

(*) Caso particular da equação diofantina $a^n + b^n = c^n$ com $a, b, c, n \in \mathbb{Z}_+$, para n=2 (caso este que possui infinitas soluções). Para $n \geq 3$, o chamado "Último Teorema de Fermat" [(1)] estabelece que não existe nenhum terno de inteiros positivos satisfazendo esta equação. Esta afirmação foi demonstrada em 1993 por Andrew Wiles (inglês – 1953)

[(1)] Enunciado por Fermat, quando comentava a resolução da equação pitagórica $a^2+b^2=c^2$ tratada no Livro II da obra "Aritmética" de Diofanto, como:
"Ao contrário,é impossível separar um cubo em dois cubos, um potência quarta em duas potência quarta acima da segunda em duas potências do mesmo grau. Eu descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa que esta margem (da página correspondente ao assunto da tradução francesa da obra de Diofanto) é muito estreita para conter." (1637)
Deve-se ressaltar que esta denominação de "o último Teorema de Fermat" não é porque se trata do último teorema sobre o qual Fermat trabalhou, mas porque ele foi durante muito tempo o último teorema de Fermat a não ter recebido demonstração. Esta denominação, aliás, era abusiva, pois, enquanto uma demonstração não tivesse sido produzida, a proposição não seria um teorema mas uma conjectura. Uma outra denominação dada a esta proposição de Fermat foi de "o grande teorema de Fermat" em contrapartida ao chamado "o pequeno teorema de Fermat' cujo enunciado em linguagem moderna é: " Se $a \in \mathbb{Z}$ e p é um número primo que não divide a, então p divide $a^{p-1} - 1$, isto é, $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p) para a $\not\equiv$ 0 (mod p)."

Outro fato a ser destacado é que essa afirmação de Fermat em 1637 sobre a descoberta de uma demonstração maravilhosa tinha provavelmente um caráter puramente privado, como uma simples anotação. Fermat não a repetiu. Em 1659, ele propôs a Pierre de Carcavi (francês – 1603 à 1684) como problemas a resolver os casos particulares n=3 e n=4. Ele se deu conta que sua "demonstração" pelo método que ele denominou "descida infinita" era incompleta.

Reconstituição da tableta Plimpton 322 na base 10

(I)	(II)	(II')	(III)	(IV)	(V)	(VI)
$\frac{(169)^2}{(120)^2}\left(\frac{(2;49)^2}{(2;0)^2}\right)_{60}$	$119(1;59)_{60}$	$120(2;0)_{60}$	$169(2;49)_{60}$	1	12	5
1,949158552	3367	3456	4825	2	64	27
1,918802127	4601	4800	6649	3	75	32
1,886247907	12709	13500	18541	4	125	54
1,815007716	65	72	97	5	9	4
1,785192901	319	360	481	6	20	9
1,719983676	2291	2700	3541	7	54	25
1,692709418	799	960	1249	8	32	15
1,642669444	481	600	769	9	25	12
1,586122566	4961	6480	8161	10	81	40
1,562500000	45	60	75	11	2	1
1,489416840	1679	2400	2929	12	48	25
1,450017361	161	240	389	13	15	8
1,430238820	1771	2700	3229	14	50	27
1,387160500	56	90	106	15	9	5
$\left(\frac{c^2}{b^2}\ (= 1 + \frac{a^2}{b^2}) = \frac{(u^2+v^2)^2}{(2uv)^2}\right)$	($a=u^2-v^2$)	($b=2uv$)	($c=u^2+v^2$)		(u)	(v)

Relação entre os números das colunas II, II' e III:

Linha 1: $(1;59)^2 + (2;0)^2 = (2;49)^2$

Razão de existência da tableta Plimpton 322:

- questão difícil e sem resposta por falta de pontos de comparação;
- os babilônios podem tê-la construído por simples gosto pelas manipulações numéricas, para mostrar o desafio que constitui a procura de soluções inteiras da equação $a^2 + b^2 = c^2$;
- embora os babilônios tinham às vezes tendência a sair do domínio prático, raramente era por simples prazer. De fato, o que podemos ter é uma lista destinada ao treinamento de escribas;
- outra possibilidade é que a tableta poderia ter sido um "manual do professor", uma acumulação de dados sobre os triângulos retângulos, a partir dos quais o professor podia construir problemas para seus alunos. Com efeito, de cada linha da Plimpton 322, pode-se construir um problema do sistema de equações padrão dos babilônios:

$$\begin{cases} x \pm y = p \\ xy = q \end{cases}$$

De fato, sendo *a*, *b* e *c* os três números satisfazendo a relação $a^2+b^2=c^2$, pode-se ter indiferentemente os sistemas

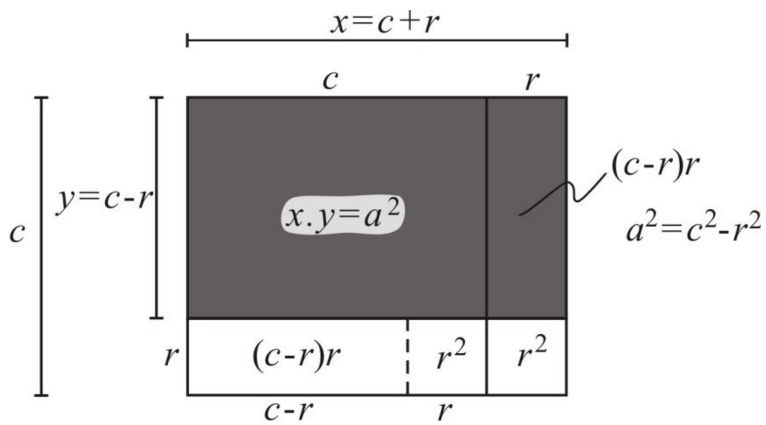
$$(1)\quad \begin{cases} x + y = 2c \\ xy = a^2 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad (2)\quad \begin{cases} x - y = 2b \\ xy = a^2 \end{cases}$$

que se resolvem, respectivamente:

(1) Fazendo $x=c+r$ e $y=c-r$, com $c>r$, tem-se

$$\begin{cases} x + y = 2c \\ xy = c^2 - r^2 = a^2 \Rightarrow r = \sqrt{c^2 - a^2} = b \end{cases}$$

Geometricamente:



ou

(2) Fazendo *x=r+b* e *y=r-b*, com *r>b*, tem-se

$$\begin{cases} x - y = 2b \\ xy = r^2 - b^2 = a^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = c \end{cases}$$

<u>**Obs.:**</u> **1)** Os números envolvidos na tableta são tão grandes que o <u>método de ensaio e erro</u> está excluído.

2) A razão $\frac{c^2}{b^2}$ possui um intervalo de variação entre 1,3 e 2 $\left(1{,}3 < \frac{c^2}{b^2} < 2\right)$, e decresce regularmente, mostrando, através da igualdade trigonométrica $\frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \text{cossec}^2\alpha$, que os matemáticos babilônios podiam conhecer os ângulos dos triângulos retângulos considerados, tendo esses ângulos uma variação que ia de aproximadamente 45° até aproximadamente 60°. Assim, a questão: "Por qual princípio esses números foram ordenados?" encontra uma resposta nesse fato.

3) Em todo caso esses números certamente não foram escolhidos ao acaso.

4) O verso da tableta possui três linhas verticais delimitando quatro colunas de mesma largura que as colunas da face, como se o escriba tivesse a intenção de continuar a enumeração.

<u>Algumas Observações Finais sobre a Matemática Babilônia</u>

1) Não há nenhuma <u>indicação explícita</u> de como se descobriram as <u>regras implícitas</u> que caracterizam as soluções dos problemas.

2) Quanto ao teorema dito de Pitágoras: pelo cálculo da diagonal de um quadrado (tableta YBC 7289) e pela tableta Plimpton 322, vemos que os matemáticos babilônios o conheciam com um uso sem restrições e tratado com alto grau de sofisticação.

3) Os babilônios possuíam técnicas aritméticas suficientes para obterem excelentes aproximações de raízes quadradas.

4) A matemática babilônia nos permite uma reavaliação grega. Percebemos agora que os matemáticos gregos deviam muito a seus precursores babilônios. Além disso, o que é julgado como a "decadência" da matemática grega é de fato <u>uma continuação direta da antiga tradição oriental através da aritmética e da álgebra babilônias e egípcias.</u>

A tableta Plimpton 322 e o círculo unitário

Seja a equação $a^2 + b^2 = c^2 \left(\leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,\ c \neq 0 \right)$.

Problema: Encontrar as soluções inteiras que a satisfaz. Fazendo $A = \frac{a}{c}$ e $B = \frac{b}{c}$, temos que $A^2 + B^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$.

Problema: Encontrar os pares de números racionais que satisfazem $A^2+B^2=1$

Conclusão: Encontra as soluções inteiras da equação $a^2 + b^2 = c^2$ equivale a encontrar os pontos racionais (pares de números racionais) no círculo unitário.

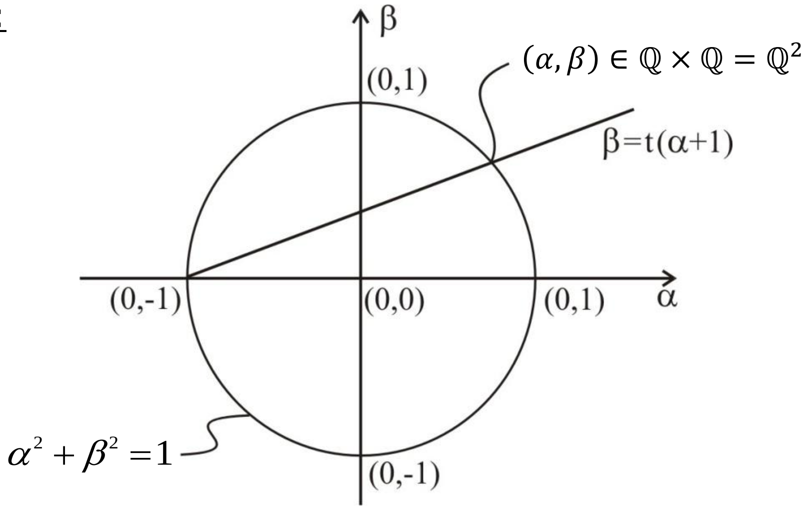
Seja o plano AB de todos os pares ordenados (A,B) onde $A, B \in \mathbb{Q}$. $A^2 + B^2 = 1$ é a equação do círculo unitário com centro na origem deste plano. A tarefa se caracteriza então em saber quais pontos racionais, pontos do plano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ pertencem a este círculo. Já se conhece quatro desses pontos quando $A^2 + B^2 = 1$ intersecta os eixos: (1,0), (0,1), (-1,0) e (0,-1). Considerando agora o ponto (-1,0), seja a família de semi-retas dada pela equação $B = t(A+1)$, $A \in \mathbb{Q}$, $A \geq -1$, $t \in \mathbb{Q}$ que parte de (-1,0) (para A = -1, B = 0). t é o coeficiente angular e determina cada membro dessa família.

<u>Teorema 1:</u> (i) Toda semi-reta $B = t(A+1)$, $A \in \mathbb{Q}$, $A \geq -1$, $t \in \mathbb{Q}$, intersecta o círculo em um ponto racional distinto de (-1,0).

Inversamente

(ii) Todo ponto racional do círculo distinto de (-1,0) é da forma $(A, t(A+1))$, $A \in \mathbb{Q}$, $A > -1$, $t \in \mathbb{Q}$.

Visualização:



Demonstração: (i) Substituindo B = t(A+1) em A² + B² =1, vem:

$$A^2 + t^2(A+1)^2 = 1 \leftrightarrow (1+t^2)A^2 + 2t^2A + (t^2-1) = 0.$$

Uma solução desta equação do 2º grau em A à coeficientes racionais é A= -1 que corresponde ao ponto de interseção (-1,0). A outra solução é $A = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,t $\in \mathbb{Q}^{(2)}$.

Daí, $B = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right) = \frac{2t}{1+t^2}$. Logo, o segundo ponto de interseção é o ponto $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\ t \in \mathbb{Q}$.

O Teorema 1 pode então ser reenunciado como:

Teorema 2: Todos os pontos racionais do círculo A² + B² = 1 são representados pelo par $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$, t $\in \mathbb{Q}$, exceto o ponto (-1,0).

Como $t \in \mathbb{Q}$, a partir da transformação $t = \frac{v}{u}$ com $v \in \mathbb{Z}$ e $u \in \mathbb{Z}^*$, este par pode ser reescrito em termos de números inteiros. Assim, tem-se que

$$A = \frac{1-\frac{v^2}{u^2}}{1+\frac{v^2}{u^2}} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{2\left(\frac{v}{u}\right)}{1+\frac{v^2}{u^2}} = \frac{2uv}{u^2+v^2}$$

---

(2) $\frac{1-t^2}{1+t^2} \neq -1\ para\ todo\ t\ \in \mathbb{Q}.$

Por outro lado, como

$$1 = A^2 + B^2 = \frac{(u^2 - v^2)^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{(2uv)^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

$\leftrightarrow (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$, a totalidade das soluções inteiras que não têm divisores comuns, fazendo mdc(u,v)=1, $v \in \mathbb{Z}$ e $u \in \mathbb{Z}^*$, da equação $a^2 + b^2 = c^2$, é dada pelas igualdades

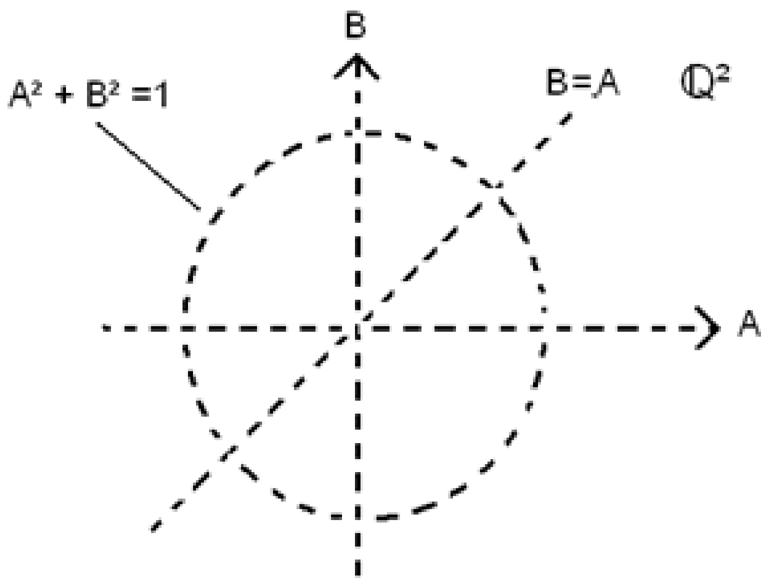
$$a = u^2 + v^2 , \quad b = 2.u.v \quad e \quad c = u^2 + v^2$$

Obs. 1) Com $u, v \in \mathbb{Z}_+, u > v$ tem-se os ternos pitagóricos;

n Com $u, v \in \mathbb{Z}_+, u > v$, u e v tendo como fatores primos apenas 2, 3, 5, e não sendo ambos ímpares (à exceção de =9 e v=5), tem-se as soluções do tipo Plimpton 322.

Exercícios: Demonstre o Teorema 1(ii)

Observação curiosa: No plano racional $\mathbb{Q}^2$, onde os pontos têm coordenadas racionais, a reta B=A e o círculo A² + B² = 1 não se intersectam. Intuitivamente, tem-se para esta observação a figura abaixo:



Nota:

1- Como o conjunto dos números irracionais $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ a figura acima teria de ser bem esparsa, quase "invisível".

2- A nota (1) vale para a figura da página 45.

3- Com o par $(\mathrm{A},\mathrm{B})=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right), t\in\mathbb{Q}$, se parametriza o círculo fazendo-se $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\operatorname{sen}\theta=\frac{2t}{1+t^2}$, com $t=\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, onde os valores racionais de t fornecem as soluções.

Considerações:

- As civilizações babilônias e egípcias desenvolveram um importante <u>corpo de conhecimentos</u> em matemática;

- Esses conhecimentos não podem ser vistos radicalmente como simples saberes empíricos ou resultantes de necessidades práticas. De fato, lês identificam procedimentos numéricos sistematizados$^{(*)}$.

Entretanto:

- Se nós analisamos os documentos babilônios e egípcios podemos constatar que a "verdade" de um resultado matemático permanece no nível dos exemplos aparentemente genéricos;
- Na matemática isso equivale a ausência de generalizações (explícitas) nos enunciados e inexistência de demonstrações.

(Percebe-se, por outro lado, que os problemas eram dispostos de tal maneira que a solução desses problemas vai em uma ordem da mais simples à mais complexa. Isto nos permite identificar um reconhecimento de modos de solução semelhantes, bem como o domínio de técnicas de resolução. Problemas teóricos enunciados de modo prático? Um outro aspecto percebido é uma certa indução, de forma implícita.)

Originalmente dos gregos: Um pensamento voltado para a procura das causas dos fatos por meio de provas → <u>conhecimento dos fatos</u>.

Na Matemática: a procura das causas dos fatos por meio de provas equivale a identificar as causas que geraram os fatos via <u>demonstrações</u>.

. Os babilônios e os egípcios conhecem as propriedades, os gregos querem prová-las através de demonstrações.

Na Matemática: a prova através de uma demonstração é necessária, pois ela garante a generalização das propriedades.

(*) Como eram estabelecidos

A Matemática Grega

O alvorecer da matemática dedutiva

As primeiras explicações dadas sobre o desenvolvimento da matemática grega e de sua transformação em uma ciência dedutiva foram as seguintes:

- o desenvolvimento de uma sociedade cultural e sócio-político avançada dos gregos compeliu o pensamento dedutivo;

- a confrontação de dois resultados, esses que vinham dos babilônios e esses que vinham dos egípcios;

- a lógica desenvolvida por Aristóteles.

Entretanto, uma ideia diferente começa a prevalecer sobre a origem da transformação da matemática grega em uma ciência dedutiva: é a reflexão que marca a importância da prova visual como prelúdio da prova formal. Além disso, a filosofia é considerada como tendo influenciado o desenvolvimento da matemática (o inverso é também verdadeiro). De fato, os filósofos-matemáticos gregos, por causa da filosofia, passaram de uma matemática pragmática e intuitiva a uma forma de raciocínio hipotético-dedutivo mais avançado.

A literatura mostra que a Grécia era rica em filósofos que, através de seus debates, desenvolveram no mais alto grau a arte da argumentação. Isso os conduziu a se interrogarem sobre o que era verdadeiro e sobre o que era falso. Podemos extrair daí, dois tipos de tendências:

- uma que utiliza uma argumentação para construir um raciocínio "direto";

- outra que utiliza um raciocínio “indireto” e que é ligado ao “princípio do terceiro excluído” (toda proposição é verdadeira ou falsa) (Parmênides de Eléia) [este princípio da filosofia passou para a matemática]

Um discípulo de Parmênides, Zenão de Eléia, através dos seus paradoxos utilizados com o intuito de questionar o movimento nas teorias do mundo contínuo (Anaxágoras de Clazomenas) e do mundo discreto (Pitágoras de Samos), movimento que se contrapunha a fixidez e a imutabilidade do ser parmenidiano, fez aparecer a tensão entre a argumentação e a demonstração. Essa confrontação de ideias filosóficas e de ideias matemáticas determinou a necessidade da prova.

O mundo grego da antiguidade se estendia desde a costa da Ásia Menor (região oeste da Turquia) no leste e alcançava o sul da Itália (→ Grande Grécia) no oeste.

- Duas grandes cidades na costa da Ásia Menor, Mileto e Éfeso:

  - centros econômicos e culturais;
  - a partir delas, intensificação das relações com outros povos → valores arcaicos e antigas instituições desaparecem com a aceleração dinâmica social;

  - nova mentalidade fruto da <u>valorização da individualidade</u>.

- No decorrer do século VI a.C.:

  - a expansão das técnicas oferece ao homem imagens explicativas que conduzem à progressiva substituição da visão mítica da realidade; [O mito é a prefiguração simbólica da explicação através do questionamento]
  - a expansão das técnicas estabeleceu a emergência de uma mentalidade físico-geométrica;

- técnicas que o homem repete e, sobretudo ensina, constitui um processo de transformação e de criação constantes semelhantes ao processo que teria produzido o universo e que dentro dele continua a operar mudanças;
- primeiras manifestações de um pensamento dotado de grande exigência de compreensão eclodem sob a forma de ciência teórica e filosofia.

Pensamento radical: parte não da tradição mítica, mas de realidades apreendidas na experiência humana cotidiana buscando integrá-las em uma visão compreensiva e globalizada.

Escola de Mileto: reduzir a multiplicidade a uma unidade geradora.

Tales de Mileto: (~624aC à ~547aC):

- Considerado o primeiro filósofo e matemático grego;
- Mentalidade científico-filosófica: causas naturais para explicar os fenômenos:

  - todo universo está submetido a um processo de transformação e de criação contínua como se algo vivente o habilitasse: a matéria é viva;
  - transformação e criação cujo princípio único é a água, substância primordial, princípio de todas as coisas;

- Nova visão do mundo que permite ser repensada e ser substituída;
- Marca o começo de uma tradição: da individualidade do saber;
- Marca o começo das proposições com caráter universal, abstrato e lógico.

Na matemática:

- "Tales o primeiro que introduz na Grécia essa teoria (a geometria) do Egito dando-lhe um caráter mais sistemático e mais geral." (em grego catolicóteron) (Proclo de Licia (~412 à ~485 dC));

  [Com os babilônios aprendeu tabelas e o manejo de instrumentos astronômicos, além da respectiva matemática]

- A partir de Tales as proposições matemáticas não são mais simples enunciados traduzindo fatos de um modo geral empíricos, elas têm um caráter geral. Por isso elas devem ser tratadas com uma exigência lógica;
- A partir de Tales as proposições matemáticas estabelecem as propriedades das figuras;
- Tales tem em relação às figuras geométricas uma atenção direta sobre as linhas e não mais sobre as medidas numéricas. De fato, sobre as linhas e os ângulos que são os elementos que resultam da análise e da decomposição das figuras e que as determinam. É uma lógica onde a intuição tende para o conceito, onde o concreto avança para o universal.

Proposições (de caráter geral) da geometria atribuídas a Tales:

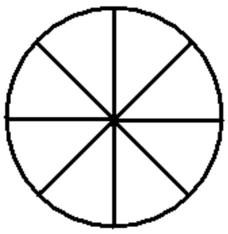
1- O círculo é dividido em duas partes iguais pelo seu diâmetro;
2- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
3- Todo ângulo inscrito e um semi-círculo é ângulo reto;
4- Se duas linhas retas se cortam entre elas, os ângulos opostos que elas formam são iguais;
5- Um triângulo é determinado se sua base e os ângulos relativos a esta base são dados;
6- * (Teorema das linhas proporcionais) (conhecido provavelmente na sua forma mais simples e mais particular) Uma reta traçada paralelamente a um dos lados de um triângulo cortará proporcionalmente os outros dois lados desse triângulos;
7- * (derivado de 6*) (suposto conhecido) Nos triângulos equiângulos, os lados, que formam ângulos iguais, são proporcionais; e os lados opostos a ângulos iguais são homólogos.

<u>Obs</u>.: Embora esses conhecimentos matemáticos pareçam elementares, certamente o saber de Tales não se limitava a eles. Deve-se ter em conta que as indicações da matemática dessa época são fragmentárias.

<u>Nota</u>: Antes de nos determos nessas proposições atribuídas a Tales precisamos identificar a origem de um aspecto importante que marca, com <u>a generalização</u> dos resultados matemáticos, a matemática grega: <u>a demonstração</u>.

Começa a prevalecer entre os historiadores da matemática uma ideia envolvendo a origem da transformação da matemática grega em uma ciência dedutiva: é a da prova visual como prelúdio à prova formal. Analisando isso que os gregos chamavam de "demonstração". O que os levou a acreditar que Tales, por exemplo, não demonstrou seus resultados, mas que ele os mostrou de maneira visual. Porém o fato é que certos resultados já identificavam um tratamento visual mais refinado. Além disso, a filosofia é considerada como tendo influenciado o desenvolvimento da matemática (o inverso é também verdadeiro). De fato, os filósofos-matemáticos gregos, por causa da filosofia, passaram de uma matemática intuitiva a uma forma de raciocínio hipotético-dedutivo mais avançado.

As demonstrações atribuídas a Tales de suas proposições.

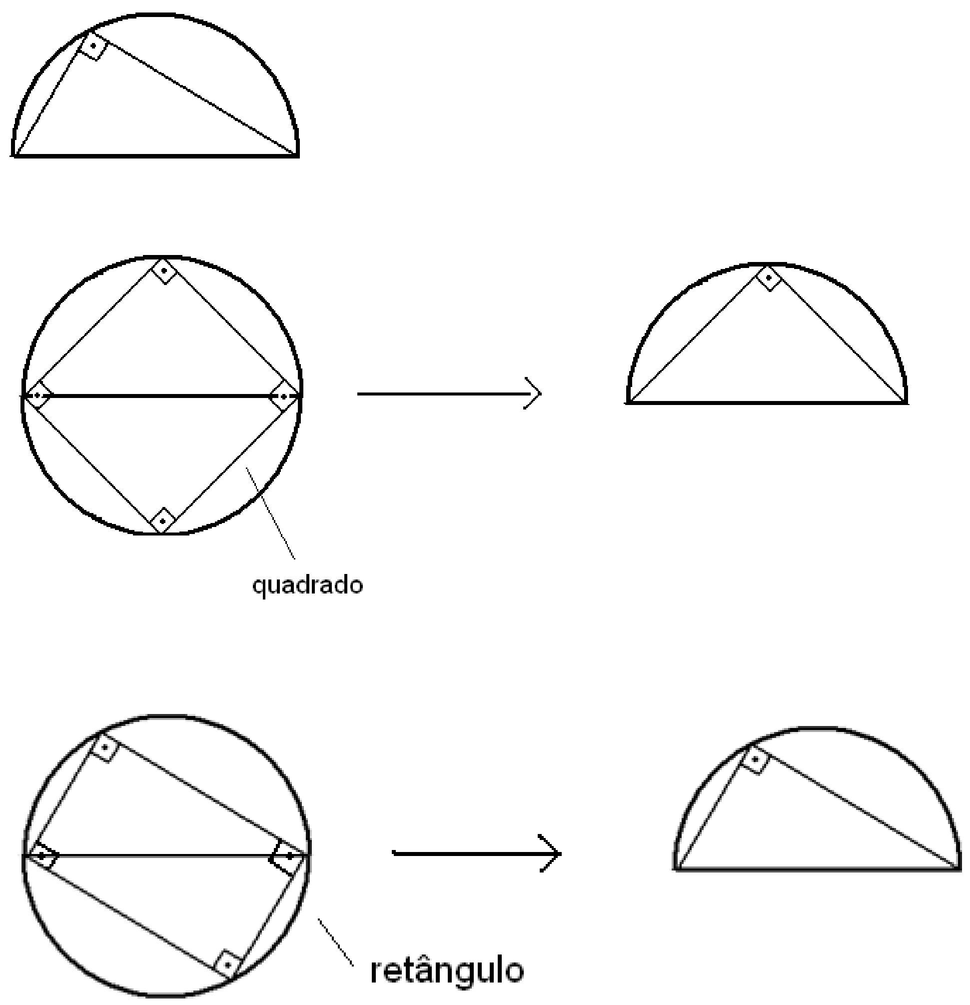


(1) Tales poderá ter enunciado esta proposição, sem ter demonstrado, sugerido pelos círculos divididos em setores iguais que se encontram nos monumentos egípcios;

(2) Proclo diz que Tales a demonstrou. De qual maneira? Difícil de precisar. Mas nada impede de pensar que ela foi próxima da primeira parte da demonstração da Proposição 5–Livro I dos Elementos de Euclides que utiliza por sua vez a Proposição 4 do mesmo livro.

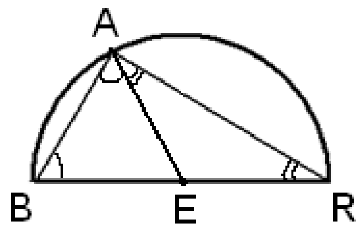
<u>Exercício</u>: Estude estas duas proposições dos Elementos.

(3) Prova Visual



Com estes dados visuais têm-se ainda necessidade de demonstrar? Parece que não, aqui a evidência é suficiente, a intuição tem o papel de indicar a verdade desta proposição, mesmo se tem-se necessidade de fazer um construção adicional.

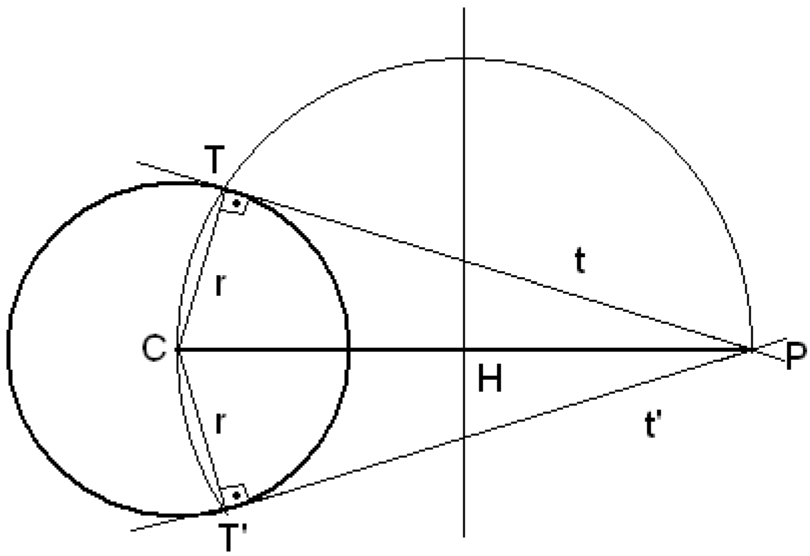
Prova formal (1ª parte da Proposição 31 – Livro III – Elementos):



Os triângulos ABE e ERA são isósceles. Daí, os ângulos de suas bases são iguais, isto é, ABE = BAE e AER = ERA. Segue que o ângulo inscrito BAR é igual a soma dos ângulos agudos em B e em R. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale dois retos, vemos que BAR é um ângulo reto. Esta demonstração se apóia, como as proposições 2 e 4, sobre composição de quantidades.

Aplicação importante desta inscrição:

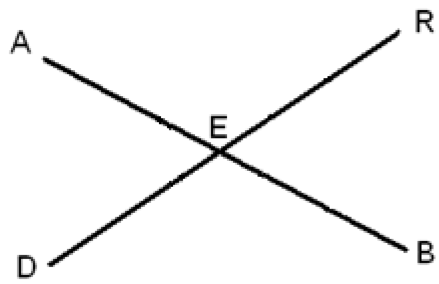
construção da tangente ao círculo a partir de P



(4) A demonstração de Euclides (Proposição 15 – Livro I):

Cortem-se as duas retas AB e DR reciprocamente no ponto E. Digo, que serão os ângulos AED = REB e DEB = AER.

Porque a reta AE cai sobre a reta DR, serão os ângulos AED, DEB iguais a dois retos. Do mesmo modo, caindo RE sobre AB, serão também os ângulos DEB, BER iguais a dois retos. Logo, os ângulos AED, DEB são iguais aos ângulos DEB, BER. Logo, tirando de uma parte e outra o comum DEB, ficará AED = BER. Com a mesma demonstração se prova se AER = DEB.



A informação de que esta proposição é de Tales foi dada por Proclo a partir da obra "História da Geometria" de Eudemo de Rodes (~350 à ~290 aC)

[É considerado o primeiro historiador da Matemática]

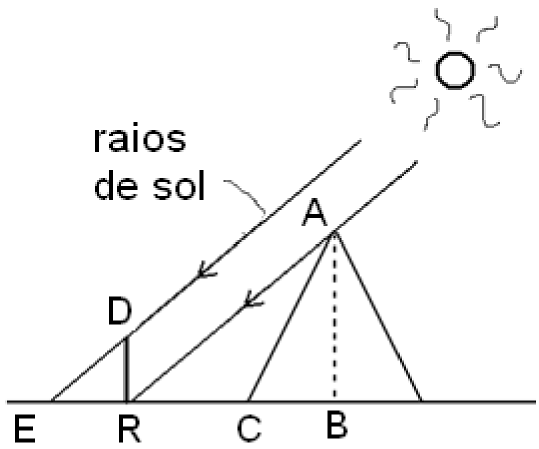
(5) Esta proposição tem sua equivalente na proposição 26 – Livro I – Elementos

(6) * Proposição 2 – Livro VI – Elementos

Exercício: Estudar estas proposições.

(7)* Tales teria demonstrado esta proposição? Sobre o que podemos fundar uma resposta afirmativa? Os autores antigos não fornecem indicação direta. Entretanto, em um texto do filósofo Plutarco (~46 à

~125 d.C.) está escrito que o faraó do Egito, Amasis, ficou impressionado de ver que Tales mediu a altura da pirâmide sem nenhuma dificuldade, sem a ajuda de nenhum instrumento, plantando um bastão na extremidade da sombra da pirâmide, pois com os dois triângulos assim formados pelos raios paralelos do Sol demonstrou que a relação de uma sombra com a outra é esta da altura da pirâmide com a altura do bastão.



Onde:
AB é a altura da pirâmide;
DR é o bastão;
ER é a sombra do bastão;
RC é a sombra da pirâmide.

Como os triângulos EDR e RAB são equiângulos temos:

$$\frac{RB}{ER} = \frac{AB}{DR}$$

Nota: Como já foi dito, não deverá ser pelo número (provavelmente maior do que sete) de proposições atribuídas a Tales que importa mais, é a concepção completamente nova, abstrata e puramente racional da ciência geométrica. Com Tales, esta ciência se funda como independente dos dados empíricos, como livre e desinteressada com relação à utilidade direta, concebendo com clareza o geral, o que é logicamente e universalmente verdadeiro. Raciocinando sobre as linhas, ele as considera por elas-mesmas nas suas relações de igualdade, de desigualdade ou de proporção, sem fazer intervir a consideração concreta de valores numéricos. Em resumo, pode-se dizer que Tales é o verdadeiro criador da geometria, pois com ele essa ciência terá o caráter que a marcará para sempre.

Anaximandro de Mileto (discípulo e sucessor de Tales) (~615 à ~547 a.C.)

- Traz outra resposta à questão do elemento constitutivo do universo.

  - o princípio das coisas (o começo/a fonte das coisas) (arquê, em grego) existentes é o ilimitado (ápeiron em grego) [o infinito] [o indefinido (no sentido qualitativo)] {em grego péras-limitado (finito)}
  - não é o princípio substancial das coisas, mas o primeiro princípio na ordem do tempo, o indeterminado puro, anterior a toda qualificação positiva.
  - não é água nem nenhum outro elemento (fogo, ar, terra), e sim alguma outra natureza (infinita) da qual nascem todos os céus e os mundos dentro deles, animados por um movimento.

- Favorável a existência do infinito atual.

  - o universo contém uma infinidade de mundos singulares, sucessivos (nosso mundo tem um fim e é sucedido por outras indefinidamente) e não coexistentes.
  - do ponto de vista, quantitativo, matemático, o ápeiron é o infinito do número ou da quantidade, e por extensão do espaço e da duração.

- Escreveu uma obra matemática denominada "Exposição sumária da geometria".

Escola de Samos (chamada mais tarde Escola itálica) (Escola pitagórica)

- Pitágoras de Samos (~569 à ~475aC.) após viagem no Egito e na Mesopotâmia se instala no sul da Itália na cidade de Crotona (daí o nome Escola itálica).

  - fundador de uma comunidade mística (visão mística dos números) e fundador de uma escola matemática;

- alguns membros conhecidos: Pitágoras de Samos, Filolau de Crotona (números primos e compostos), Arquitas de Tarento (números perfeitos), Hipaso de Metaponto (descoberta dos irracionais), Teodoro de Cirene (demonstra a irracionalidade de certas raízes quadradas).

- Ideia central do sistema filosófico-matemático dessa escola:

  - tudo é número, tudo se explica pelo número (número inteiro positivo) (e pelas relações feitas através dele)

    Pitágoras: "Tudo é organizado pelo número."

    Filolau: "Toda coisa tem um número: pois é impossível que uma coisa sem número possa ser pensada ou conhecida."

  - número: elemento subjacente em toda realidade material, elemento constitutivo de todas as coisas. As coisas manifestam externamente a estrutura numérica ordenada que lhes é inerente → <u>números figurados</u> (→ geometria dos números → <u>aritmo-geometria</u>) (*)

Obs.: Na escola pitagórica, os números eram representados por figuras formadas por pontos (polígonos regulares no plano, pirâmides e poliedros no espaço). O elemento gerador dos números: a unidade, identificada visualmente por . (um "ponto" sem uma posição definida, como o é em geometria, mas antes com uma <u>disposição</u>);

  - os números presidem as mutações da matéria, nos faz descobrir as leis da harmonia das coisas e a geometria nos faz descobrir as leis dos diversos aspectos do mundo material.

[Influência da matemática do Egito – título do papiro de Rhind:

"Método correto de investigação da natureza, para conhecer tudo que existe, cada mistério, todos os segredos."]

(*) As coisas são números porque elas são figuras geométricas e porque uma figura geométrica é precisamente um arranjo de pontos.

- Pitágoras e os pitagóricos (*)

  - os primeiros a fazer da matemática uma "ciência pura" estendendo-a além das necessidades práticas;
  - aumentam o universo dos conceitos matemáticos;
  - inventam as palavras: matemática (em grego matematiquê) que identifica a totalidade do saber. Derivada de mátema(**) que quer dizer "isso que pode ser ensinado" (que equivale a "isso que pode ser aprendido"), cujo plural matémata identifica "conhecimento(s) aprendido(s)".

O que é matemático? É aquilo que das coisas é manifesto, e que a partir daí nós as experimentamos (as coisas) como coisas distintas.

Neste sentido (a natureza d) o número é matemático(a).

Filosofia que significa "amor pela sabedoria".

A origem da filosofia está no questionamento para descobrir a realidade e a natureza das coisas, no estudo das "causas primeiras" (Aristóteles na obra "Metafísica").

(*) Pitagóricos aqui correspondem aos primeiros, junto com Pitágoras, e aos mais tardios.
(**) Do verbo mantánein – aprender em grego.

Escola pitagórica (caracteriza uma comunidade –
(duas correntes) koinóbion em grego)

Difusão do pitagorismo

Acusmáticos (em gregos acusmaticoi) **X** Matemáticos (em grego matematicoi - sábios) (aqueles que sabem)

(aqueles que só aprenderam os rudi-
-mentos, sem demonstração)
Derivada de acusma, que quer dizer "ensinamento oral".

(palavras (escutadas) **X** demonstrações)

- fundam a aritmética como ciência dos números (aritmoi em grego) (Teoria dos números: estuda as propriedades abstratas dos números)

- O número (aritmós em grego) é considerado em si-mesmo;
- Classificam os números (inteiros positivos) através de uma análise que os decompõe em pontos que, agrupados, são suscetíveis de formar diversas figuras geométricas (simbolismo aritmo-geométrico), conseguindo a partir daí estabelecer propriedades e relações de forma puramente teórica.

[Assim, o número é a soma desses pontos, mas essa soma é ideal e não material]

Aritmética – o estudo abstrato da natureza dos números e (em grego aritmetiquê) de suas propriedades.

X

Logística – (em grego loguistiquê) – o conjunto das regras do cálculo, a "arte do cálculo".

- Transformam o estudo da geometria (a geometria é intimamente ligada a aritmética);
- Descobrem três poliedros regulares: o tetraedro, o hexaedro (cubo) e o dodecaedro (→ Hipaso de Metaponto)

[o octaedro e o icosaedro foram descobertos posteriormente por Teeteto de Atenas (Escola de Atenas)]

↓

Figuras do cosmos (em grego cósmos – caracteriza uma ordem na disposição do universo)

- Acontece a considera primeira crise dos fundamentos (Helmut Hasse (alemão – 1898 à 1979) e Heinrich Scholz (alemão – 1884 à 1956) – 1928) (também: uma crise fundadora, uma crise que funda) na matemática (grega): a descoberta das grandezas incomensuráveis (em grego assímmetroi) (inexprimíveis, indizíveis (em grego arrêtoi))(*)

[estes adjetivos se referem às grandezas que não são medidas por nenhuma grandeza-padrão]

↓

[a crise dos irracionais]

(*) Pode ser considerada a mais importante descoberta atribuída aos pitagóricos. Os elementos para o questionamento já estavam presentes nos babilônios, que portanto nunca os comentaram. Provavelmente, é uma atitude mais especulativa e menos pragmática nos gregos que fez a diferença. Embora, também, os babilônios concebessem a matemática de forma especulativa. Entretanto, se a numeração com a notação posicional que eles escolheram (base 60) é mais prática para o cálculo, ela era menos adaptada que a escrita das relações para um trabalho teórico sobre a irracionalidade.

Se atribui a descoberta do irracional $\sqrt{2}$ (relação da hipotenusa com o cateto do triângulo retângulo isósceles (equivalente à relação da diagonal com o lado de um quadrado))[(*)] a Hipaso.

O "escândalo" (Paul Tannery)[(**)] dos irracionais manifesta-se assim em um caso particular do próprio Teorema de Pitágoras, contradizendo a afirmação de que todo fenômeno natural se mede por meio de relações entre números (inteiros positivos) (em grego <u>lógos</u> – <u>relação</u>).

<u>Nota</u>: É difícil de atribuir a Pitágoras a demonstração euclidiana do Teorema de Pitágoras. Acredita-se que ao menos foi demonstrado de forma aritmo-geométrica para os triângulos retângulos (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25), etc., contando o número de pontos figurados quadrados que se pode colocar em cada lado do triângulo retângulo[(1)]. Seja como for, é com Pitágoras que esse resultado tão antigo na história da Matemática é elevado ao nível de teorema.

Hipaso teria revelado a natureza da incomensurabilidade a pessoas indignas. Isso caracteriza uma traição, pois os pitagóricos achavam que o conhecimento dessa descoberta deveria ficar escondido em razão do <u>espanto</u> que se abateu sobre a consciência grega.

(*) para os gregos $\sqrt{2}$ não é um número, mas caracteriza tão somente a relação de incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado.
(**) Matemático francês (1843 à 1904)
"escândalo lógico" ↔ "crise dos fundamentos"

Questão: Os pitagóricos queriam esconder esse conhecimento [2] porque ele contradizia sua teoria do número ou se era unicamente para não abalar a consciência grega? Tende-se a supor que seria pelo segundo motivo. Considera-se que não havia uma recusa dos pitagóricos face aos incomensuráveis. De fato, seus signos de reconhecimento eram figuras cujas diagonais eram incomensuráveis como o pentágono, o pentagrama ou o quadrado. Além disso, tinham uma reverência, uma veneração para as figuras do cosmos das quais eles estavam conscientes da incomensurabilidade interna delas.

Obs.: Aqui, ser comensurável quer dizer ser comensurável com uma unidade de medida; e ser incomensurável quer dizer não ser comensurável com nenhuma unidade de medida.

Pode-se ainda dizer que desde o momento em que os gregos reconheceram o fato de que a incomensurabilidade era a regra, eles desenvolveram teorias que aprofundariam a noção de comensurabilidade, e aperfeiçoaram a teoria das quantidades colocando um estudo sobre as grandezas incomensuráveis. Todo esse entendimento tem seu caminho através dos trabalhos de Teodoro de Cirene, Teeteto de Atenas, Aristóteles, etc., culminando no Livro X dos Elementos de Euclides.

---

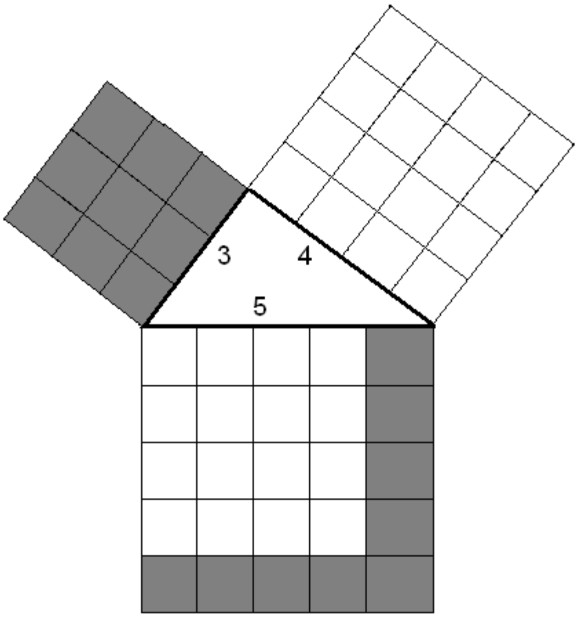
[1] (na próxima página explicado)

[2] A tradição segundo a qual esta descoberta permaneceu de início secreta parece confirmada pelo fato que Platão chama o número irracional de arrêton (inexprimível em grego): o segredo, o mistério para não se mencionar (diálogos "Hipias menor" e "República"). O termo assimmetron (incomensurável em grego) aparece em seguida no diálogo "Teeteto"; depois a palavra álogon (irracional (que não permite estabelecer uma razão, uma relação) em grego), que se encontra pela primeira vez em Demócrito de Abdera (~460 à ~370 a.C.) na sua obra "Das linhas irracionais", desaparecida.

(Continuação das notas extras da página anterior)

(1)(da página anterior) Ainda, dentro de uma interpretação pela aritmo-geometria, os pitagóricos podem ter percebido a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo pelo "método dos pequenos ladrilhos quadrados".

Visualmente:



Observamos que:

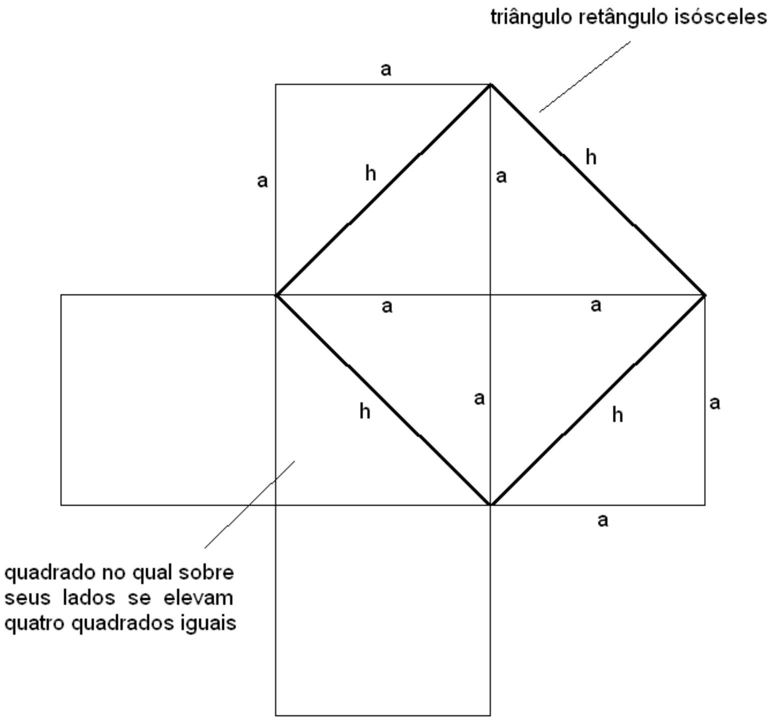
$$25 = 16 + 9$$

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

O certo que a primeira demonstração do quadrado da hipotenusa deve ter sido simples. Assim, alguns historiadores da matemática sugerem uma primeira demonstração geométrica <u>particular</u>, a partir dos ladrilhos egípcios em forma de triângulo retângulo isósceles, que Pitágoras certamente conhecia, através do seguinte diagrama:

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)



Como o quadrado de lado h contém quatro semi-quadrados que correspondem à dois quadrados,

$h^2 = a^2 + a^2$ (= $2a^2$).

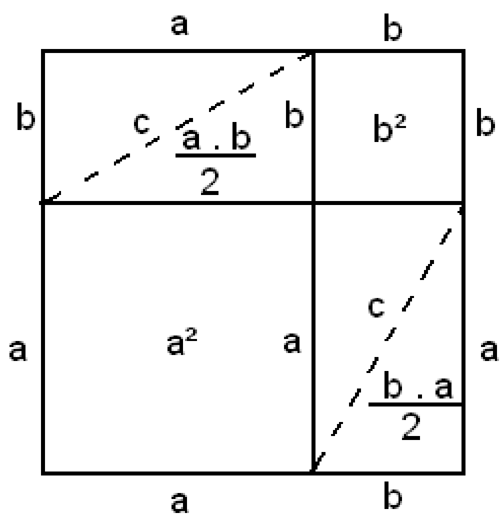
Um fato importante de se observar é que: se esta demons-tração é geometricamente evidente, é impossível de explicá-la aritmética-mente, porque a soma de dois quadrados (aritméticos) não é jamais um quadrado (aritmético).

De fato, se fizermos um diagrama utilizando o "método dos pequenos ladrilhos quadrados", considerando $\square$ = 1^2, indivisível, a igualdade acima não vai existir, pois <u>não haverá uma medida comum</u>: os quadrados e duas raízes não terão nenhuma relação, ou seja, é impossível exprimir numericamente o quadrado da hipotenusa quando os dois catetos são iguais, em particular iguais a 1. Esta situação fez aparecer a categoria das quantidades incomensuráveis (com a unidade).

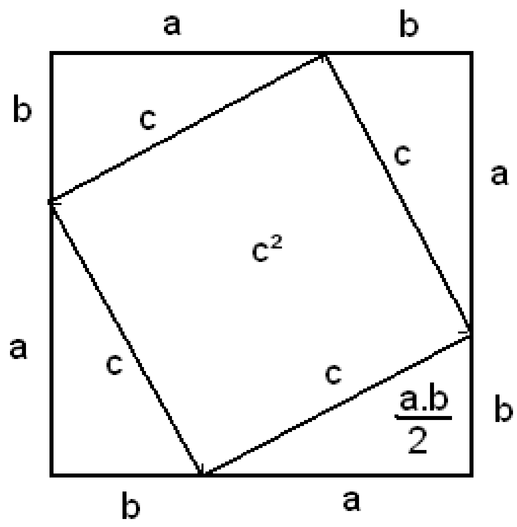
Outros historiadores da matemática sugerem a seguinte demonstração geométrica como viável para Pitágoras. Sejam os diagramas abaixo:

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)



(I)



(II)

Do diagrama (I) tem-se: $a + b)^2 = a^2 + b^2 + \frac{4(ab)}{2} = a^2 + b^2 + 2ab$

Do diagrama (II) tem-se: $(a + b)^2 = c^2 + \frac{4(ab)}{2} = c^2 + 2ab$

Logo, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$. Consequentemente, $a^2 + b^2 = c^2$.

Observa-se que fazendo a=b tem-se a demonstração particular a partir dos ladrinhos egípcios.

(fim das notas extras)

- Enquanto Tales abre a via por suas tentativas tanto de caráter geral, quanto próximas da realidade sensível, Pitágoras e os pitagóricos estabelecem princípios procurando resultados abstratamente e pela <u>inteligência pura</u>.

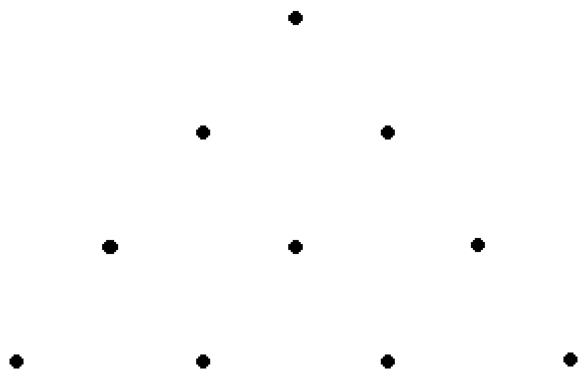
<u>Os números na escola pitagórica</u>

- Os números são considerados por eles-mesmos, são classificados e são estabelecidas relações entres eles;
- Cada número é explicitado sob uma configuração geométrica determinada que o permite colocá-lo em uma categoria dessa configuração;
- Os números eram representados por pontos ou alfas dispostos geometricamente;
- <u>Unidade</u> (em grego <u>monás-mônada</u>) – excluído dos números porque não é uma quantidade;
- <u>Número dois</u> (em grego <u>díada</u>) – primeiro número par e feminino, origem da oposição entre o eu e o não-eu;
- <u>Número três</u> (em grego <u>tríada</u>) – primeiro número ímpar e masculino;
- <u>Número quatro</u> (em grego <u>tétrada</u>) – simboliza a justiça e a equidade, primeiro número obtido pela soma de dois números iguais (2+2=4);
- <u>Número cinco</u> (em grego <u>pentada</u>) – simboliza o casamento (união do dois, primeiro número feminino, com o três, primeiro número masculino);
- <u>Número dez</u> (em grego <u>década</u>) – número sagrado

Triângulo

Sagrado

(em grego tetractis)



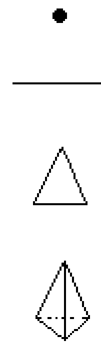
$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

1 representa o ponto

2 representa a linha

3 representa a superfície

4 representa o volume



(Analogia entre os números e entes geométricos)

- A Aritmética grega é decimal e aditiva, a babilônia é sexagesimal posicional

- Extensão

  - não é contínua;
  - é constituída por unidades indivisíveis (pontos) separadas por "intervalos";
  (Aritmética: ciência das quantidades descontínuas)

- Os pitagóricos desenvolveram:

  - a teoria dos números pares e ímpares;
  - os números figurados poligonais, piramidais e poliedrais;
  - a teoria dos números perfeitos, amigáveis, abundantes e deficientes;
  - em ligação com a música eles desenvolveram diferentes médias;
  - a teoria dos números primos (certamente porque estudaram a noção de divisor e os números perfeitos);
  - desenvolveram um algoritmo para identificar inteiros positivos a, b, c tais que $a^2 + b^2 = c^2$
  - estabeleceram uma teoria da relação e da proporção para os números (inteiros positivos):

    1) Número e as operações fundamentais

       a) Definição de número: um número é uma quantidade composta de unidades;
       b) Definição de adição: a formação de uma nova quantidade de unidades a partir de duas quantidades dadas;
       c) Definição de multiplicação: adição repetida.

    2) Relação e proporção

       a) Caracterização de relação: relação entre múltiplos/partes de números;
       b) Definição de proporcionalidade (mesma relação): números são proporcionais quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou igual a mesma parte d segundo que o terceiro o é do quarto.

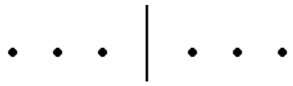
    3) Critério de igualdade de relações

       a) $a:b = c:d$ se, e somente se, $ad=bc$ $\quad (a,b,c,d \in \mathbb{Z}_+)$

Números pares e números ímpares

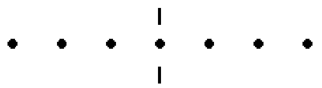
- Os números pares eram representados por duas sequências de uma mesma quantidade de pontos.

  Exemplo:

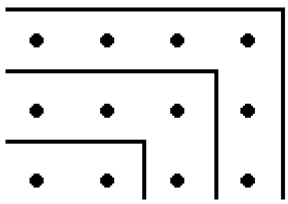
   (6)

- Os números ímpares tinham um ponto a mais que impedia a partição (divisão) em dois

  Exemplo:

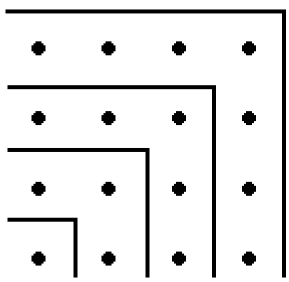
   (7)

- Números pares – crescimento determina um retângulo



2, 4, 6, ...

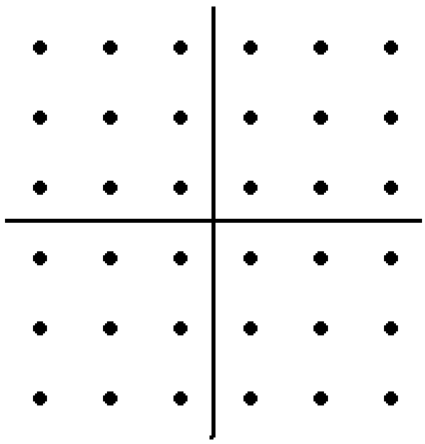
- Números ímpares – crescimento determina um quadrado



1, 3, 5, 7, ...

- Algumas proposições obtidas a partir dos números pares e ímpares:

  - toda soma de números pares é um número par;
  - a soma de um número par de números ímpares é par;
  - a soma de um número ímpar de números ímpares é ímpar;
  - em subtração, a diferença de dois números de mesma paridade é par;
  - o produto de um número par multiplicado por um número par é par;
    Corolário: o quadrado de um número par é um número par.
  - o quadrado de um número par é particionado em quatro partes iguais;



$Q_6 = 36$

  - o quadrado de um número ímpar diminuído de uma unidade é particionado em quatro partes iguais;
  - se um número ímpar mede um número par, ele mede sua metade.

Números figurados

- Os pitagóricos desenvolveram uma classificação dos números baseada em configurações geométricas determinadas através de unidades materiais (pontos). Essas configurações, caracterizam os chamados números figurados;
- Os números figurados estabelecem uma maneira de se modelar a natureza.

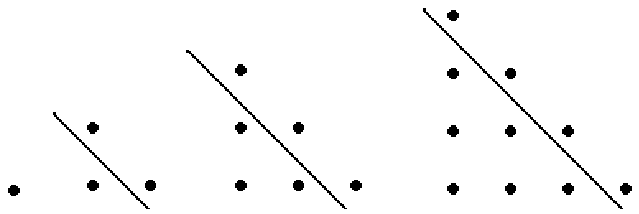
Números figurados $\begin{cases} poligonais\ (\ no\ plano) \\ piramidais\ e\ poliedrais\ (\ no\ espaço) \end{cases}$

- Os números figurados fazem aparecer de maneira imediata as propriedades dos números categorizados em sequências, a partir de configurações geométricas(*);

- **Números figurados poligonais**

Fato: Existe uma estreita relação entre as progressões aritméticas cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é um inteiro positivo e os números poligonais.

- Números triangulares



e assim por diante

1   1+2=3   1+2+3=6   1+2+3+4=10

Gnomons(**): 1,2, 3, 4, ... (PA de razão 1)
(sequência gnômica dos números triangulares)

(*) Esta representação dos números tinha o mérito de exibir propriedades independentes de toda base de numeração.

(**) Gnomon (em grego gnômôn-marcador) – é um número que adicionado a um termo de uma classe consecutiva de números produz o elemento seguinte dessa classe, isto é, o elemento poligonal seguinte com a mesma configuração geométrica.

$T_1 = 1$

$T_2 = 1 + \mathbf{2} = 3$

$T_3 = 1 + 2 + 3 = 3 + \mathbf{3} = 6$

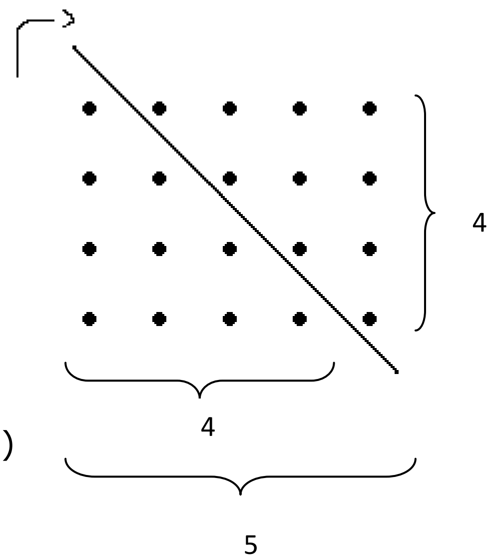
$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 6 + \mathbf{4} = 10$

.

.

.

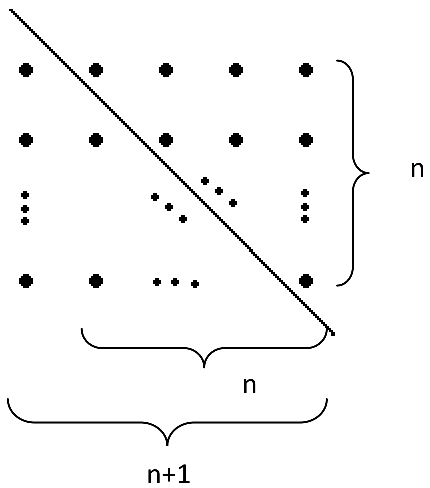
$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n-1)}{2} + \mathbf{n} = \frac{n(n+1)}{2}$



$$\frac{4.5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Rotação de 180°
(reproduz o triângulo)

Generalizando:



$2\,T_n = n(n+1)$

$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Nota: 1 é considerado como primeiro termo da sequência de todo os números figurados, bem como de todas as sequências gnômicas correspondentes.

Expressão geral de um número figurado plano

Sejam m, n $\in \mathbb{Z}_+$. Um número (m+2)-agonal é um número da forma

$$m\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+\ n$$

Exemplo:

Números (1+2)-agonais $\rightarrow$ números triangulares

m=1 $\rightarrow 1\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+n=\frac{n^2-n}{2}+n$

n=1 $\rightarrow$ $\frac{1^2-1}{2}+\ 1=1$

n=2 $\rightarrow$ $\frac{2^2-2}{2}+\ 2=3$

n=3 $\rightarrow$ $\frac{3^2-3}{2}+\ 3=6$

n=4 $\rightarrow$ $\frac{4^2-4}{2}+\ 4\ =10$

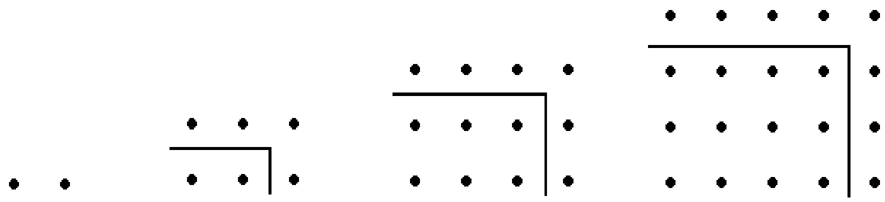
...

Exercício: Demonstre as proposições abaixo utilizando a expressão geral acima.

1) O n-ésimo número pentagonal pode ser escrito como três vezes o (n-1)-ésimo número triangular mais n;
2) O n-ésimo número quadrado é a soma do (n-1)-ésimo com o n-ésimo números triangulares

<u>Números oblongos</u> (do latim <u>oblongus</u> - retangular)

Um número oblongo é um número cuja configuração geométrica pode ser disposta de maneira a formar um retângulo tendo uma coluna a mais que as linhas.



e assim por diante

2   2 + 4 = 6   2 + 4 + 6 = 12   2 + 4 + 6 + 8 = 20

$O_1 = 2$ (=1x2)

$O_2 = 2 + \mathbf{4} = 6$ (=2x3)

$O_3 = 2 + 4 + 6 = 6 + \mathbf{6} = 12$ (=3x4)

$O_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 12 + \mathbf{8} = 20$ (=4x5)

...

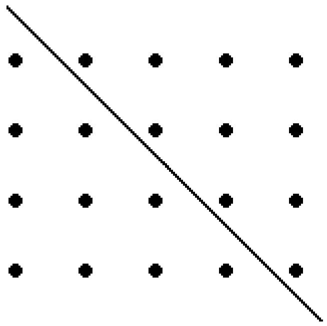
$O_n = n(n+1)$

Gnomos: 4, 6, 8, ...

Obs.:

1) Os números oblongos são pares;
2) Reagrupando os pontos dos números oblongos se constata uma reação interessante entre os números oblongos e triangulares: um n-ésimo número oblongo é a soma de dois triangulares de ordem n. Daí, $O_n = 2T_n$, ou seja, $n(n+1) = 2T_n$ e, consequentemente, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$;

Assim, por exemplo, para o número oblongo 20, temos:



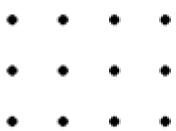
20 = 2x10

$O_4 = 2T_4$

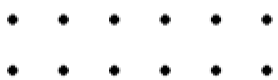
Divisibilidade

Os pontos das configurações geométricas de certos números podem ser reagrupados de diferentes maneiras.

Exemplo: Consideremos o número oblongo 12

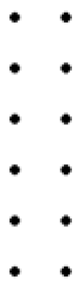


12

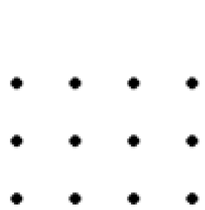


12 = 2 x **<u>6</u>**

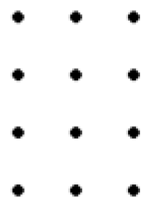
(dois 'pacotes' de agrupa-
-mentos por seis pontos)



12 = 6 x **<u>2</u>**



12 = 3 x **4**



12 = 4 x **3**

Definição: Um número inteiro positivo n é divisível por um número inteiro positivo **a** se existe um número inteiro positivo **b** tal que n = a x b.

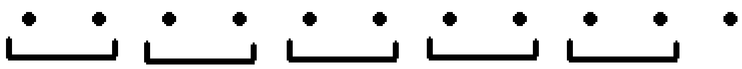
Números Lineares

(números primos – em grego aritmoi protoi)

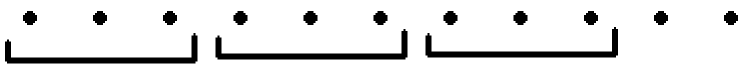
Para certos números é absolutamente impossível de fazer agrupamentos iguais de seus pontos. Chamam-se por isso números lineares, identificados atualmente como números primos (os outros são ditos números secundários). Assim um número primo é um número cujos pontos só podem se agrupar de modo linear.

Exemplo: Seja o número 11

Agrupamento por 2: impossível



Agrupamento por 3: impossível



Agrupamento por 4: impossível

Agrupamento por 5: impossível

Agrupamento por 6: impossível

Agrupamento por 7: impossível

Agrupamento por 8: impossível

Agrupamento por 9: impossível

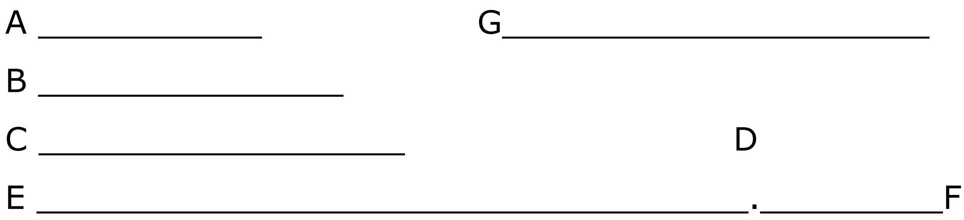
Agrupamento por 10: impossível

<u>Definição</u>: Um número primo é um número inteiro positivo maior do que 1 que só é divisível por 1 e por ele mesmo.

A infinidade dos números primos

Proposição 20 – Livro IX dos Elementos de Euclides:

" Os números primos são mais numerosos que toda quantidade proposta de números primos."



(o texto de Euclides traduzido)	(uma transcrição do texto mais moderna, acompanhada de alguns comentários explicativos)
Sejam os números primos propostos A, B, C. Eu digo que os números primos são mais numerosos que A, B, C. Com efeito, que seja tomado o menor (número) medido por A, B, C, e que seja DE e que a unidade DF seja acrescentada a DE. Então ou bem EF é primo ou bem não. De início que ele seja primo; então foram encontrados os números primos A,B, C, EF mais numerosos que A, B, C. Mas então que EF não seja primo; ele é então medido por um certo número primo (Proposição 32- Livro VII: "Todo número ou é primo ou é medido por algum número primo"). Que ele seja medido pelo (número) primo G. Eu digo que G não é o mesmo que um qualquer dos A, B, C. Com efeito, se é possível, que ele o seja. Ora A, B, C medem DE; então G mede também DE. Mas ele mede também EF. Ele medirá também sendo	Sejam A, B, C três números primos (distintos. Eu digo que existem mais de três números primos. O menor número medido por A, B, C (nós dizemos hoje o <u>mínimo múltiplo comum de A, B, C</u>) é o produto ABC, pois estes três números são primos. Façamos N = ABC + 1 1) Se N é primo, N sendo por construção distinto de A, de B e de C (Euclides não sente necessidade de precisar esta parte), nós temos agora quatro números primos distintos: A,B, C e N. 2) Se N não é primo, N admite ao menos um divisor primo (Euclides demonstra isso na Proposição 32- Livro VII). Seja então G um divisor primo de N: demonstremos por absurdo, que G é distinto de A, de B e de C.

um número, a unidade DF restante; o que é absurdo: G não é então o mesmo que um dos A, B, C. E por hipótese ele é primo. Então foram encontrados os números primos A, B, C, G mais numerosos que a quantidade proposta dos A, B, C. É isso que se precisava demonstrar.	Suponhamos com efeito que G = A ou G = B ou G = C. O número G é divisor de ABC e de N, e por consequência um divisor da diferença N – ABC que vale 1. Ora um número primo G não pode dividir 1, tem-se então $G \neq A$, $G \neq B$ e $G \neq C$. Então A, B, C e G são quatro números primos distintos. Partindo dos três números primos A, B, C, nós encontramos nos dois casos

Obs.:

1) O enunciado é um enunciado geral, como indica sua formulação: "(...) toda quantidade de números primos proposta". Euclides só tomando três números faz uma demonstração em aparência particular, mas implicitamente geral. A demonstração se generaliza indexando-se os números primos.

Exercício: Faça a demonstração geral.

2) No início da demonstração de Euclides está escrito: "sejam os números primos A, B, C." O enunciado da proposição nos convida a ler "sejam n números primos distintos", onde **n** designa um inteiro positivo qualquer. Isso não significa que se sabe que a reserva de números primos é ilimitada (senão, o que se precisaria demonstrar?), mas que se vai demonstrar que se tem n números primos, então pode-se produzir um a mais.
3) Na segunda coluna, observa-se que o produto ABC é <u>o menor número medido por A, B e C</u> pois que A, B e C são números primos.

Questão: Por que Euclides não faz uso do produto, o que é mais direto?

A definição da multiplicação dos números aparece nas definições que abrem o Livro VII dos Elementos:

Definição 15: "Um número é dito multiplicar um número quando, tanto há de unidades nele, tanto de vezes o multiplicado é acrescentado [a ele mesmo], e produzem um certo número."

Dito de outro modo: a soma de **p** termos iguais a **n** é n x p.

Euclides acrescenta:

Definição 16: "E quando dois números, sendo multiplicados um e outro, produzem um certo número, o produto é chamado plano, e os números que são multiplicados um e outro, seus lados."

Definição 17: "E quando três números sendo, sendo multiplicados um e outro, produzem um certo número, o produto é sólido, e os números que são multiplicados ume outro são seus lados."

O produto tem então, uma natureza geométrica que é um obstáculo a sua generalização: pode-se multiplicar dois números, multiplicar o produto por um terceiro número, depois de novo esse produto por um quatro, e assim sucessivamente, mas não se pode fazer diretamente o produto de mais de três números em um espaço que só tem três dimensões.

Por outro lado, o Mínimo Número (Comum) Medido por dois números **A** e **B** é um número que escapa a essa interpretação geométrica. Assim, nada impede de determinar o MNCM por três ou mais números. Euclides procede para três números na Proposição 36 do Livro VII, mas é uma generalização (implícita) desta proposição que ele faz uso na demonstração da Proposição 20 do Livro IX.

Situação do pensamento matemático dos pitagóricos quanto a questão da incomensurabilidade

- A incomensurabilidade, para todos os efeitos foi um problema não resolvido para os pitagóricos. Consequentemente, impossível de ser integrado na sua teoria dos números que não concebia sua existência.
- Por isso, a incomensurabilidade não foi integrada na lista pitagórica dos 10 pares de opostos:

Limitado e ilimitado

Um e múltiplo

Em repouso e em movimento

Reto e curvo

Bem e mal

Ímpar e par

Direita e esquerda

Macho e fêmea

Luz e trevas

Quadrado e oblongos (retângulo)

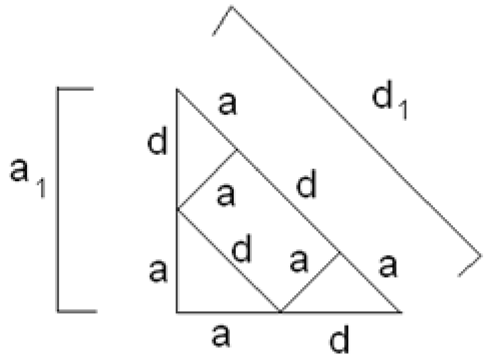
(lista expressa na obra "Metafísica" de Aristóteles)

- Essa situação é compreensível: os pitagóricos se apóiam sobre o princípio empírico e intuitivo de que toda grandeza corresponde inevitavelmente a um número e a uma medida, isto é, toda grandeza é necessariamente comensurável com uma unidade de medida.
- Com as grandezas incomensuráveis é toda visão organizada do mundo instaurada pelos pitagóricos que está em cheque.

<u>Obs</u>.: os gregos não concebiam a ideia de um "número irracional", mas somente a ideia de grandezas incomensuráveis.

- Os pitagóricos, por outro lado, estavam conscientes das relações de incomensurabilidade nas figuras regulares;
- Além disso, na tentativa de compreender essas grandezas, é provável que eles tenham encontrado o <u>algoritmo de aproximação progressiva</u> (método das <u>diagonais racionais</u> (em grego <u>diametron reton</u>) e das diagonais irracionais (em grego <u>diamentron</u> <u>arrêton</u>)) explanado por <u>Teão de Esmirna</u> (1ª metade do século II d.C.) na obra "Exposição dos conhecimentos matemáticos úteis para a leitura de Platão".

Seja um falso triângulo retângulo isósceles. Considerando a figura abaixo, trata-se de introduzir uma comensurabilidade fictícia supondo o lado a=1 e a diagonal d=1 (*), construindo a partir daí figuras que se aproximam cada vez mais de um triângulo retângulo isósceles.



<u>Obs. Importante</u>:

Esse algoritmo representa a passagem da <u>medida pontual</u> para a <u>medida linear</u>.

Onde:

$a_1 = a + d$
$d_1 = 2a + d$

(*) a unidade sendo o começo de todas as coisas, deve ser potencialmente um lado e uma diagonal.

Assim,

$d = 1$
$d_1 = 2a + d = 2 \times 1 + 1 = 3$
$d_2 = 2a_1 + d_1 = 2 \times 2 + 3 = 7$
$d_3 = 2a_2 + d_2 = 2 \times 5 + 7 = 17$
$d_4 = 2a_3 + d_3 = 2 \times 12 + 17 = 41$
...

$a = 1$
$a_1 = a + d = 1 + 1 = 2$
$a_2 = a_1 + d_1 = 2 + 3 = 5$
$a_3 = a_2 + d_2 = 5 + 7 = 12$
$a_4 = a_3 + d_3 = 12 + 17 = 29$
...

Através do teorema de Pitágoras estabelecemos as diferenças entre os quadrados das diagonais racionais e os quadrados das diagonais irracionais:

$d_1^2 = 9$	$a_1^2 + a_1^2 = 2a_1^2 = 8$	$(d_1^2 - 2a_1^2 = +1)$ (1)
$d_2^2 = 49$	$a_2^2 + a_2^2 = 50$	$(d_2^2 - 2a_2^2 = -1)$ (2)
$d_3^2 = 289$	$a_3^2 + a_3^2 = 288$	$(d_3^2 - 2a_3^2 = +1)$
$d_4^2 = 1681$	$a_4^2 + a_4^2 = 1682$	$(d_4^2 - 2a_4^2 = -1)$
...	...	(...)

Aparece aqui uma prova periódica (+1, -1, +1, -1, ...) da incomensurabilidade. Além disso, observa-se que $\sqrt{2}$ está sempre enquadrado por excesso e por falta por <u>relações racionais</u> (em grego <u>lógoi</u>):

$\frac{d}{a} = 1$ (por falta), $\frac{d_1}{a_1} = \frac{3}{2}$ (por excesso), $\frac{d_2}{a_2} = \frac{7}{5}$ (por falta), $\frac{d_3}{a_3} = \frac{17}{12}$ (por excesso), $\frac{d_4}{a_4} = \frac{41}{29}$ (por falta), ... [o limite não é jamais atingido] (3).

- Por outro lado, é interessante observar que em uma primeira fase da escola pitagórica a aritmo-geometria(4) substituiu <u>uma solução real</u> para o problema da relação entre a hipotenusa e o cateto de um triângulo retângulo isósceles. Assim, se tomarmos um número oblongo, vemos que ele pode ser dividido em dois números triangulares iguais, enquanto que um número quadrado em dois desiguais.

(1) $\leftrightarrow 2a_1^2 - d_1^2 = -1$
(2) $\leftrightarrow 2a_2^2 - d_2^2 = +1$

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

(3) Este método de encontrar aproximações sucessivas para o valor de $\sqrt{2}$ corresponde a encontrar todas as soluções inteiras das equações:

$$\underbrace{(2x+y)^2 - 2(x+y)^2 = 2x^2 - y^2}_{\text{Proposição 10 – Livro II dos Elementos de Euclides}} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

[Proclo indica que o "procedimento dos números laterais e diagonais", que ele associa explicitamente aos pitagóricos, pode-se ver geometricamente como resultante da Proposição 10 do Livro II dos Elementos de Euclides (proposição, pela associação de Proclo, já conhecida antes de Euclides), cuja interpretação algébrica é a identidade acima], casos particulares da equação diofantina de Pell(*)-Fermat(**), onde x = lado e y = diagonal.

(4) isto é, uma solução pontual figurada

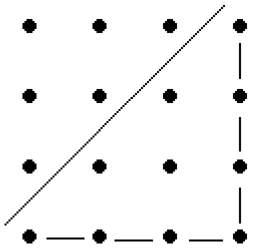
(*) John Pell – inglês – 1601 à 1685.

(**) Uma equação diofantina (de Diofanto de Alexandria) é uma equação com várias variáveis a coeficientes inteiros cujas soluções procuradas são inteiros (Aritmética).
Uma equação de Pell (atribuição errada dada por Euler) – Fermat é uma equação diofantina quadrática da forma x^2 - -ny^2 =m, onde $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \neq N^2$, $N \in \mathbb{Z}_+$ e $m \in \mathbb{Z}$. Uma forma muito estudada da equação de Pell-Fermat está identificada aos casos onde $m = \pm 1$.
Fermat: $x^2 - ny^2 = \pm 1$ tem uma infinidade de soluções inteiras (afirmação verdadeira e provada por Joseph-Louis Lagrange (francês – 1736 à 1813).

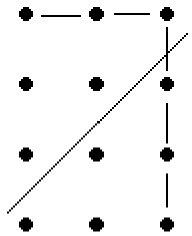
(fim das notas extras)

Exemplo visual:

Número quadrado 16



Número oblongo 12



Pela "divisão" desigual, pode se vislumbrar um problema (→ a incomensurabilidade) na relação entre a hipotenusa e o cateto do triângulo retângulo isósceles.

- O algoritmo acima nos mostra que diante da incomensurabilidade, é necessário estabelecer relações cada vez mais precisas, ao infinito.

- Uma verdadeira demonstração da incomensurabilidade da diagonal do quadrado com seu lado (ou equivalentemente da hipotenusa do triângulo retângulo isósceles com seu cateto) formulada pelos gregos, é exposta na obra "Primeiros Analíticos" de Aristóteles, anterior a do Livro X dos Elementos de Euclides, que a reescreverá. Essa demonstração "inaugura" provavelmente a matemática puramente dedutiva. Ela é feita através da chamada demonstração apagógica (do grego apagoguê – desvio absurdo) (demonstração por absurdo). Deve-se observar que embora a terminologia da demonstração tenha um caráter pitagórico pelo seu aritmetismo e pela oposição par-ímpar, ela não pode ser trazida para a primeira fase do pitagorismo (antes da dissolução da escola no meio do século V a.C.). Para os historiadores ela é tardia, pois integra o raciocínio por absurdo que foi certamente desenvolvido pela Escola Eleática.

Nota: Será usado o fato de que o quadrado de um número par é par, e de que o quadrado de um número ímpar é ímpar.

Seja d a diagonal de um quadrado de lado l. Pelo teorema de Pitágoras $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$. Desejamos mostrar que d não é comensurável com l, isto é, que a relação de d com l não tem uma unidade de medida comum (não é racional).

Suponhamos o contrário (por absurdo): $\frac{d}{l}$ pode ser escrito como uma relação de dois números inteiros positivos p e q, isto é, $\frac{d}{l} = \frac{p}{q}$. Vamos considerar também que a relação $\frac{p}{q}$ está na forma mais reduzida (mdc(p,q)=1). Logo, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$, e $p^2 = 2q^2$. Consequentemente, p é par, pois seu quadrado, $2q^2$, o é. Como $\frac{p}{q}$ é a forma reduzida, q deve ser um número ímpar (senão p e q seriam divisíveis por 2). Temos então que p é par e q é impar. Entretanto como p=2k, $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$(2k)^2 = 2q^2$$

$$4k^2 = 2q^2$$

$$2k^2 = q^2$$

então q^2 é par.

Isso é uma contradição, pois como q é impar, q^2 também o é, mas a última igualdade mostra que q^2 é par. Com isso a hipótese de que $\frac{p^2}{q^2} = 2$ é falsa.

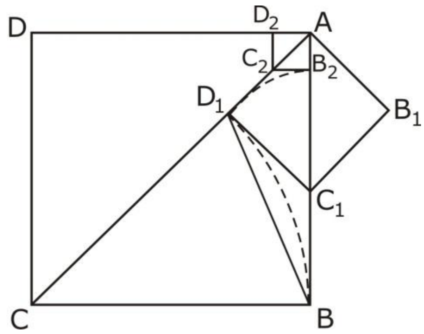
- O procedimento de <u>antifairese</u>(*) (em grego <u>anthiphairesis</u> – <u>anto</u>= recíproco – <u>hipo</u>=sub – <u>hairesis</u>=tração) (procedimento das substrações recíprocas) (Demonstração geométricas da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado)(**)

Este procedimento, anterior a Euclides, está na Proposição 2 do Livro X dos Elementos: "Se, quando a menor de duas grandezas é <u>continuamente subtraída</u> da maior, repetidamente, e o resto <u>nunca mede</u> o resto precedente, as grandezas são incomensuráveis." Proclo de Licia disse que "os pitagóricos propuseram este elegante procedimento sobre os diâmetros (→ as diagonais) e os lados (...)"

(*) provavelmente introduzido por Teeteto

(**) equivalente ao procedimento da página 77, com CB = a + d e AC = 2a + d na figura acima.

Demonstração de que a diagonal e o lado do quadrado são incomensuráveis



(Esta demonstração é apresentada em um manual de matemática do século XIX, "Algebra: an elementary text-book for the higher classes of secundary schools and for colleges" (1826), de George Chrystal (escocês – 1815 à 1911), e está construída utilizando um método de raciocínio essencialmente equivalente a esse da Proposição 2 do Livro X)

Seja o quadrado ABCD de lado AB e diagonal AC. Suponhamos que AB e AC sejam comensuráveis, logo existe um segmento AP que mede AB e AC, ou seja, AB e AC são múltiplos (inteiros) de AP. Seja D_1 um ponto em AC tal que D_1C = CB (= AB = AD). Marcando o ponto C_1 sobre AB, com D_1C_1 perpendicular a AC, podemos construir um quadrado $AB_1C_1D_1$ de lados AD_1=D_1C_1 e diagonal AC_1 sobre AB. Isto é possível, pois $\widehat{CAB} = \widehat{D_1AB}$ é $\frac{1}{2}$ reto e $\widehat{AD_1C_1}$ é reto, logo $\widehat{AC_1D_1}$ é $\frac{1}{2}$ reto e o triângulo AD_1C_1 é isósceles com AD_1 = D_1C_1.

Mas como, por construção, BC = D_1C, o triângulo BCD_1 é isósceles e temos $\widehat{D_1BC} = \widehat{BD_1C}$, implicando $\widehat{D_1BC_1} = \widehat{BD_1C_1}$. Isto significa que o triângulo D_1C_1B também é isósceles e podemos concluir que BC_1 = D_1C_1.

Portanto AD_1 = AC – D_1C = AC – AB e AC_1 = AB – BC_1 = AB – D_1C_1 = AB – AD_1 são o lado e a diagonal de um quadrado de dimensões menores do que a metade daquelas do quadrado original. Em notação atual, como AB e AC foram supostos comensuráveis com AP, podemos escrever: AB = pAP e AC = qAP. Sendo assim, AD_1 = qAP – pAP = (q – p)AP e AC_1 = pAP – (q – p)AP = (2p – q)AP. Logo, o lado e a diagonal do novo quadrado são também comensuráveis com relação a AP, com $AD_1 < \frac{1}{2}$ AD = $\frac{1}{2}$ pAP e $AC_1 < \frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ qAP. Podemos repetir o mesmo procedimento infinitas vezes, e construir infinitos quadrados com lado e diagonal comensuráveis.

Em linguagem atual, isto equivaleria a dizer que entre 0 e q (medida de AC)(*), podemos encontrar infinitos inteiros, o que não é possível. Podemos chegar à mesma conclusão observando que, continuando o processo indefinidamente, para qualquer que seja a escolha inicial do segmento AP, podemos obter um quadrado de lado AD_n e diagonal AC_n comensuráveis em relação a AP, tais que $AD_n < AC_n < AP$, o que é uma contradição. (**)

Obs.:

1. Nenhuma destas demonstrações acima emprega o número $\sqrt{2}$, pois não se quer saber quanto mede a diagonal e sim demonstrar que ela é incomensurável com o lado do quadrado.
2. É uma tendência dizer que a necessidade de se demonstrar teria se originado do problema da incomensurabilidade.

Nota: A partir da descoberta dos incomensuráveis, a identificação entre grandezas e números, de modo geral, não será mais possível.

Proclo: "A teoria das grandezas comensuráveis foi desenvolvida, primeiramente pela aritmética e depois, por imitação, pela geometria. Por esta razão, ambas as ciências definem grandezas comensuráveis como aquelas que estão uma para outra na razão de um número para outro número, o que implica que a comensurabilidade existiu primeiro entre os números."

Assim, os pitagóricos teriam forjado a noção de comensurabilidade para números, uma vez que a unidade é a medida de todos os números. Em seguida, eles teriam estendido esta noção para grandezas, mas não puderam encontrar uma medida comum para todas as grandezas. Acredita-se que o procedimento de antifairese teve um papel fundamental nestas definições, uma vez que era usado para encontrar uma medida comum a dois números ou a duas grandezas.

(*) ou entre O e p (medida de AB)

(**) Eis uma outra maneira de concluir o argumento acima. A passagem do quadrado inicial ABCD para o quadrado $AB_1C_1D_1$ mostra que se está em presença de uma série de quadrados que cada vez menores e de lados respectivos, por exemplo,

$$AD > AD_1 > AD_2 > \dots$$

Cada um deles sendo um múltiplo de mesmo segmento AP:

$$p\,AP > p_1\,AP > p_2\,AP > \dots$$

A sequência $p>p_1>p_2>\dots$ seria então uma sequência infinita estritamente decrescente de números naturais, o que é um absurdo. Esta maneira repousa sobre o mesmo princípio que é o método dito de descida infinita, tornado célebre por Fermat (rever página 50). Nele se utiliza o fato de que a ordem no conjunto dos naturais satisfaz a propriedade hoje conhecida sob o nome de "boa ordem": todo subconjunto de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento. Logo, não é possível que uma sequência infinita de números naturais seja estritamente decrescente.

É importante ressaltar que, quando este procedimento funciona (→ termina), e permite encontrar a medida comum a dois segmentos, pode-se reduzir a geometria à aritmética. Mas quando a antifairese não termina, o que caracteriza o caso incomensurável, a definição de proporção como igualdade de relações não será mais aceita e passará a ser válida apenas para o caso particular de grandezas comensuráveis. Este procedimento permitiu, junto com a demonstração pela oposição par-ímpar, que se chegasse à incomensurabilidade entre duas grandezas.

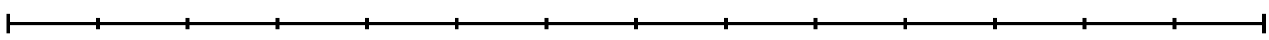
O procedimento de antifairese nos Elementos de Euclides: o "algoritmo de Euclides"

Lê-se na Proposição q do Livro VII: "Dois números desiguais sendo propostos, o menor sendo, a cada vez continuamente retirado (subtraído) do maior, se o resto nunca mede o que o precede até que se chegue a unidade, tão dizemos que os números são primos entre si".

Esta proposição é a primeira aparição do dito "algoritmo de Euclides". Esse algoritmo aparece ainda na Proposição 2 do mesmo livro: "Dois números são primos entre si sendo propostos, encontrar a maior medida comum".

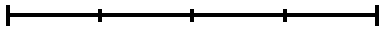
De fato, o modo como Euclides enuncia esta proposição emprega uma linguagem de grandezas. Os dois números dados são segmentos de reta A e B dos quais queremos encontrar a maior medida comum. Se B não mede A, quando o menor dos números, digamos B, é retirado continuamente do maior, A, resta algum número que mede o precedente. A partir daí vamos construindo geometricamente a diferenças entre os restos sucessivos. Visualmente:

A (segmento inteiro)



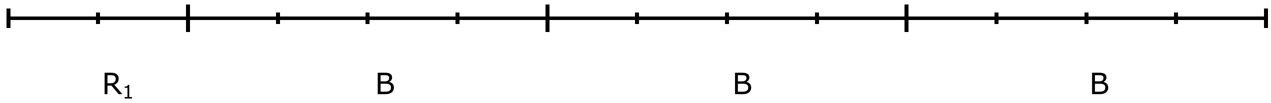
m(A) = 14

B (segmento inteiro)

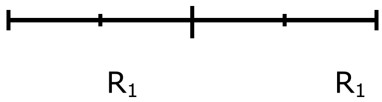


$m(B) = 4$

A



B



$B = n_1R_1 + R_2$, $R_2 < R_1$

$n_1 = 2$

$m(R_2) = 0$

$(B - n_1R_1 = R_2)$

$A = n_0B + R_1$, $R_1 < B$ (*)

$n_0 = 3$

$m(R_1) = 2$

$(A - n_0B = R_1)$

A <u>maior medida comum</u> (→ MDC) entre os segmentos A e B é $m(R_1) = 2$.

No início do Livro X, através da Proposição 1, encontramos o mais antigo critério de convergência de sequências infinitas: "Duas grandezas desiguais sendo propostas, se se subtrai da maior uma parte maior que sua metade, se se subtrai do resto uma parte maior que sua metade, e se se faz sempre a mesma coisa, restará uma certa grandeza que será menor que a menor das grandezas propostas".

Na Proposição 2 deste mesmo livro, o algoritmo reaparece na forma ilimitada, isto é, ele não termina: "Se, quando a menor de duas grandezas é continuamente subtraída da maior, repetidamente, e o resto nunca mede o resto precedente, as grandezas são incomensuráveis."

Assim, através das proposições acima dos livros VII e X, podemos concluir se duas grandezas são comensuráveis ou incomensuráveis apenas de modo geométrico. Esta conclusão é fundamental para a concepção de geometria pelos gregos.

(*) A chamada "divisão euclidiana" (expressão criada por Bourbaki (ver página 231))

A prova de incomensurabilidade por "fração contínua"

Por meio da Proposição 2 do Livro X citada anteriormente para caracterizar o método de antifairese, pode-se estabelecer uma afinidade com a ideia de "fração contínua".

Inicialmente observa-se que para provar a incomensurabilidade por este método não é necessário de repetir indefinidamente a operação. Se após um certo número de subtrações sucessivas, os dois últimos restos obtidos (sejam **m** e **n**) têm a mesma relação que duas grandezas propostas (**a** e **b**), isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \qquad \left(\text{ou } \frac{a}{b} = \frac{n}{m}\right),$$

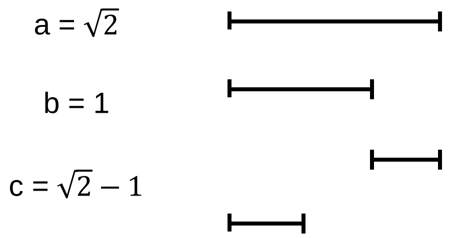
É evidente que, partindo daí, chega-se de novo à mesma situação, e assim sucessivamente ao infinito. A prova está feita.

Aplicando-o agora à duas grandezas a e b, com $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$, tem-se que o primeiro resto é $c = a - b = \sqrt{2} - 1$ que por sua vez subtraído de b dá um segundo resto $d = b - c = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$. Pode-se parar as subtrações a partir daí. Com efeito, os dois restos estão na mesma relação que a e b:

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{1 - \left(\sqrt{2} - 1\right)}{\sqrt{2} - 1}$$

Assim, para o caso particular de $\sqrt{2}$, a prova de incomensurabilidade pelo método de antifairese, está feita.

Pode-se visualizar os restos obtidos acima como na figura abaixo:



Agora, do caso particular acima, com a identidade $\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$, escreve-se:

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{1}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\sqrt{2} + 1}$$

Daí,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Substituindo, no segundo membro da igualdade, $\sqrt{2}$ pelo seu valor, tem-se

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + 1} = 1 + \frac{1}{2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)}$$

Continuando a eliminar $\sqrt{2}$ do denominador onde ela reaparece:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

Obtemos a fração contínua, que fornece os valores aproximados seguintes:

$$1,\ \ 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ \ 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5},\ \ 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}\ ,\ldots$$

Nessas aproximações sucessivas, reconhece-se os números do algoritmo de progressão sucessiva de Teão (página 77,78).

- Platão:
  → participa de um esforço de passar a questão da incomensurabilidade de 'escandalosa' entre os pitagóricos para causadora de um puro espanto (em grego taumazein(*)) intelectual próprio ao filósofo.
  → tenta desdramatizar matematicamente o conceito de incomensurabilidade mostrando que o que é incomensurável em comprimento é comensurável pelo quadrado (isto vale para números da forma $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \neq N^2$, $N \in \mathbb{Z}_+$)

(*) taumazein se vincula à palavra taumasmós que significa o olhar surpreendido → admiração que, por sua vez, está vinculada à palavra teoria que quer dizer ver com o espírito através do olhar → contemplação (isto é, a admiração assumida como experiência: surge o desejo de compreender.)
Platão: "É exatamente de um filósofo, este sentimento: se espantar. A filosofia não tem outra origem."

- Observações importantes:

  - A incomensurabilidade longe de ter paralisado o pensamento matemático, ela o desenvolveu: o espírito grego mobilizou todos seus recursos para encontrar soluções matematicamente e filosoficamente aceitáveis → assimilação intelectual das grandezas incomensuráveis. Entretanto, ela o deslocou completamente (o pensamento matemático) para a geometria.

  - A descoberta de que $\sqrt{2}$ não é um aritmós colocou fim ao projeto pitagóricos de aritmetização da geometria. Esse fim vai conduzir à forma axiomática de Euclides, destinada de uma parte a "salvar" o método da prova dedutiva e, de outra, a admitir a irredutibilidade da geometria à aritmética.

  - O desenvolvimento da matemática de um modo geral não é linear e nem cumulativo.

Um pouco mais sobre a questão da incomensuralidade

- Divisão da matemática pelas pitagóricos:

  Estrutura do quadrivium[*] (em latim – quatro vias) pitagórico:

$$\text{matemática}\begin{cases}\text{números (ou quantidade)}\begin{cases}\text{considerados por eles mesmos (Aritmética)}\\ \text{considerados em relação a outros números (Música)}\end{cases}\\ \text{grandezas (magnitudes)}\begin{cases}\text{estacionárias (ou em repouso)(Geometria)}\\ \text{em movimento (Astronomia)}\end{cases}\end{cases}$$

Tanto as quantidades quanto as grandezas deviam ser limitadas para servirem de objeto de estudo, uma vez que o ilimitado não convém ao pensamento.

---

[*] grupo das quatro artes liberais de caráter matemático

- Os tipos de ângulos formados pelo encontro de duas retas podem ser classificados segundo os princípios da lista pitagórica dos 10 pares de opostos. Os pitagóricos caracterizavam três tipos de ângulo: reto, agudo e obtuso. Mas para eles o primeiro tipo é superior aos demais, pois é caracterizado pela igualdade, ao passo que os outros são identificados segundo os critérios do maior ou do menor relativos ao ângulo reto. Como tudo aquilo que pode ser caracterizado a partir de critérios bem definidos é superior ao que depende de critérios relativos de mais e de menos, apenas o ângulo reto é produto do limitado, uma vez que é regulado pela igualdade, uma vez que é regulado pela igualdade com qualquer outro ângulo reto, pois os outros dois ângulos podem diferir dentro de uma mesma categoria. A perpendicularidade é também por isso um símbolo de pureza e de direção, pois, através dela medimos as alturas e definimos o ângulo reto.

- Esta explicação pode ajudar a entender porque os triângulos retângulos merecem lugar de destaque na doutrina pitagórica, uma vez que apenas eles contêm um ângulo reto (isto é, possuem dois lados perpendiculares). No entanto, como pudemos ver, o interesse dos pitagóricos neste teorema parece ser mais aritmético do que geométrico.

- Voltando à geometria, eles consideravam grandezas como linhas, superfícies e sólidos em geral. Estas grandezas eram identificadas a números dados pelo comprimento, área ou volume da grandeza em questão. As grandezas de mesa natureza deveriam possuir uma unidade de medida comum e cada grandeza seria, assim, identificada ao número inteiro (positivo) de unidades de medida que a compõem. A medida era, portanto, modo de associar grandezas a números e tornava possível a correspondência entre qualquer grandeza e um número inteiro, ou uma relação entre inteiros. Assim, se temos duas grandezas a serem comparadas, como "medir" significa essencialmente "comparar", precisamos subdividir uma das grandezas para obter uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes em cada uma das grandezas respectivamente. A possibilidade de se estabelecer uma correspondência entre uma grandeza e um número através do processo de medida irá fracassar com a descoberta das grandezas incomensuráveis. Quer dizer, medir é atribuir um número a uma grandeza, e a incomensurabilidade torna isto impossível. <u>Pois que essa atribuição, esse cálculo não é possível, resta-nos demonstrar a incomensurabilidade</u>.

Trecho do diálogo "Menão" de Platão

Calcular x demonstrar

Veremos como, antes de Euclides e Aristóteles, a necessidade de demonstração é proposta por Platão em seu diálogo intitulado *Menão*. Observamos como a própria definição do que é matemática, nesta época, foi influenciada pelo problema da incomensurabilidade.

Trecho do diálogo entre Sócrates, Menão e um escravo:

SÓCRATES (*voltando-se para o escravo ao mesmo tempo em que traça no solo as figuras necessárias à sua demonstração*): - Dize-me, rapaz: sabes o que é um quadrado?

ESCRAVO: - Sei.

SÓCRATES: - Não é uma figura, como esta, de quatro lados iguais?

ESCRAVO: - É.

SÓCRATES (*referindo-se às diagonais*): - E estas linhas, que cortam o quadrado ao meio, não são também iguais?

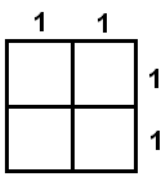
ESCRAVO: - São.

SÓCRATES: - Esta figura poderia ser maior ou menor, não poderia?

ESCRAVO: - Poderia.

SÓCRATES: - Se, pois, este lado mede dois pés e este também mede dois pés, quantos pés terá a superfície(1) deste quadrado? Repara bem: se isto for igual a dois pés e isto igual a um pé, a superfície não terá de ser o resultado de uma vez dois pés?

---

(1)- 

ESCRAVO: - Terá.

SÓCRATES: - Mas este lado mede também dois pés; portanto, a superfície não é igual a duas vezes dois pés?

ESCRAVO: - É.

SÓCRATES: - A superfície, por conseguinte mede duas vezes dois pés?

ESCRAVO: - Mede.

SÓCRATES: - E quanto iguala duas vezes dois pés? Conta e dize!

ESCRAVO: - Quatro, Sócrates.

SÓCRATES: - E não nos seria possível desenhar aqui uma outra figura, com área dupla e de lados iguais como[2] esta?

ESCRAVO: - Sim, seria.

SÓCRATES: - E quantos pés, então, mediria a sua superfície?

ESCRAVO: - Oito.

SÓCRATES: - Bem; experimenta agora responder ao seguinte: que comprimento terá cada lado de nova figura? Repara: o lado deste mede dois pés, quanto medirá, então cada lado do quadrado de área dupla?

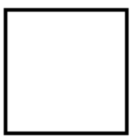
ESCRAVO: - É claro que mede o dobro daquele.

SÓCRATES (*dirigindo-se* a Menão): - Vês, caro Menão, que nada ensino, e que nada mais faço do que interrogá-lo? Este rapaz agora pensa que sabe quanto mede a linha lateral que formará um quadrado de oito pés. És da minha opinião?

MENÃO: - Sou.

SÓCRATES: - Mas crês que ele de fato saiba?

---

(2)- 

MENÃO: - Não, não sabe.

SÓCRATES: - Mas ele está convencido de que o quadrado da área dupla tem também o lado duplo, não é?

MENÃO: - Está, sem dúvida.

SÓCRATES: - Observa como ele irá recordando pouco a pouco, de maneira exata[*]. Responde-me (*disse voltando-se para o escravo*): tu dizes que uma linha dupla dá origem a uma superfície duas vezes maior? Compreende-me bem: não falo de uma superfície longa de um lado e curta do outro. O que procuro é uma superfície como esta[3], igual em todos os sentidos, mas que possua uma extensão dupla, ou mais exatamente, de oito pés. Repara agora se ela resultará do desdobramento de uma linha.

ESCRAVO: - Creio que sim.

SÓCRATES: - Será, pois, sobre esta linha que se construirá a superfície de oito pés[4], se traçarmos quatro linhas semelhantes?

ESCRAVO: - Sim.

SÓCRATES: - Desenhemos então os quatro lados. Esta é a superfície[5] de oito pés?

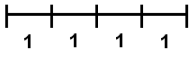
ESCRAVO: - É.

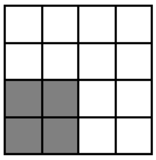
SÓCRATES: - E agora? Não se encontram, porventura, dento dela estas quatro superfícies, das quais cada uma mede quatro pés?

---

[*] Aprender é recordar-se das verdades que a alma já contemplou a sua existência não-terrena no mundo das Ideias (um, em grego, topos urânios que quer dizer lugar celeste) → teoria da reminiscência (em grego anamnêsis q eu é distinto de mnêmê, lembrança em grego)

[3] Quadrado como o da nota 2 da página anterior

[4]


[5]


ESCRAVO: - É verdade!

SÓCRATES: - Mas então? Qual é esta área? Não é o quádruplo?

ESCRAVO: - Necessariamente.

SÓCRATES: - O duplo e o quádruplo são a mesma coisa?

ESCRAVO: - Nunca, por Zeus!

SÓCRATES: - E que são, então?

ESCRAVO: - Duplo significa duas vezes; e quádruplo, quatro vezes.

SÓCRATES: - Por conseguinte, esta linha é o lado de um quadrado cuja área mede quatro a área do primeiro?

ESCRAVO: - Sem dúvida.

SÓCRATES: - E quatro vezes quatro dá dezesseis, não é?

ESCRAVO: - Exatamente.

SÓCRATES: - Mas, então, qual é o lado do quadrado de área dupla? Este lado dá o quádruplo, não dá?

ESCRAVO: - Sim.

SÓCRATES: - A superfície de quatro pés quadrados tem lados de dois pés?

ESCRAVO: - Tem.

SÓCRATES: - O quadrado de oito pés quadrados é o dobro do quadrado de quatro e a metade do quadrado de dezesseis pés, não é?

ESCRAVO: - É.

SÓCRATES: - E se lado, então, não será maior do que o lado de um e menor do que o lado de outro desses(6) dois quadrados?

ESCRAVO: - Será.

(6)- na próxima página

SÓCRATES: - Bem; responde-me: este[7] lado mede dois pés e este quatro?

ESCRAVO: - Sim.

SÓCRATES: - Logo, o lado da superfície de oito pés quadrados terá mais do que dois e menos que quatro pés.

ESCRAVO: - Tem.

SÓCRATES: - Experimenta então responder-me: qual é o comprimento desse lado?

ESCRAVO: - Três pés.

SÓCRATES: - Pois bem: se deve medir três pés, devemos acrescentar a esta linha a metade[8]. Não temos três agora? Dois pés aqui, e mais um aqui. E o mesmo faremos neste lado. Vê! Agora temos o quadrado de que falaste.

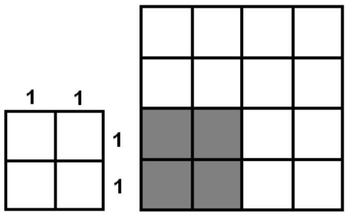
ESCRAVO: - Ele mesmo.

SÓCRATES: - Repara, entretanto: medindo este lado três és e o outro também três pés, não se segue que a área deve ser três pés vezes três pés?

ESCRAVO: - Assim penso.

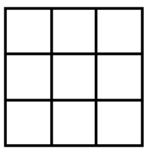
---

[6] Nota (5) da página anterior



[7] Refere-se aos lados respectivos das figuras desenhadas na nota 6.

[8]



SÓCRATES: - E quanto é três vezes três?

ESCRAVO: - Nove.

SÓCRATES: - E quantos pés deveria medir a área dupla?

ESCRAVO: - Oito.

SÓCRATES: - Logo, a linha de três pés não é o lado do quadrado de oito pés, não é?

ESCRAVO: - Não, não pode ser.

SÓCRATES: - E então? Afinal qual é o lado do quadrado sobre o qual estamos discutindo? Vês se podes responder a isto de modo correto! Se não queres fazê-lo por meio de contas, traça pelo menos na areia a sua linha.

ESCRAVO: - Mas, por Zeus, Sócrates, não sei!

SÓCRATES (*Voltando-se para Menão*): - Reparaste, caro Menão, os progressos que a sua recordação fez? Ele de fato nem sabia e nem sabe qual é o comprimento do lado de um quadrado de oito pés quadrados; entretanto, no início da palestra, acreditava saber, e tratou de responder categoricamente, como se o soubesse; mas agora está em dúvida, e tem apenas a convicção de que não sabe!
MENÃO: - Tens razão.
SÓCRATES: - E agora não se encontra ele, não obstante, em melhores condições relativamente ao assunto?

MENÃO: - Sem dúvida!

SÓCRATES: - Despertando-lhe dúvidas e paralisando-o como a tremelga(9), acaso lhe causamos algum prejuízo?

MENÃO: - De nenhum modo!

---

(9)- Tipo de peixe que emana descargas elétricas capazes de paralisar a presa. Em grego, *narkê*, raiz da palavra "narcótico".

SÓCRATES: - Sim, parece-me que fizemos uma coisa que o ajudará a descobrir a verdade! Agora ele sentirá prazer em estudar este assunto que não conhece, ao passo que há pouco tal não faria, pois estava firmemente convencido de que tinha toda razão de dizer e repetir diante de todos que a área dupla deve ter o lado duplo!

MENÃO: - É isso mesmo.

SÓCRATES: - Crês que anteriormente a isto ele procurou estudar e descobrir o que não sabia, embora pensasse que o sabia? Agora, porém, está em dúvida, sabe que não sabe e deseja muito saber!

MENÃO: - Com efeito.

SÓCRATES: - Diremos, então, que lhe foi vantajosa a paralisação?

MENÃO: - Como não!

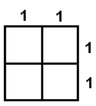
SÓCRATES: - Examina, agora, o que em seguida a estas dúvidas ele irá descobrir, procurando comigo. Só lhe farei perguntas; não lhe ensinarei nada! Observa bem se o que faço é ensinar e transmitir conhecimentos, ou apenas perguntar-lhe o que sabe. (E, ao escravo): Responde-me: não é esta[10] a figura de nosso quadrado cuja área mede quatro pés quadrados? Vês?

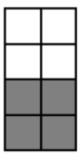
ESCRAVO: - É.

SÓCRATES: - A este quadrado, não poderemos acrescentar este outro[11], igual?

ESCRAVO: - Podemos.

---

(10)- 

(11)- 

SÓCRATES: - E este terceiro(12), igual a dois?

ESCRAVO: - Podemos.

SÓCRATES: - E não poderemos preencher o ângulo com outro quadrado(13), igual a estes três primeiros?

ESCRAVO: - Podemos.

SÓCRATES: - E não temos agora quatro áreas iguais?

ESCRAVO: - Temos.

SÓCRATES: - Que múltiplo do primeiro quadrado é a grande figura inteira?

ESCRAVO: - O quádruplo.

SÓCRATES: - E devíamos obter o dobro, recordaste?

ESCRAVO: - Sim.

SÓCRATES: - E esta linha traçada de um vértice a outro de cada um dos quadrados interiores(14) não divide ao meio a área de cada um deles?

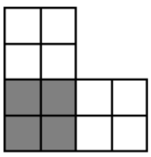
ESCRAVO: - Divide.

SÓCRATES: - E não temos assim quatro linhas que constituem uma figura(15) interior?

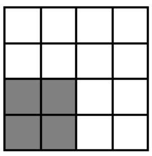
---

(12)- Nota (11) da página anterior

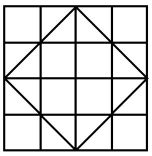
(13)-



(14)-



(15)-



(19)-

ESCRAVO: - Exatamente.

SÓCRATES: - Repara, agora: qual é a área desta figura?

ESCRAVO: - Não sei.

SÓCRATES: - Vê: dissemos que cada linha nestes quatro quadrados dividia cada um pela metade, não dissemos?

ESCRAVO: - Sim, dissemos.

SÓCRATES: - Bem; então, quantas metades temos(16) aqui?

ESCRAVO: - Quatro.

SÓCRATES: - E aqui(17)?

ESCRAVO: - Duas.

SÓCRATES: - E em que relação aquelas quatro estão para estas(18) duas?

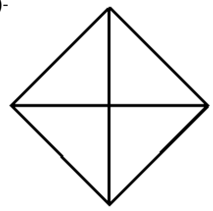
ESCRAVO: - O dobro.

SÓCRATES: - Logo, quantos pés quadrados mede esta(19) superfície?

ESCRAVO: - Oito.

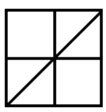
---

(16)-

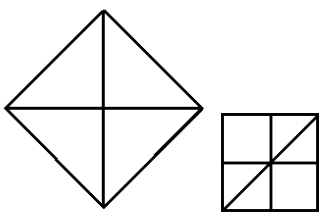


(17)- Nota 15 da página anterior.

(18)-



(19)-



SÓCRATES: - E qual é o seu lado?

ESCRAVO: - Esta linha[20].

SÓCRATES: - A linha traçada no quadrado de quatro pés quadrados, de um vértice a outro?

ESCRAVO: - Sim.

SÓCRATES: - Os sofistas dão a esta linha o nome de diagonal e, por isso, usando esse nome, podemos dizer que a diagonal é o lado de um quadrado de área dupla, exatamente como tu, ó escravo de Menão, o afirmaste.

ESCRAVO: - Exatamente, Sócrates!

Observamos, em primeiro lugar, que o escravo possui, seguramente, uma boa técnica para a realização de cálculos, uma vez que responde prontamente a cada pergunta sobre o resultado de uma multiplicação. Talvez soubesse utilizar o *gnomon* e as tábuas de operações. Sabia calcular os quadrados de 3 e 4. Talvez conhecesse até mesmo algumas triplas pitagóricas. O que o escravo não sabe então?

Para Sócrates, o conhecimento dos cálculos, que pode ser intermediado por tábuas como as dos babilônios, é associado à ignorância. Conhecer a resposta de modo satisfatório não é saber fazer os cálculos, mas sim saber <u>*mostrar*</u> sobre que linha deve ser construído o lado do quadrado que duplica a área do primeiro. Passo a passo é preciso ascender a um novo tipo de saber que não é calculatório nem algorítmico, é preciso mostrar a diagonal, e não importa nem mesmo que não seja possível calcular quanto ela mede.

---

(20)- Apontando a diagonal do quadrado acima.

Inicialmente, Sócrates havia perguntado *quanto* mede o lado do novo quadrado, o que importava era, ainda, uma quantidade. De repente, isso não importa mais. A pergunta sobre quanto mede esta linha não chega nem mesmo a ser evocada, talvez porque Sócrates saiba que esta medida não pode ser encontrada no universo dos números que eram admitidos até então. Mas mais do que isso. Ele quer introduzir o escravo a um novo tipo de conhecimento no qual é necessário mostrar sobre que linha deve-se construir o novo quadrado.

O universo da matemática é expandido para incluir o espaço abstrato. O que o espaço mostra ser possível, os números tornam impossível. O número e a grandeza tinham sido unidos pela filosofia pitagórica. Através da medida, as grandezas podiam ser associadas a números, logo entendidas por cálculos. Mas o universo dos números e dos cálculos não pode mais dar conta de todas as grandezas contínuas, como é o caso da diagonal do quadrado. O espaço apresenta grandezas com as quais os cálculos não sabem mais lidar. Se não sabemos calcular, resta-nos mostrar. (*)

Os paradoxos de Zenão já indicavam a existência de um mundo não mensurável, quando admitimos a continuidade das grandezas. A associação de qualquer grandeza contínua a um número é frustrada. Seria preciso encontrar um número que não fosse nem par nem ímpar. Como se já se conhecesse a existência de "buracos" na continuidade que não podem ser expressos por nenhum número no universo conhecido até então.

(*) (da página anterior) De fato, olhando-se de uma maneira mais global, o que se tem é uma combinação entre geometria e aritmética: a geometria garante a existência de um segmento, o lado do quadrado dobro de um outro quadrado dado, e a aritmética, embora não para calcular (↔ medir) esse novo lado, permite demonstrar que a relação entre os lados dos quadrados não é uma relação entre inteiros (positivos). (Ver páginas 79 e 80)

A definição do espaço geométrico abstrato emerge então para resolver este problema, tornando impossível pelos métodos algorítmicos e calculatórios da matemática precedente. Um novo mundo abstrato começa a se delinear para a matemática e esta transformação é irreversível. Mesmo que, no futuro, o universo dos números vá se expandir para compreender a diagonal do quadrado, o ser geométrico será considerado, daí em diante, como parte de um espaço abstrato.

A necessidade de demonstração surge com os gregos a partir deste momento chave da geometria: a descoberta da incomensurabilidade. E com ela o espaço abstrato no qual, até hoje, fundamos a Geometria.

Nota: As grandezas incomensuráveis estabeleceram dois momentos na aritmética pitagórica:

1º momento: o número é composto de grandezas pontuais indivisíveis

(→ equivalente ao número inteiro positivo)

"As coisas são números" (inteiros positivos).

2º momento: (que precede Zenão): onde é distinguido o número álogon, o número incalculável, irracional (certamente a partir do teorema dito de Pitágoras), não representável como aritmós(*), e que entretanto se representa geometricamente

"As coisas" continuam sendo "números" (inteiros positivos).

↓

Estes dois momentos vão desencadear a partir dos paradoxos de Zenão(**), o número (agora no sentido amplo) concebido como intermediário, mediador, entre o sensível e o inteligível.

↑

Platão → { os aritmoi e suas relações (inteligível)
as grandezas geométricas incomensuráveis (sensível) }

(Notas extras na próxima página)

Números abundantes, números perfeitos e números deficientes

Seja s(n) a soma de todos os divisores positivos de n, incluindo o próprio n, com $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$.

Obs: s(1) = 1

Definição de número perfeito:

- pelos pitagóricos: é um número igual à soma de suas partes alíquotas (→ divisores próprios).
- por Euler: um número n é perfeito se $S(n)=2n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$.

Exemplos:

6=3 (metade de 6) + 2(terça parte de 6) + 1(sexta parte de 6)

28 = 14(metade de 28) + 7(quarta parte de 28) + 4(sétima parte de 28) + 2(décima quarta parte de 28) + 1(vigésima oitava parte de 28)

Definição de número abundante:

- pelos pitagóricos: é um número que é inferior à soma de suas partes alíquotas.
- um número n é abundante se $s_{p\ aliq}(n)>n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$.

Exemplo:

o número 18 é inferior à soma de suas partes alíquotas, pois $s_{p\ aliq}(18) = 9 + 6 + 3 + 2 + 1 = 21>18$.

Notas extras da página anterior:

(*) isto é, ele não possui uma decomposição aritmética finita.

(**) são sobretudo os Eleatas que contribuíram para superar esta "crise fundadora"

Definição de número deficiente:

- pelos pitagóricos: é um número que é superior à soma de suas partes alíquotas.
- um número n é deficiente se $s_{p\ aliq}(n)<n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n\geq 2$.

Exemplo: o número 10 é superior à soma de suas partes alíquotas, pois $s_{p\ aliq}(10) = 5 + 2 + 1 = 8<10$.

Pequena história dos números perfeitos:

- Antigo Egito: a prática de decompor frações próprias como soma de frações unitárias distintas levaram os egípcios a procurar esses números que tem muitos divisores.
- Conceituação que se origina das relações entre os números e seus divisores.
- No papiro de Rhind: a soma dos inversos dos divisores de 6 é igual a 2..

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=\frac{12}{6}=2$$

Exercício: Mostre que a soma dos inversos dos divisores de um número perfeito (incluindo ele próprio) é igual a 2.

Proposição 36 – Livro IX dos Elementos de Euclides (Arquitas de Tarento, ~430 à ~350 aC; Nicômaco de Gerasa, ~50 à ~110 dC)

"Se, a partir da unidade, uma quantidade qualquer de números for constituída de modo que cada um seja o dobro do anterior, quando a soma de todos eles for um número primo, então a soma multiplicada pelo último número é um número perfeito"

1 2 4 8 16 32 64 ... 2^{m-1} , $m \geq 2$

$1+2+4+8+16+32+64+\cdots+2^{m-1}$ $(= 2^m - 1^m = 2^m - 1)$ é um número primo

$$(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 2^{m-1})2^{m-1} \quad (= (2^m - 1)2^{m-1})$$

é um número perfeito.

Nota: 1 não é um número perfeito.

Em linguagem matemática atual:

"Se $2^m - 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq 2$, é um número primo, então $n=2^{m-1}(2^m - 1)$ é um número perfeito"

Obs.: $n > 1$ para $m \geq 2$.

Demonstração: Por hipótese $p = 2^m - 1$ é um número primo.Daí, os divisores de $n=2^{m-1}p$ são:

$1, 2, 2^2\ (=4), 2^3\ (=8), 2^4\ (=16), \ldots , 2^{m-1}, p, 2p, 2^2p, 2^3p, 2^4p, \ldots , 2^{m-1}p\ (=n)$

Por outro lado,

$s(n) =$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{m-1} + \underline{p + 2p + 2^2p, 2^3p + 2^4p + \ldots + 2^{m-1}p}$$

$$= (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{m-1})\, p \qquad .$$

$$s(n) = \underline{(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{m-1})}\ (1 + p)$$

$$= (2-1)(2^{m-1}+\ldots+ 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1)$$

$$= 2^m - 1^m = 2^m - 1$$

$$s(n) = (2^m - 1)\ (1 + p) = 2^m + 2^mp - 1 - p = 2^mp + \underline{(2^m - 1)} - p = p$$

$$s(n) = 2^mp = 2(2^{m-1}p) = 2n.$$

Logo, n é perfeito.

Números de Mersenne (Marin Mersenne – francês – 1588 à 1648)

Os números da forma $2^m - 1$, m um número primo, são chamados números de Mersenne. Quando $2^m - 1$ é um número primo, ele é chamado primo de Mersenne.

Uma condição necessária para que $2^m - 1, m \in \mathbb{Z}_+, m \geq 2$, seja um número primo é que m seja num número primo. De fato, suponhamos que m não seja um número primo. Daí, m= ab, a,b>1 e $2^m - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)((2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + ... + + 2^a + 1^{b-1})$ não é um número primo.

Obs.:

1) Um ser um número primo é condição necessária para $2^m - 1$ ser um número primo, mas não é suficiente.
   Contra-exemplo: m=11 é um número primo. Entretanto $2^{11} - 1$ não é primo, pois $2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047 = 23 \times 89$.
2) Se $m \in \mathbb{Z}_+, m \geq 2$ é um número composto, $2^m - 1$ é um número composto.
3) Mersenne descobriu que os 8 primeiros números perfeitos são dados por m= 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31.
4) Existe algum número perfeito ímpar?
   Não há nenhum número perfeito ímpar menor do que 10^{300}.

Teorema: (Leonhard Euler – suíço – 1707 à 1783)

Todo número perfeito par tem a forma $2^{m-1}(2^m - 1)$ para $2^m - 1$ primo, com m primo.

Demonstração:

Suponha que n seja perfeito. Seja n par, $n = 2^{m-1}q$, q ímpar, m, q≥2. Cada divisor de n tem a forma $2^r d$, $0 \leq r \leq m - 1$, $d \mid q$.

Assim, d, 2d, 2^2d, ... , 2^{m-1} d correspondem a forma geral dos divisores de n.

Daí,

$$s(n) = 2.2^{m-1}.\ q = (2^m - 1)s(q)$$
$$\leftrightarrow$$
$$2^m q = (2^m - 1)s(q)$$
$$\leftrightarrow$$
$$2^m q + q - q = (2^m - 1)s(q)$$
$$\leftrightarrow$$
$$(2^m - 1)q + q = (2^m - 1)s(q)$$
$$\leftrightarrow$$
$$\mathbf{q = (2^m - 1)(s(q) - q)}$$

Logo, n = 2^{m-1}. (2^m – 1) (s(q) – q). Devemos mostrar que s(q) – q = 1. Suponhamos por absurdo que s(q) – q > 1. (s(q) > q). Daí, s(q) > 1 – q. Consequentemente q tem como fatores distintos 1, s(q) – q, q (tendo em vista que q = (2^m – 1) (s(q) – q). Assim, s(q) $\geq$ 1 + (s(q) – q) + q = 1 + s(q). Contradição. Logo s(q) – q = 1 $\leftrightarrow$ q é primo. Com isso,

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1)1 \leftrightarrow n = 2^{m-1}(2^m - 1)$$

Números Amigos

Dois números são amigos quando cada um deles é igual a soma das partes alíquotas do outro.

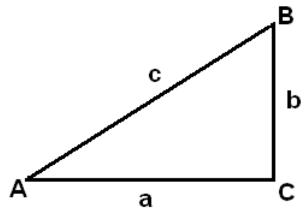
O par de números 220-284 é o único conhecido da antiguidade, atribuído à Pitágoras.

As triplas Pitagóricas

O coroamento do Livro I dos Elementos de Euclides é a penúltima proposição, a 47(*), dita o teorema de Pitágoras: "Em um triângulo retângulo o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto(**), é igual aos quadrados sobre os outros lados contendo o ângulo reto".

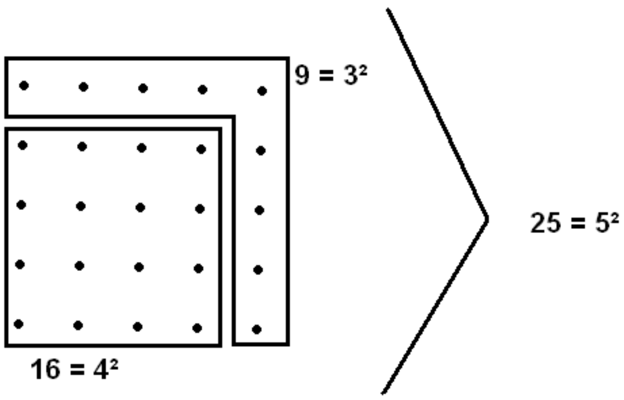
(*) A proposição 48 é a volta da proposição 47.
(**) em grego ipoteenusa-sub-tendente (lado que sub-tende o ângulo reto).

Ou seja: "Em um triângulo retângulo ABC de lados a, b, c, onde o ângulo C é reto, tem-se $a^2 + b^2 = c^2$"



De forma geométrica, a igualdade nos diz que o quadrado construído sobre o lado c é equivalente a uma figura composta de dois quadrados iguais a esses construídos sobre os lados a e b.

Trata-se então de caracterizar inteiros positivos a, b, c tais que $a^2 + b^2 = c^2$.



Utilizando a representação dos números figurados quadrados, a igualdade se produz quando o gnomon do número quadrado é ele mesmo um número quadrado.

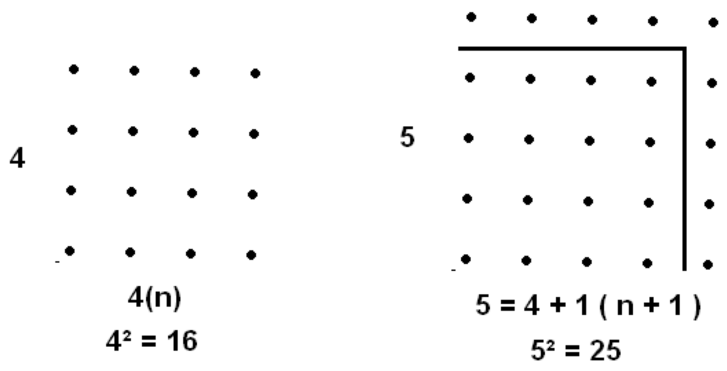
Proclo atribui a Pitágoras a regra: Seja N um número ímpar dado. Então os números $\mathrm{N}, \frac{\mathrm{N}^2-1}{2}, \frac{\mathrm{N}^2+1}{2}$ formam uma tripla pitagórica, isto é,

$$\mathrm{N}^2 + \left(\frac{\mathrm{N}^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{N}^2+1}{2}\right)^2$$

Podemos estabelecer essa regra por meio das representações figuradas: o gnomon que permite passar de um quadrado de lado n ao quadrado de lado n+1 vale 2n+1 Fazendo $\mathrm{N}^2 = 2n + 1$, obtemos

$$(2n+1)+\left(\frac{(2n+1)-1}{2}\right)^2=\left(\frac{(2n+1)+1}{2}\right)^2$$

Exemplo:



9 = 2 x 4 + 1 (2n +1)

O gnomon que permite passar de um quadrado de lado n ao seguinte de lado n+1 vale 2n + 1

$$\underbrace{9+}_{3^2}\underbrace{\left(\frac{9-1}{2}\right)^2}_{4^2}=\underbrace{\left(\frac{9+1}{2}\right)^2}_{5^2}$$

Os cinco poliedros regulares

- Poliedro (em grego)(muitas faces) – sólido cuja superfície consiste de faces poligonais.
- Poliedro Convexo – é um poliedro que não é cortado por qualquer um dos planos de suas faces.
- Poliedro regular – é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares congruentes e seus ângulos sólidos(*) congruentes.

(*) Euclides assim designa os ângulos nos vértices de um poliedro que, por oposição aos “ângulos planos” de um polígono, envolvem uma porção do espaço.

- Existem cinco poliedros regulares:

  - Tetraedro – limitado por 4 triângulos equiláteros congruentes com 3 deles em cada vértice.
  - Hexaedro (ou cubo) – limitado por 6 quadrados congruentes com 3 deles em cada vértice.
  - Dodecaedro – limitado por 12 pentágonos regulares congruentes com 3 deles em cada vértice.
  - Octaedro – limitado por 8 triângulos equiláteros congruentes com 4 deles em cada vértice.
  - Icosaedro – limitado por 20 triângulos equiláteros congruentes com 5 deles em cada vértice.

- Proclo credita a Pitágoras a descoberta dos cinco poliedros regulares. Entretanto, evidências sugerem que ele somente teve familiaridade com o tetraedro, o cubo e o dodecaedro (descoberta atribuída a Hipaso), e que a descoberta do octaedro e do icosaedro pertencem à Teeteto de Antenas (discípulo de Platão). Em todo o caso, Teeteto deu uma descrição desses cinco sólidos (conhecidos como "sólidos de Platão" (diálogo "Timeu")) e foi o que teria transmitido a primeira demonstração conhecida de que não existem outros poliedros regulares [Livro XIV dos Elementos de Euclides consagrado ao estudo destes poliedros (provavelmente derivado do trabalho de Teeteto)].

- Cada elemento material está identificado com uma forma geométrica distinta:

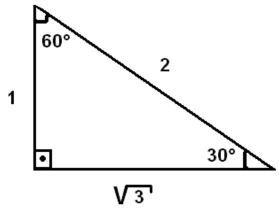
  - o fogo é formado de partículas tetraédricas;
  - o ar é formado de partículas octaédricas;
  - a água é formada de partículas icosaédricas;
  - a terra é formada de partículas hexaédricas. (*)

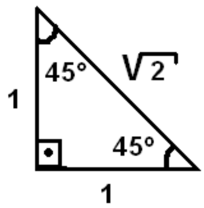
  Não se tem certeza de que essas atribuições sejam dos pitagóricos.

- É no diálogo "Timeu" de Platão que encontramos esses aspectos bem como a construção destes poliedros.

(*) o dodecaedro é o envelope do universo

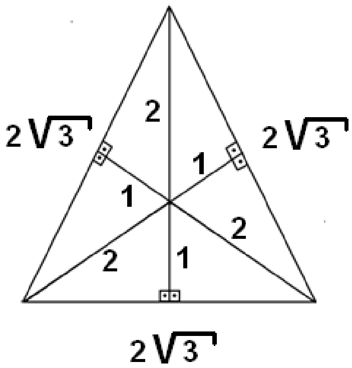
Para Platão os dois triângulos-elementos abaixo compõem quatro poliedros, ou seja, estabelecem suas formas:

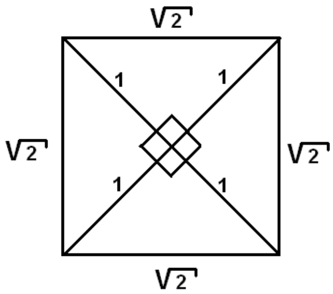




Triângulo retângulo não-isósceles

Triângulo retângulo isósceles



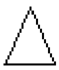
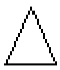
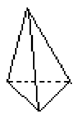
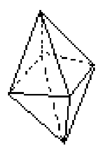


Triângulo equilátero – face para o tetraedro, o octaedro e o icosaedro

Quadrado – face para o hexaedro

A decomposição e a recomposição dos sólidos regulares de Platão a partir de suas faces permite abarcar as transformações mútuas de três dos quatro elementos: o fogo, o ar e a água. Com efeito, os sólidos associados são compostos a partir do mesmo triângulo equilátero. Com o cubo sendo composto diferentemente, o elemento terra escapa a essas transmutações.

Equações das transmutações dos elementos:

- 2 x 4  = 8  ↔ 2  (tetraedro) = 1  (octaedro)

2 fogo = 1 ar

- $1 \times 4 \triangle + 2 \times 8 \triangle = 20 \triangle$ ↔ 1 tetraedro + 2 octaedros = 1 icosaedro

  1 fogo + 2 ar = 1 água

- $\frac{5}{2} \times 8 \triangle = 20 \triangle$ ↔ $\frac{5}{2}$ octaedro = 1 icosaedro

  $\frac{5}{2}$ ar = 1 água

Uma alteração geométrica leva a uma transmutação(*).

(*) Embora estas "combinações" não caracterizem equações químicas de fato, é interessante observar que elas trazem a ideia de simetria para os elementos da natureza. Os pitagóricos e mais tarde Platão, estavam persuadidos de que as formas atômicas deviam satisfazer certas condições de simetria geométrica correspondendo aos poliedros regulares; a partir daí eles tentavam acordar essa possibilidade com a realidade das espécies conhecidas da matéria. E justamente este aspecto não está distante do entendimento que envolve as partículas elementares da Física. É através do físico Werner Heisenberg (alemão – 1901 à 1976) que tem-se a explicação: "Na física moderna, tal como os poliedros regulares em Platão, as partículas elementares são definidas por condições matemáticas de simetria; não são eternas nem invariáveis e portanto dificilmente podem ser chamadas "reais" na verdadeira acepção da palavra. São antes simples representações daquelas estruturas matemáticas fundamentais a que se chega nas tentativas de continuar subdividindo a matéria. Para a ciência natural moderna não há mais, de início, o objeto material, porém forma, isto é, simetria matemática.

A relação de Euler e os poliedros convexos

- Até o século XIX, os matemáticos se contentaram de exemplos para aprender o que é um poliedro.

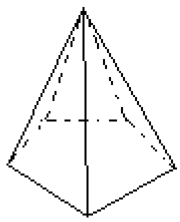
- As definições dadas não permitiam claramente demonstrações.
  Adrien- Marie Legendre (francês – 1752 à 1833): "sólido terminado por planos ou faces planas".

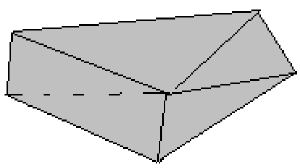
- Como todos os objetos geométricos, os poliedros podem ser percebidos intuitivamente e eventualmente materializados em modelos feitos com diversos materiais.

- Necessidade de uma definição precisa só se fez sentir no século XIX, e foi um resultado enunciado por Euler em 1750 que fez nascer a definição a partir da comparação entre os poliedros e os polígonos.

- Para designar uma categoria de polígonos é suficiente determinar o número de seus lados que é igual ao número de ângulos.
  Para designar uma categoria de poliedros seria suficiente considerar o número de faces e de ângulos sólidos. Entretanto com números iguais de faces e de ângulos sólidos dois poliedros podem diferir completamente.

$V = 6 \quad F = 6$





Foi isso que fez Euler introduzir o termo aresta para designar uma das características de todos os poliedros. Assim, ele formulou a seguinte relação para poliedros convexos:

$$V - A + F = 2$$

Exemplos:

1) Tetraedro: F = 4 V = 4 A = 6

 4 – 6 + 4 = 2

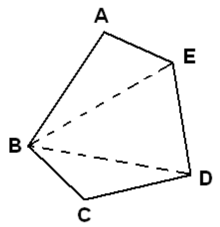
2) Octaedro: F = 8 V = 6 A = 12

 6 – 12 + 8 = 2

- A partir desta relação, a noção de corpo sólido sai do quadro restrito que a geometria clássica o colocou. Novas formas possuindo propriedades desconhecidas não obedecendo a relação de Euler aparecem para a reflexão matemática → Topologia.

Uma desigualdade fundamental

Situação: Seja, por exemplo, um polígono não-regular convexo de cinco lados.



Decompondo-o a partir de um vértice (B) em

3 triângulos = (5 – 2) triângulos

Soma dos ângulos internos.

△ABE: π
△EBD: π
△BCD: π

$3\pi = (5 - 2)\pi$ = soma dos ângulos internos do polígono

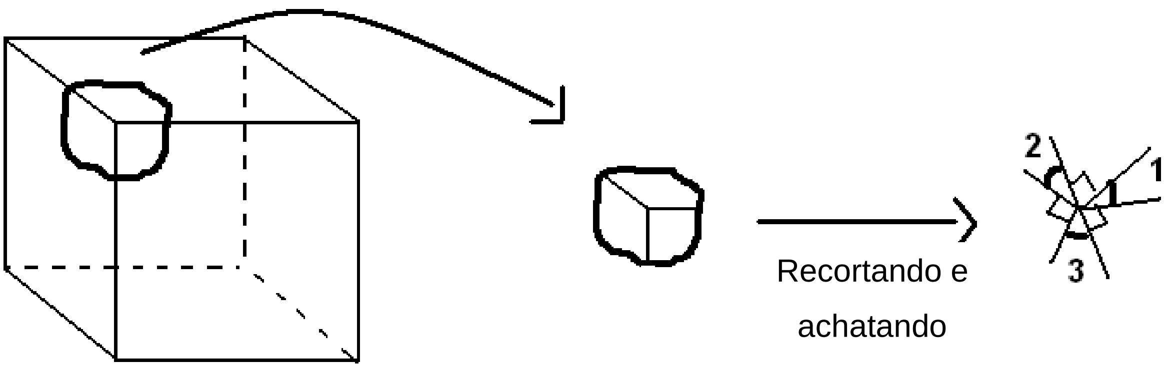
$(p - 2)\pi$ = soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

No polígono regular de p lados cada ângulo interno vale, então, $\left(\frac{p-2}{p}\right)\pi$.

Fato: para um poliedro regular que tenha como faces p-ágonos regulares congruentes com q p-ágonos encontrando-se em cada vértice, vale a desigualdade:

$$q\left(\frac{p-2}{p}\right)\pi < 2\pi$$

De fato, intuitivamente vemos, por exemplo, que, no cubo



$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+m(1)+m(2)+m(3)=2\pi$$

$$\leftrightarrow \underbrace{3\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{3\left(\frac{4-2}{4}\right)\pi} < 2\pi$$

$$3\left(\frac{4-2}{4}\right)\pi < 2\pi$$

Logo, $\quad qp - q2 < 2p \quad \leftrightarrow \quad qp < 2(p+q)$

$$\leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{p+q}{qp} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{q}+\frac{1}{p} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}}$$

Esta desigualdade permite provar que <u>existem apenas</u> cinco poliedros regulares.

Dualidade(*) entre os cinco sólidos de Platão

Existe uma dualidade entre os cinco sólidos de Platão, estabelecida pela relação entre o número de faces e o número de vértices. Assim, o número de faces e de vértices são invertidos quando se passa de um poliedro ao seu dual. Ou seja, equivalentemente, se ligarmos os centros das faces de um poliedro regular obtemos o seu poliedro dual <u>inscrito</u>.

<table>
<tr><th></th><th>Poliedro Regular</th><th>Vértices</th><th>Faces</th><th>Arestas</th><th></th></tr>
<tr><td>é autodual</td><td>Tetraedro</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>é o único poliedro regular a ter o mesmo nº de faces e vértices</td></tr>
<tr><td rowspan="2">formam um par dual</td><td>Hexaedro</td><td>8</td><td>6</td><td>12</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Octaedro</td><td>6</td><td>8</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">formam um par dual</td><td>Dodecaedro</td><td>20</td><td>12</td><td>30</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Icosaedro</td><td>12</td><td>20</td><td>30</td></tr>
</table>

Sem utilizar a palavra “dual”, os gregos interessaram-se por essas relações de inscrição e circunscrição entre os sólidos regulares.

Exercício: Obtenha a partir da fórmula de Euler a desigualdade fundamental acima.

Sugestão: Tenha em conta que Vq = 2A = Fp

(*) Todo poliedro regular está associado a um outro poliedro regular chamado dual, de tal maneira que:
* o dual do poliedro dual é o poliedro inicial;
* as faces de um estão em correspondência com os vértices do outro.

De forma genérica, a <u>dualidade</u> é definida no interior de uma família $\mathcal{F}$ de objetos matemáticos tal que a todo objeto A de $\mathcal{F}$ se associa um outro objeto B de $\mathcal{F}$. Diz-se que B é o <u>dual</u> de A e que A é o <u>primal</u> de B. Se A=B, diz-se que A é <u>autodual</u>.

Nota: De que maneira estes poliedros e suas construções foram conhecidos pelos pitagóricos?

Inicialmente, eles observaram que, no plano, um ponto só pode ser "cercado" por 6 triângulos equiláteros, 4 quadrados ou 3 hexágonos regulares, todos congruentes. Em outras palavras, somente estes três polígonos regulares congruentes podem formar uma figura plana. Como para formar um vértice de um poliedro (→ um ângulo sólido, um ângulo poliédrico) regular, são necessários ao menos três polígonos regulares congruentes que se intersectam nos seus lados, seguiu-se que:

1) Os hexágonos regulares foram eliminados, pois 3 hexágonos regulares em torno de um ponto formam uma figura plana e não um ângulo sólido.
2) Um vértice (← um "bico") só pode ser formado com 3 quadrados, porque 4 formam uma figura plana.
3) Um vértice pode ser formado por 3,4 ou 5 triângulos equiláteros. 6 deles formam uma figura plana.

Combinando vértices do caso (2) obtemos o hexaedro; combinando os vértices do caso (3) obtemos respectivamente, o tetraedro, o octaedro e o icosaedro.

Resta o caso do dodecaedro. Ele ocupa uma posição particular por ser formado por pentágonos regulares congruentes (12). Não se pode precisar claramente a sua descoberta e a sua construção. Uma interpretação seria pelo fato de que como os primeiros pitagóricos já construíam o pentágono regular com suas diagonais para formar o pentagrama  (símbolo de reconhecimento dos membros da seita), e já sabiam calcular a soma dos ângulos internos dos polígonos regulares, eles podiam calcular o valor, de cada ângulo interno desse pentágono, $\frac{6}{5}$ do ângulo reto $\left(=\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)\pi\right)$, o que permite obter um ângulo sólido com 3 pentágonos $\left(3\,.\frac{3}{5}\pi=\frac{9}{5}\pi<2\pi\right)$. A combinação desses vértices levam à construção do dodecaedro.

Proporções e Médias

[(em grego analoguía significa proporção)
(em latim medietas significa média, mediedade)]

- O estudo das proporções(*) pode ser considerado como o coroamento da aritmética pitagórica. Para os pitagóricos, as relações entre os números descrevem a maneira como o mundo é construído e as proporções ligam seus elementos estabelecendo uma unidade perfeita.
- Entretanto a ideia de proporção domina a matemática egípcia. Ela é a chave do cálculo fracional. Os egípcios reduziam as frações próprias em frações unitárias e as operações os levavam a problemas de proporções.

(*) Definição 20 – Livro VII dos Elementos de Euclides:

"(Quatro) números são análogos (→proporcionais) quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou igual a mesma parte ou as mesmas partes, do segundo que o terceiro é do quarto." [1]

Esta definição mostra que o uso do nome analoguía (→proporção) está identificado a quatro termos a, b, c, d da seguinte forma: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ("mesma relação" ($\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ definem um mesmo racional))

Mas a proporção pode se reduzir à ter termos a, b, c: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ (b é a média proporcional de a e c, e c é a terceira proporcional de a e b)

Proposição 19 – Livro VII dos Elementos de Euclides:

"Se quatro números são proporcionais, o produto do primeiro multiplicado pelo quarto, será igual ao produto do segundo pelo terceiro (...)'

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \leftrightarrow \quad ad = bc$$

---

(1) Exemplos:
1) a=5, b=10, c=4, d=8
a tem a mesma parte de b, que c de d, isto é, a metade.

$$\frac{5}{10}=\frac{4}{8} \leftrightarrow \frac{1.5}{2.5}=\frac{1.4}{2.4}$$

2) a=6, b=9, c=4, d=6
a tem a mesma parte de b, que c de d, isto é, duas terças partes

$$\frac{6}{9}=\frac{4}{6} \leftrightarrow \frac{2.3}{3.3}=\frac{2.2}{3.2}$$

3) a=20, b=5, c=8, d=2
a é o quádruplo de b, também c é o quádruplo de d.

$$\frac{20}{5}=\frac{8}{2} \leftrightarrow \frac{4.5}{5}=\frac{4.2}{2}$$

(fim das notas extras)

Exemplo: Problema 24 do Papiro de Rhind

"Encontrar um número que, aumentado de sua sétima parte, dá 19."

Solução:

O calculador egípcio pega inicialmente número 7 aumentado de sua sétima parte, isto é, 1. O que dá 8. Agora ele precisa encontrar um número que seja para 19 o que 7 é para 8. Isto caracteriza uma proporção onde um dos quatros termos não é conhecido $\left(\frac{19}{x} = \frac{7}{8}\right)$ (método da falsa posição).

- Ignoramos em que a medida, além de casos como acima, e em que grau de generalidade os egípcios levaram esse conhecimento das proporções. Seja como for, existe um intervalo imenso que separa o repertório de problemas e soluções que oferecem os papiros matemáticos com a teoria das proporções expostas nos livros V, VI e VII dos Elementos de Euclides. Este intervalo, os predecessores de Euclides o tinham em parte preenchido. As fontes dos livros V e VI remontam a Eudoxo. Essas do livro VII são mais antigas e mais incertas; nessa parte de sua obra, Euclides, se ele se afasta da aritmética pitagórica pelo seu estilo e seus métodos de demonstração, ele se aproxima pelas proposições tratadas e rende indiretamente homenagem à antiga escola pitagórica, na qual, desde o século V, foi elaborada uma teoria incompleta, pois que ela se aplicava somente aos números inteiros positivos, mas já ordenada e coerente, das proporções.
- A teoria das médias se aproxima da teoria das proporções sem se confundir com elas.
  - uma proporção não pode ter menos de três termos;
  - o número dos termos de uma proporção é ilimitado;
  - a proporção-tipo é a de quatro termos;
  - a média é um conjunto de três números inteiros positivos diferentes, tais que duas de suas diferenças estão entre elas na mesma relação que um de seus números com ele mesmo ou com dois dos outros números. Assim, sejam três números a, b, c $\in \mathbb{Z}_+$ tais que a > b > c. Eles formam um média "antiga" se, por exemplo, a relação $\frac{a-b}{b-c}$ é igual a uma das relações $\frac{a}{a}$, $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a}{c}$.

- As três médias "antigas" (clássicas):

1) A <u>média aritmética</u> (em grego <u>mesótes aritmetiquê</u>)

- fórmula: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}$

Exemplos: a = 3, b = 2, c = 1

- para que três números a, b, c $\in \mathbb{Z}_+$ componham uma média aritmética é necessário e suficiente que a − b = b − c

- de a − b = b − c , temos que a + c = b + b = 2b ou $b = \frac{a+c}{2}$

(o termo do meio é igual a semi-
-soma dos termos extremos)

- geometricamente, a média aritmética é o comprimento do lado do quadrado tendo o mesmo perímetro que o retângulo de lados a e c.

2) A <u>média geométrica</u> (em grego <u>mesótes geometriquê</u>)

- fórmula: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$

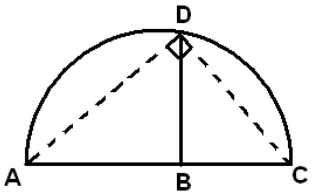
Exemplos: a =4, b = 2, c = 1

- de $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$, deduz-se ab − b² = ab − ac, e consequentemente ac = b² (ou $b = \sqrt{ac}$)

- geometricamente, a média geométrica de a e c é o lado do quadrado tendo a mesma área que o retângulo de lados a e c.

- **Problema:** Tomemos 12 e 20 como extremos, o termo médio é $\sqrt{12.20} = \sqrt{240}$, número irracional. Assim, a solução aritmética com números inteiros não é possível, na maioria dos casos. Entretanto existe sempre uma solução geométrica.

Considere a figura abaixo onde AB e BC são os dois extremos. AC é o diâmetro do semi-círculo ADC.



BD é a media geométrica entre AB e BC. De fato, por semelhança dos triângulos ABD e BCD temos que $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$.

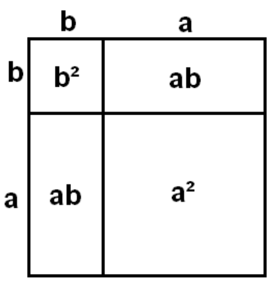
- Platão:

* O mundo gerado é corporal, quer dizer visível e tangível.
* Sem o fogo nada se poderia tornar visível.
* Nada poderia se tornar tangível sem alguma coisa que fosse sólida, ora nada poderia ser sólido sem a terra.
* Desses dois elementos foi fabricado o <u>corpo do mundo</u>.
* Segundo Platão, o mundo é constituído de quatro elementos. Por que quatro? Inicialmente temos os elementos fogo e terra. Para reunir estes dois elementos é necessário ao menos um outro elemento que definirá a relação entre os dois primeiros. Entretanto se existisse somente três elementos, o corpo do mundo seria um plano e não um sólido, porque é suficiente três termos para constituir uma proporção, ou seja, é suficiente uma única média geométrica. Assim temos:

i) no <u>caso plano</u> : $\frac{a^2}{ab} = \frac{ab}{b^2}$

Esses três termos são ligados pelo desenvolvimento binomial.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Nota: Platão tem em mente a procura de médias geométricas entre quadrados e cubos perfeitos.

Constatamos então que uma construção geométrica só tendo dois elementos e uma média é plana. Observemos que ab é a média geométrica de a^2 e b^2.

ii) o <u>caso sólido</u>: $\frac{a^3}{a^2b} = \frac{a^2b}{ab^2} = \frac{ab^2}{b^3}$ (proporção contínua)

(o corpo do mundo é um sólido, ele não pode ser constituído de somente três elementos, mas sim de quatro elementos.)

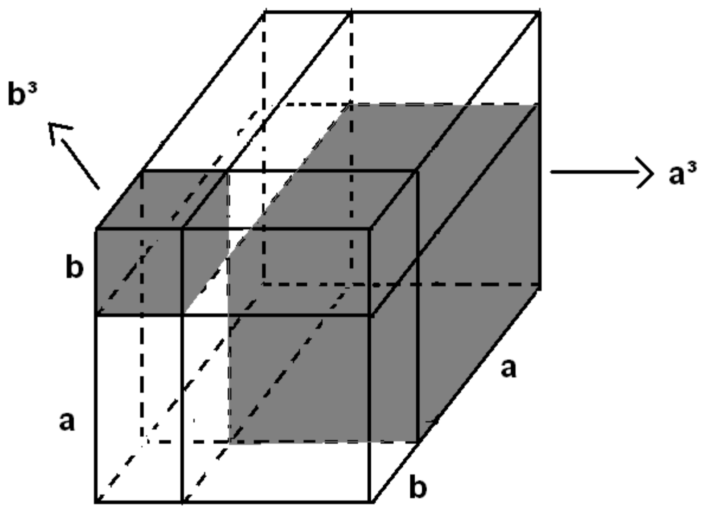
São necessárias duas médias geométricas:

a^2b é a média geométrica de a^3 e ab^2

e

ab^2 é a média geométrica de a^2b e b^3

Para construir o corpo do mundo é necessário quatro elementos a^3, a^2b, ab^2, b^3, que são ligados pelo desenvolvimento $(a + b)^3 = a^3 + 3^{a2}b + +3ab^2 + b^3$.



* Os quadrados de dois números inteiros positivos formam com o produto desses dois números uma média geométrica.

Exemplo: 9, 6, 4 $3^2, 3\text{x}2, 2^2$

Duas médias geométricas são necessárias para ligar dois números inteiros positivos cúbicos.

Exemplo: 27, 28, 12 e 18, 12, 8

$3^3, 2\text{x}3^2, 2^2\text{x}3$ e $2\text{x}3^2, 2^2\text{x}3, 2^3$

3) A <u>média harmônica</u> (em grego <u>mesótes armoniquê</u>)

- fórmula: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$

- Arquitas: 6, 4, 3 formam uma média harmônica, pois 4 (termo médio) ultrapassa 3 da terça parte de 3 (1) e é ultrapassado por 6 da terça parte de 6 (2).

Generalizando: a, b, c ∈ $\mathbb{Z}_+$, a > b > c formam uma média harmônica, se $a = b + \frac{a}{n}$ e $b = c + \frac{c}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+,\ n > 1$.

Exercício: se: a, b, c ∈ $\mathbb{Z}_+$, a > b > c formam uma média harmônica, mostre que:

1) $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

2) $b = \frac{2ac}{a+c}$

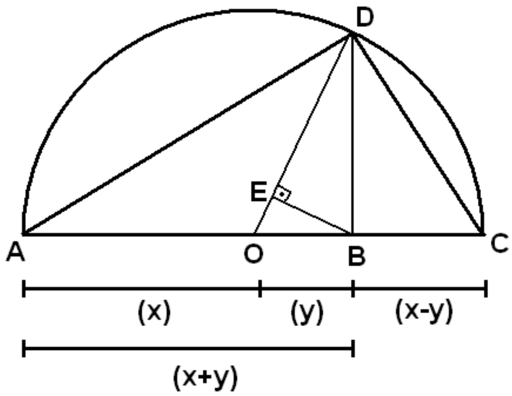
- geometricamente, a média harmônica é a razão da área do retângulo de lados a e c com a quarta parte de seu perímetro.

- Filolau de Crotona: o número de vértices de um cubo (8) é a média harmônica entre o seu número de arestas (12) e seu número de faces (6).

- Matemáticos gregos envolvidos com o estudo das médias:

  * Arquitas de Tarento
  * Filolau de Crotona
  * Hipaso de Metaponto
  * Nicômano de Gerasa
  * Papo de Alexandria
  * Teão de Esmirna

Obs. Interessante: A figura abaixo exibe as três médias clássicas:



Daí, a=m(AO) (=m(OD)=m(OC)) é a média aritmética de AB e BC; g=m(BD) e h=m(DE) são respectivamente as médias geométrica e harmônica dos mesmos extremos.

Nota: Os gregos escreviam uma proporção geralmente sob a forma de uma "progressão". Assim, para cada uma das médias clássicas, tem-se uma sequência de três termos que vão caracterizar, ou uma "progressão aritmética", ou uma "progressão geométrica", ou uma "progressão harmônica".

Exemplos: 1) 3,2,1 (progressão aritmética)
2) 27,9,3 (progressão geométrica)
3) 6,4,3 (progressão harmônica)

A incomensurabilidade nos polígonos e poliedros regulares

- Na página 61, foi falado sobre a incomensurabilidade interna que aparece nos polígonos e poliedros regulares. Vamos estudá-la um pouco.
- Os pitagóricos determinaram diversas maneiras de dividir um segmento de reta. Uma delas trata de determinar um ponto C sobre um segmento de reta AB, tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.

Esta proporção denominada proporção divina (Luca Pacioli – italiano - ~1445 à 1517 - no livro "De divina proportione" (1509)), muito privilegiada pelos artistas no curso dos séculos, foi considerada como a chave do equilíbrio e da harmonia.

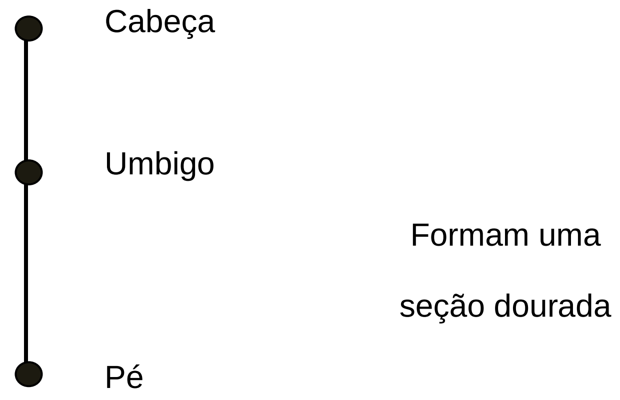
Exercício: Fazendo m(AB) = a e m(AC) = b, mostre que o valor positivo de $\frac{a}{b}$ é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, denominado número de ouro e designado no início do século XX pela letra grega maiúscula fi (Φ) (homenagem ao escultor grego Fidias - ~490 à ~430 aC) (essa subdivisão do segmento AB é chamada seção áurea) por Theodore Andrea Cook (inglês – 1867 à 1928), crítico de arte, em um livro chamado "The Curves of Life" (1914) sobre a obra de Leonardo da Vinci (italiano – 1452 à 1519).

Esse pensamento teria surgido a partir do escultor pitagórico Policleto de Argos (século V a.C.) que revelou a "harmonia do corpo" utilizando a média $\frac{a-c}{a-b} = \frac{b}{c}$ $(\leftrightarrow a = b + c)$.

Exemplo: 8, 5, 3.$^{(*)}$

Colocando em correspondência as relações das partes do corpo humano, disse que a beleza reside na harmonia de todas as partes entre elas.

Exemplo:



(*) da média 8, 5, 3 podemos tirar a média 13, 8, 5 da qual tiramos 21, 13, 8. Igualmente 8, 5, 3 foi tirada de 5, 3, 2, por sua vez de 3, 2, 1 e 2, 1, 1. Colocando estes números em ordem crescente reconhecemos a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Esta sequência aparece na obra "Liber Abaci" (Livro do Ábaco[1] em latim)(1202) de Fibonacci (Leonardo de Pisa dito Fibonacci (filho de Bonacci) – italiano - ~1170 à ~1250) através do Problema dos Coelhos:

(continua na próxima página)

---

(1)- Há diversas hipóteses quanto à origem da palavra ábaco, dentre as quais uma de origem hebraica, baseada no termo habak que significa poeira e outra oriunda da forma grega abax ou do vocábulo latino abacus que corresponderia a mesa ou tabuleiro coberto com areia ou pó fino. Ambas as suposições parecem indicar o meio de que se valiam os antigos para gravar letras, números ou figuras, traçando-as com um dedo ou um estilete na areia. Daí se derivaram os instrumentos nos quais o uso de pequenas bolas simplificava o mecanismo de operações dificultadas pelo emprego de numerações complexas. O aparelho consiste em um quadrilátero cujos lados verticais estão unidos por fios paralelos nos quais deslizam as pequenas bolas. Aperfeiçoados na China e no Japão, tiveram utilização generalizada nos séculos XI e XII quando várias obras foram escritas a respeito, entre as quais a de Fibonacci.

(continuação das notas extras da página anterior)

"Suponha que o tempo de gestação das coelhas seja de um mês e que cada coelha fique prenha no início de cada mês, iniciando no seu primeiro mês de vida. Suponha também que cada coelha gere sempre dois filhotes, um macho e uma fêmea. Quantos casais de coelhos se terá em 2 de janeiro de 1203 se se começou com um casal de recém nascidos no dia primeiro de janeiro de 1202?"

A resposta para este problema está relacionada com uma sequência de números que ficou conhecida como a sequência de Fibonacci.

O número de casais de coelhos cresce da seguinte maneira:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Podemos construir a sequência de Fibonacci a partir das seguintes informações:

Se F_n denota o n-ésimo número de Fibonacci, então

$F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad$ e $\quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, onde $n \geq 2$

Johannes Kepler (alemão – 1571 à 1630) foi o primeiro a notar que a razão $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tende para Φ quando n tende para infinito. Por exemplo:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1,\ \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2,\ \frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5\ ,\ \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots, \frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625\ , \frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} \cong 1{,}6153\ ,\ \frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} \cong 1{,}6190\ ,\ \frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} \cong 1{,}176,$$

$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} \cong 1{,}6182$$

Prova-se que $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi \ (= 1{,}6180339887\ldots)$

Observa-se, por outro lado, que esses quocientes sucessivos de números de Fibonacci são aproximações alternativamente inferiores e superiores a Φ:

$$1 = \frac{1}{1} < \frac{3}{2} > \frac{8}{5} < \frac{21}{13} < \cdots < \Phi < \cdots < \frac{13}{8} < \frac{5}{3} < \frac{2}{1} = 2$$

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

Adendo:

<u>O Triângulo de Pascal</u>

- Já conhecido na Idade Média pelos matemáticos persas (→árabes) e chineses, é utilizado para desenvolver expressões da forma $(a + b)^n$.
- Aparece na Europa na obra "Rechnung" (<u>cálculo</u> em alemão) (1527) do matemático Peter <u>Apian</u> (alemão – 1495 à 1552)
- Estudado por muitos matemáticos europeus. Entre eles Blaise <u>Pascal</u> (francês – 1623 à 1662) que lhe dedica um tratado denominado "Tratado do triângulo aritmético" (1654).

Apresentação do <u>triângulo aritmético</u> dito de Pascal:

gnomons dos números triangulares

números triangulares

Linha 1 Ordem 0	1									
Linha 2 Ordem 1	1	1								coeficientes de $(a+b)$
	1	2	1							coeficientes de $(a+b)^2$
	1	3	3	1						coeficientes de $(a+b)^3$
	1	4 +	6	4	1	$\binom{3}{2}$				
	1 +	5 +	10 +	10 +	5 +	1	= 32 = 2^5			ordem = linha − 1
	1	6	15	20	15	6	1			
	1	7	21	35	35	21	7	1		
	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
	1	9	36	84	126	126	82	36	9	1

(...)

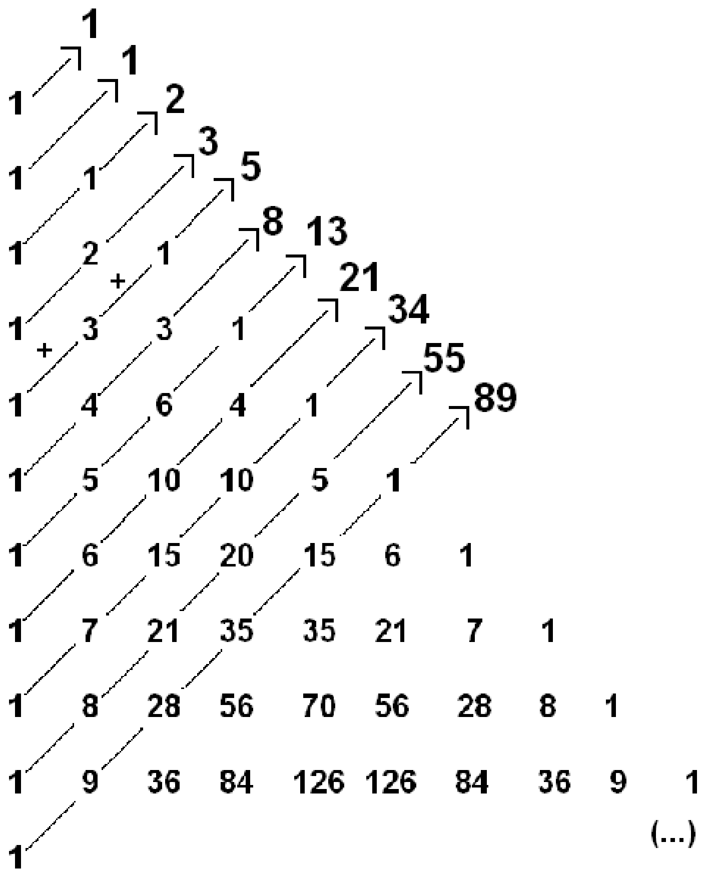
(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

<u>Definição:</u> O triângulo de Pascal é um arranjo geométrico triangular dos coeficientes binomiais. Na linha i e na coluna j $(0 \leq j \leq i)$ é colocado o coeficiente binomial $\binom{i}{j}$ (Notação para C_i^j do matemático Andreas <u>von Ettingshausen</u> (alemão – 1796 à 1878). Lê-se <u>i sobre j</u> (Euler)).

<u>A sequência de Fibonacci e o triângulo de Pascal</u>

Os números de Fibonacci se relacionam com o triângulo de Pascal da seguinte maneira:



(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

Exercícios:

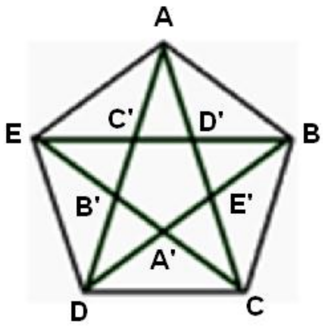
1) Mostre por indução em n a seguinte identidade:

$$\Phi^{n+1} = F_{\boldsymbol{n+1}}\Phi + F_n, \qquad n \geq 1$$

2) Mostre que se m | n, m, n, ∈ $\mathbb{Z}_+$, então F_m | F_n.

(fim das notas extras)

- O símbolo de reconhecimento dos membros da escola pitagórica era o <u>pentagrama</u> (ou como também era chamado o <u>triplo triângulo</u> (polígono não-convexo)), isto é, o pentágono regular estrelado, formado quando traçamos as cinco diagonais de um pentágono regular, conforme figura abaixo:



Os pontos A', B', C', D' e E' dividem as diagonais do pentágono de modo notável: cada um deles divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, tais que, a relação entre as medidas da diagonal e do segmento maior (=lado do pentágono) é igual à relação entre as medidas do segmento maior e do segmento menor.

Exercício:

1) Mostre que o valor (positivo) dessa relação vale Φ.
   (Sugestão: Considere m(EB) = y e m(C'B) = x)

2) A partir da proporção encontrada em (1), obtenha uma equação do 2º grau em Φ e mostre, inicialmente que

$$\Phi = \sqrt{1+\Phi}$$

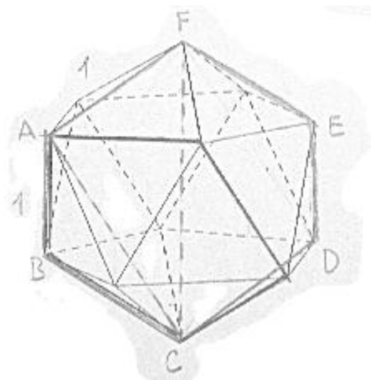
   Em seguida mostre que

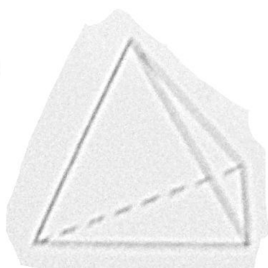
$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

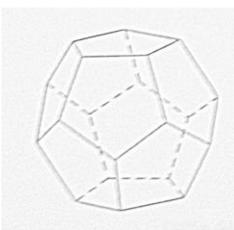
- Para cada um dos cinco sólidos regulares, Euclides, no Livro XIII, calcula a relação de sua aresta com o raio da esfera que o inscreve.
  Por exemplo, se cortarmos um icosaedro ao meio, cortando-o ao longo da aresta AF, de comprimento digamos 1, o resultado é um hexágono ABCDEF.
  Por outro lado, consideremos o pentágono regular formado pelos lados dos cinco triângulos equiláteros congruentes em um vértice do icosaedro como na figura a seguir. Pelo exercício anterior, temos que $\frac{\mathrm{m(AC)}}{\mathrm{m(AB)}} = \mathrm{m(AC)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$. (m(AB) = m(AF) = 1). O diâmetro da esfera que circunscreve o sólido é CF, que é a hipotenusa de um triângulo retângulo com lados AC e AF. Daí, pelo teorema de Pitágoras,

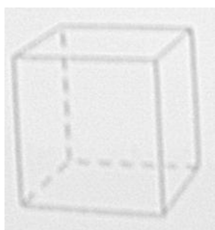
  CF² = AF² + AC²

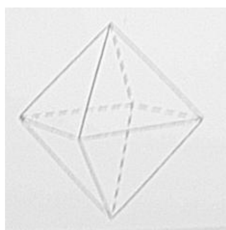
  Logo,
  m(CF)² = m(AF)² + m(AC)²
  = 1² + Φ² e, portanto,
  m(CF) = $\sqrt{1+\Phi^2}$







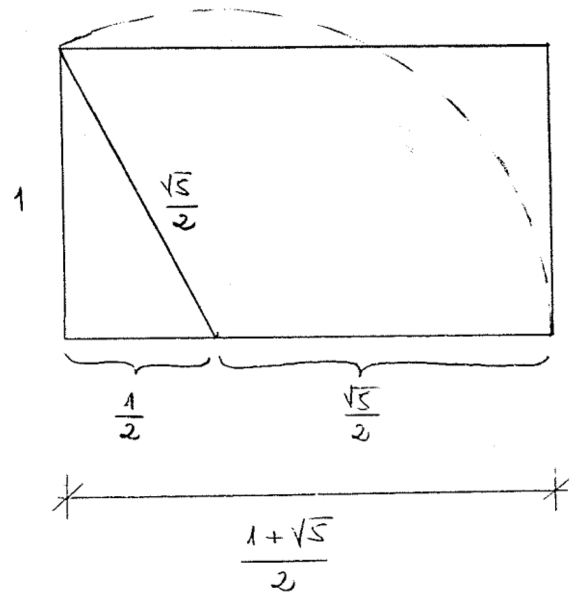




A espiral de ouro e a espiral de Fibonacci

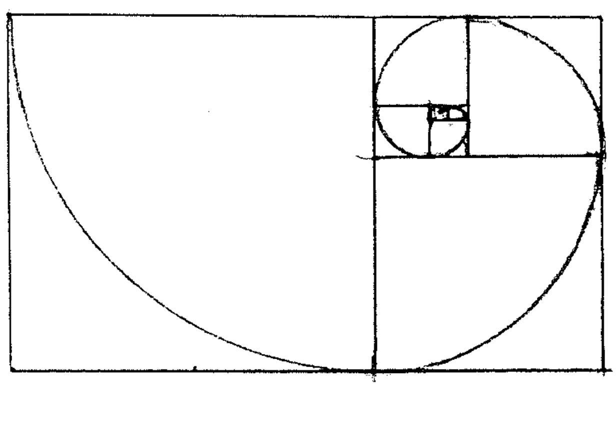
Seja o ponto C no segmento de reta AB tal que $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$. Fazendo m(AB)=a e m(AC)=b, como se viu na página 141, tem-se que $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow a=b\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Considerando b=1, a= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

O retângulo

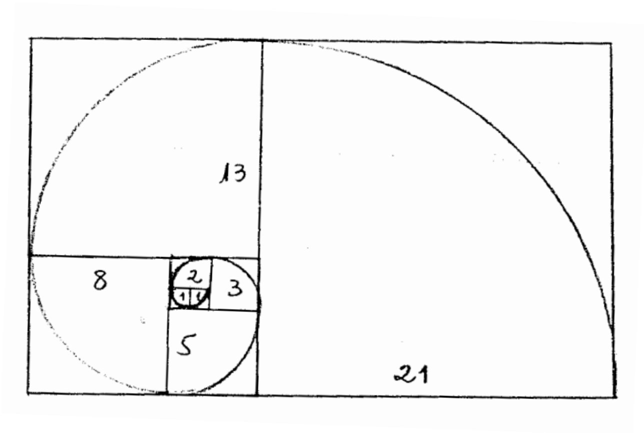


é chamado retângulo de ouro.

A partir do retângulo de ouro se traça um quadrado de lado 1 e se obtém um retângulo de ouro de lados $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{\Phi}$ e 1. Se reitera a operação para obter um novo retângulo de ouro de lados $\frac{1}{\Phi^2}$ e $\frac{1}{\Phi}$, e assim sucessivamente. A espiral de ouro é formada de quartos de círculos sucessivos inscritos em cada quadrado.



Se em vez de partir de um retângulo de ouro, se parte de um retângulo de Fibonacci com lados F_{n-1} e F_n, onde F_{n-1} e F_n são dois números de Fibonacci consecutivos, obtém-se uma espiral formada de quartos de círculos dita espiral de Fibonacci que aproxima a espiral de ouro.



Observações gerais sobre o número de ouro:

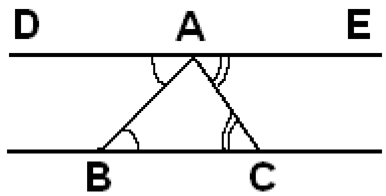
1. Não existe nenhum traço histórico do número de ouro na Babilônia ou no antigo Egito;

2. Provavelmente, a descoberta dos incomensuráveis por Pitágoras, esteja também vinculada à proporção de ouro via estudo das relações envolvendo o pentágono e suas diagonais;

3. Euclides define esta proporção, se serve dela, por exemplo no Livro XIII, mas não faz, de modo algum, centro de suas preocupações. Nada nos Elementos vincula esta operação geométrica algo que seja de estético ou de divino.

A geometria plana pitagórica

- Proclo: "Pitágoras deu à filosofia geométrica a forma de educação livre[*], tomando as coisas no começo para descobrir os princípios por um exame dos teoremas elaborando um método não empírico e puramente intelectual".
- Ponto é uma unidade definida por uma determinação de posição.
- Proclo disse que os pitagóricos teriam demonstrado o teorema segundo o qual todo triângulo tem (a soma dos) seus ângulos internos iguais a dois ângulos retos. (Proposição 32 – Livro I dos Elementos de Euclides)



As retas BC e DE são paralelas.

DÂB = ABC e EÂC = ACB

Daí, DÂB + BÂC + EÂC = DÂB + BÂE = dois ângulos retos.

(Esta demonstração supõe conhecida a teoria das paralelas)

- Segundo Eudemo de Rodes, citado por Proclo, os pitagóricos inventaram o problema da aplicação de áreas a uma reta dada.

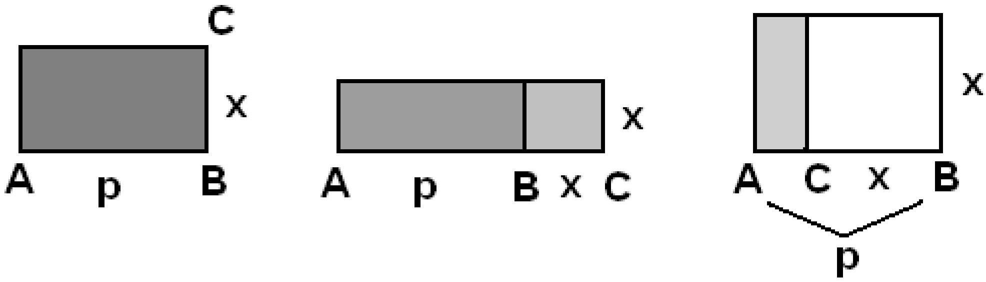
"São das descobertas da parábola, da hipérbole e da elipse das áreas que os geômetras mais recentes as aplicaram as linhas ditas cônicas.

Os pitagóricos viam a significação dessas palavras na construção plana das áreas em relação a uma reta determinado (a um segmento de reta determinado).

---

[*] ciência liberal (independente das aplicações práticas)

Quando a reta sendo traçada, se aplica a área dada a toda esta reta, então se diz que a área é a parábola; quando se faz o tamanho da área aplicada maior do que a reta, se tem a hipérbole; quando se faz a área menor, de modo que uma parte da reta fique fora da área aplicada, se tem a elipse."



Parábola (em grego parabolê): área exatamente aplicada
Hipérbole (em grego hiperbolê): área excedente
Elipse (em grego eleipsis): área deficiente

[Pensar em: número perfeito
número abundante
número deficiente]

Em linguagem atual, se nós designamos por y^2 a área dada e por p a medida do segmento de reta AB dado, o problema consiste em encontrar um comprimento x satisfazendo a uma das três equações:

$$y^2 = px \quad \text{(parábola)}$$
$$y^2 = px + x^2 \quad \text{(hipérbole)}$$
$$y^2 = px - x^2 \quad \text{(elipse)}$$

[Provavelmente foram esses dados que serviram mais tarde a Menécmo, matemático contemporâneo de Platão, para caracterizar as três secções não paralelas à base de um cone de revolução (seções cônicas)].

Situação básica do pensamento grego

- Duas grandes correntes → milesianos, pitagóricos } diversidade das coisas existentes provenientes da água, do ar, do ápeiron, do número, etc.

- Divergência entre os pensadores: necessidade de se buscar um caminho de certeza que supere as múltiplas opiniões.
- Unidade x Pluralidade → verdade única x multiplicidade de opiniões

- Escola de Eléia: { Parmênides (~520 à 450aC) (o fundador)
  Zenão (~490 à ~425) (discípulo)

- Parmênides de Eléia
  - obra: poema filosófico “Da Natureza”;
  - esta obra marca uma virada decisiva no pensamento (científico): a eliminação da contradição e da incoerência;
  - são estabelecidas duas vias para o pensamento:

  Via da verdade (em grego aléteia: não-velamento – desvelamento)

  Via da opinião (em grego dóxa)

- vida da verdade conduz a um ser sem predicado;

X

vida da opinião conduz às informações dos sentido suscetíveis de muitos predicados (os sentidos não conduzem à verdade);

- através do puro (olhar do) pensamento a afirmação e a negação são categóricas;

X

opiniões dos homens que misturam ser e não-ser através de contingências enganadoras;

- filosofia de Parmênides centralizada na noção de Unidade (Um-Ser) incompatível com a multiplicidade e movimento que se percebe;
- alguns aspectos básicos:

    * o ser é e não pode não ser (primeira formulação explícita do princípio de identidade: A=A);
    * o que é, sendo o que é tem e ser único;
    * além do que é só poderia existir o que não é → absurdo: existência do não-ser;
    * é o mesmo pensar o ser e ser;
    * pelo princípio de identidade:

$$\text{O ser é: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Eterno} \\ \text{Uno} \\ \text{Imutável} \\ \text{Pleno} \\ \text{Contínuo} \\ \text{Indivisível} \\ \text{Imóvel} \end{array} \right. \quad \text{X} \quad \begin{array}{l} \text{depoimento dos sentidos} \\ \text{que percebem um mundo} \\ \text{de coisas diversas, móveis} \\ \text{e mutáveis.} \end{array}$$

(rejeição da legitimidade do movimento e da multiplicidade)

- Zenão de Eléia responde aos adversários de sua escola através de quatro argumentos que constituem problemas insolúveis ou aporias (em grego apóros: sem caminho) → quatro paradoxos (do grego para: oposto e dóxa: opinião).
  Ele responde às críticas com argumentos dizendo que as teses dos opositores também ocultam contradições internas insuperáveis além de estarem em desacordo com a experiência sensível.

  - Aristóteles: Zenão inventor da dialética (método que consiste em deduzir da tese adversária consequências que se contradizem; a arte de discutir)

Fato: Teorias do movimento dependem das teorias da natureza do espaço e do tempo.

Situação: No pensamento grego existiam duas opiniões opostas sobre eles. Ou o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis em cujo caso o movimento é contínuo (e uniforme) ou se compõem de partes indivisíveis como concebe a escola pitagórica (neste caso o movimento consta de uma sucessão de "pequenos" saltos).

[Visualização: o conceito de indivisível é análogo a um punhado de areia: sem ligação, sem consistência e sem continuidade.]

- os quatro argumentos de Zenão de Eléia contra o movimento procuraram mostrar que nenhuma dessas concepções é conforme a realidade, e caracterizando que a impossibilidade de pensar de maneira coerente uma teoria do movimento se deve ao motivo de que ele é um fenômeno. Não sendo pensável não pode ser;
- os quatro argumentos chegaram até nós principalmente por intermédio de Aristóteles.

Os quatro paradoxos de Zenão

- A natureza do espaço e do tempo.

Hipótese continuísta da Escola de Anaxagoras(*)

Se o espaço/o tempo é contínuo pode-se dividir cada grandeza em dois indefinidamente. É a noção de ilimitado em potência (infinito potencial).

Paradoxos: a dicotomia, Aquiles.

Hipótese atomista da Escola pitagórica

O espaço é composto de partes indivisíveis consecutivas (que Demócrito de Abdera, discípulo de Zenão chamará de átomos (em grego atomos – átomo: que não se pode cortar)) e o tempo composto de instantes consecutivos.

___

(*) Anaxagoras de Clazomenas (~500 à ~428 a.C.)

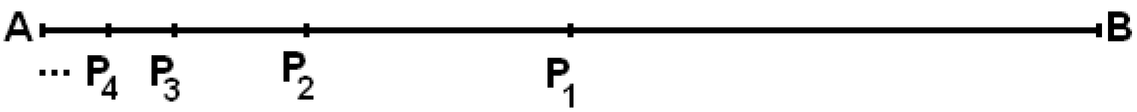
Paradoxos: a flecha, o estádio

- Exposição de três dos quatro paradoxos:

A dicotomia (do grego: dica – duas partes (iguais) e temein – cortar)

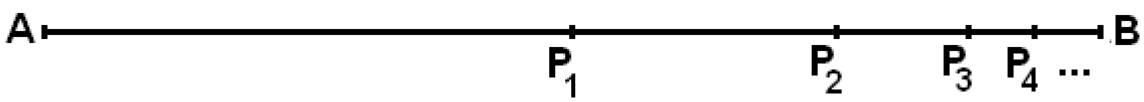
" (...) A imposibilidade do movimento é deduzida do fato de que móvel deve chegar primeiro a metade (do percurso) antes de chegar ao final (...)" ("Física" – livro VI de Aristóteles)

Se se reitera o procedimento obtem-se : o móvel deve de início chegar a metade da metade antes de atingir o meio do trajeto e assim sucessivamente.



Assim, o movimento não pode começar.

Uma versão equivalente deste paradoxo é:



Assim, o móvel não chega jamais ao ponto de chegada.

Matematicamente, se fizermos m(AB) = 1, o móvel deverá percorrer:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$$

[Nesta segunda versão se constata que o paradoxo se funda sobre a convicção intuitiva que a soma de um número infinito de grandezas positivas é infinita (mesmo se cada grandeza é extremamente pequena), isto é,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \infty.$$

De fato,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

]

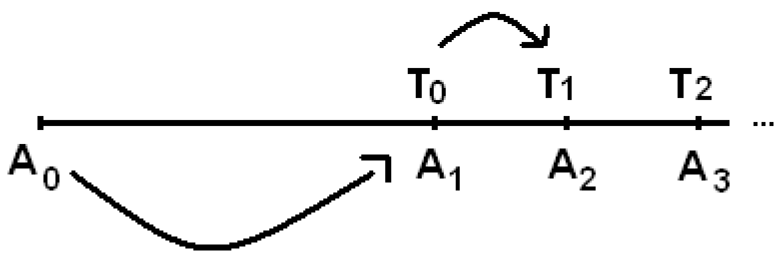
Questão: Na primeira versão, quando "retiramos" o ponto A do segmento AB, por quê não existe um ponto que "feche" o segmento? ↔ Qual o primeiro ponto que vai passar o móvel após sua partida?

Resposta: $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right)$ é o ponto de partida. → o móvel não pode se movimentar

<u>Aquiles</u> (e a tartaruga)

"(...) O mais lento na corrida jamais será alcançado pelo mais rápido; pois o que persegue deve sempre começar por atingir o ponto de onde partiu o que foge. É o mesmo argumento que o da dicotomia, a única diferença está em que, se o espaço sucessivamente acrescentado é bem dividido, não o é mais em dois" ("Física" – livro VI de Aristóteles)

Visualização:



As duas posições se aproximam indefinidamente uma da outra sem jamais se encontrar. (Assim, Aquiles não poderá atingir a tartaruga).

Nestes dois paradoxos, Zenão mostra que a divisibilidade infinita do espaço e do tempo engendra absurdos. Pois que a tese continuista não permite pensar o movimento, consideremos a tese atomista.

<u>A flecha</u>

"(...) A flecha, ao ser projetada, está em repouso. É a suposição de que o tempo seja composto de instantes(...)" ("Física" – livro VI de Aristóteles)

- Quer dizer, se o tempo é feito de instantes indivisíveis, então a flecha em movimento está sempre parada, pois a toda instante a flecha está em uma posição dada e ocupa um espaço igual a ela mesma. Pois que isto é verdadeiro em todo instante, segue-se que a flecha não se desloca nunca porque um corpo que ocupa sempre o mesmo espaço não se desloca.

- Zenão serve-se do fato de que a percepção que se tem do movimento da flecha não é estacado, mas contínuo. O que não pode ser o caso se o tempo e o espaço são constituídos de elementos indivisíveis, ou seja, a flecha tem que "saltar" de uma posição à seguinte sem nunca ocupar a "posição intermediária". Mas isto é impossível, pois seu movimento é contínuo.

Visualização:

Ela não pode passar do lugar A do instante t_1 ao lugar B do instante t_2. Ela tem de ficar imóvel em A

- Zenão não pode nos dizer o que há entre dois existentes, pois que é o não-existente.

Exercício: Pesquisar o paradoxo do Estádio.

Assim, nestes dois paradoxos a concepção do espaço e do tempo dos pitagóricos é igualmente errônea e leva a uma contradição.

Obs.:

1) Zenão nos mostra que o espaço e o tempo, que eles sejam divisíveis ao infinito (contínuos) ou compostos de indivisíveis (discretos), não nos permitem de pensar logicamente o movimento.
2) Parmênides e Zenão são os primeiros a separar o sensível do inteligível. Zenão nos ensina a desconfiar das aparências e a refletir sobre a noção de teoria. Uma teoria pode explicar tudo? Ela é suficiente para explicar os fatos que nós observamos?
3) Podemos reagrupar os quatro argumentos de Zenão no quadro abaixo:

	Continuismo	**Atomismo**
Imobilidade	dicotomia	flecha
Movimento	Aquiles	estádio

4) Os argumentos aporéticos de Zenão combateram duas concepções: de um lado, estas dos pontos-unidades, os indivisíveis dos números figurados; de outro lado, a concepção da divisão a infinito que resulta na descoberta dos irracionais.

Fato: com o advento dos irracionais, a divisão infinita da reta se torna uma prática matemática necessária.

O que o pitagorismo descobriu, e que é de uma importante básica tanto em geometria (→ grandezas incomensuráveis com uma unidade de medida) quanto em aritmética (→ dicotomia), é o processo que não tem, por definição e por essência, fim, que fez entrar o infinito no pensamento matemático como um de seus elementos, tão necessário quanto o finito. Além disso, a divisibilidade ao infinito fez aparecer a concepção de algo presente que o número algoritmizado e enunciável não pode atingir nem medir, fez aparecer a construção conceitual de algo que não pode ser mensurável.

5) Com Zenão se estabelece de forma categórica a passagem da medida pontual dos pitagóricos para a medida linear.
6) Alguns historiadores dizem que a demonstração por absurdo deve ter surgido a partir do diálogo polêmico entre a escola de Eléia e as outras escolas. Entretanto, pensa-se que, de fato, ela remontaria ao período pitagórico, por causa da demonstração da incomensurabilidade de $\sqrt{2}$ com qualquer unidade de medida, demonstração essa que é feita por absurdo. Seja como for, é consenso a ligação entre a demonstração por absurdo, a matemática e a filosofia, com Zenão.

Nota: A questão da tradução de logos e aléteia

- O bispo Willem van Moerbeke (belga - ~1215 à 1286) traduzindo a “Metafísica” de Aristóteles para o latim, decide que logos (palavra, relação) será melhor traduzido pela palavra ratio, divisão, rateio. Nasce aqui o problema da razão, no pensamento. Será, a partir daí, tanto um problema de filosofia, quanto uma frente para grupos se imporem uns aos outros.
- Aléteia, des-velamento, os filósofos latinos traduzirão pela palavra veritas, verdade. Uma experiência comunitária totalmente diversa: o eixo de concentração e recolhimento do processo histórico se desloca da manifestação dada pela retirada da retratação da realidade, para os ordenamentos e as decisões impostas por um parâmetro de rendimento. Aparece a funcionalidade, que vai aumentando para todos os lados a voracidade de sua força de redução e estreitamento. Funcionalidade essa que restringe o problema filosófico da lógica, ou seja, a questão da pluridimensionalidade do desvelamento, ao cálculo de uma axiomatização formalizada de todas as relações.

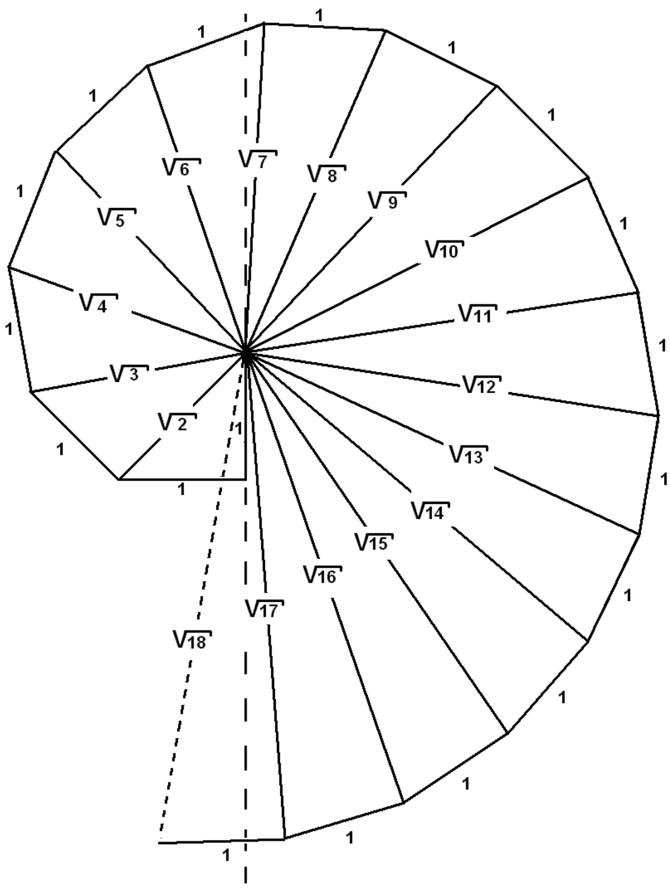
Escola de Atenas / Academia de Platão / Os três problemas clássicos

Atenas hospedou grandes matemáticos. Entre eles podemos citar:

- Teodoro de Cirene (~470 à ~420 a.C.) e Teeteto de Atenas (~415 à ~369 a.C.)

  \- Teeteto diz que Teodoro mostrou que $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{17}$ não são comensuráveis com a unidade, cada uma separadamente (*). Entretanto não se sabe por que Teodoro parou em $\sqrt{17}$.

  Em 1941 o matemático alemão J.H.Anderhub sugeriu a construção geométrica abaixo para explicar o motivo que fez Teodoro parar em $\sqrt{17}$: $\sqrt{17}$ é a última raiz antes que os novos triângulos recubram a construção geométrica abaixo:



(*) observemos que a irracionalidade de $\sqrt{2}$ nessa época já era um exemplo consagrado.

Anderhub denominou esta espiral "die Quadratwurzelschnecke" que quer dizer "o caracol da raiz quadrada". Em homenagem à Teodoro, ela é também chamada "espiral de Teodoro".

Historiadores da matemática a partir da leitura dos textos gregos sugerem a demonstração de caráter aritmético:

Demonstração pelo par e pelo ímpar

De início é fácil ver que a demonstração utilizada para $\sqrt{2}$ vale para $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{14}$. O caso de $\sqrt{12}$ se vincula ao caso de $\sqrt{3}$. Os casos $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}$ são evidentes porque 4, 9, 16 são números quadrados.

Restam os casos de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{15}, \sqrt{17}$, isto é, os casos de $\sqrt{N}$ para N ímpar.

Vamos agrupá-los em famílias e demonstrar a incomensurabilidade por absurdo.

Para tais N, se $\sqrt{N} = \frac{p}{q}$ e mdc(p,q) = 1, temos p² = Nq² com p q e q não todos os dois pares. N sendo ímpar, p e q devem ser ímpares.

Assim, seja p = 2a + 1 e q = 2b + 1, com $a, b \in \mathbb{Z}_+$. Daí,

$$(2a+1)^2 = N(2b+1)^2$$
$$4a^2 + 4a + 1 = N(4b^2 + 4b + 1)$$
$$4a(a+1) + 1 = N(4b(b+1) + 1) \quad (*)$$

Se N = 4n + 3, n= 0, 1, 2, 3 (N ∈ { 3, 7, 11, 15})

A igualdade (*) se escreve:

$$4a(a+1) + 1 = (4n+3)(4b(b+1)+1)$$
$$4a(a+1) + 1 = 4n(4b(b+1)+1) + 12b(b+1) + 3$$
$$4a(a+1) = 4n(4b(b+1)+1) + 12b(b+1) + 2$$
$$2a(a+1) = 2n(4b(b+1)+1) + 6b(b+1) + 1$$

que é impossível pois que um membro é par e o outro ímpar.

Se N = 8n + 5, n= 0, 1 (N ∈ { 5, 13})

A igualdade (*) se escreve:

$$4a(a+1)+1 = (8n+5)(4b(b+1)+1)$$
$$4a(a+1)+1 = 8n(4b(b+1)+1)+20b(b+1)+5$$
$$4a(a+1) = 8n(4b(b+1)+1)+20b(b+1)+4$$
$$a(a+1) = 2n(4b(b+1)+1)+5b(b+1)+1$$
$$a(a+1) = 8nb(b+1)+2n+5b(b+1)+1$$

que é impossível pois que um membro é par e o outro é impar.

Se N = 8n + 1, n= 2 (N = 17)

A igualdade (*) se escreve:

$$4a(a+1)+1 = (8n+1)(4b(b+1)+1)$$
$$4a(a+1)+1 = 8n(4b(b+1)+1)+4b(b+1)+1$$
$$4a(a+1) = 8n(4b(b+1)+1)+4b(b+1)$$
$$a(a+1) = 2n(4b(b+1)+1)+b(b+1)$$
$$a(a+1) = 8nb(b+1)+2n+b(b+1)$$

na qual os dois membros são pares, e se é confrontado a uma variedade de possibilidade. De fato, 17 é o menor inteiro positivo da forma 8n + 1 para o qual seu método nada permite decidir.

Com isso podemos dizer que o problema se complica, e, em sendo esse o método seguido, é natural que Teodoro tenha parado em $\sqrt{17}$. Uma segunda versão para este motivo, é que Teodoro teria generalizado os casos a partir de 17 tomando em consideração as classes modulares, o que permitiu a Teeteto de concluir a infinidade em número de segmentos incomensuráveis. Outra versão é a de que eventualmente, Teodoro achava suficientemente estabelecida uma lei geral, que de fato não formulou, com doze demonstrações.

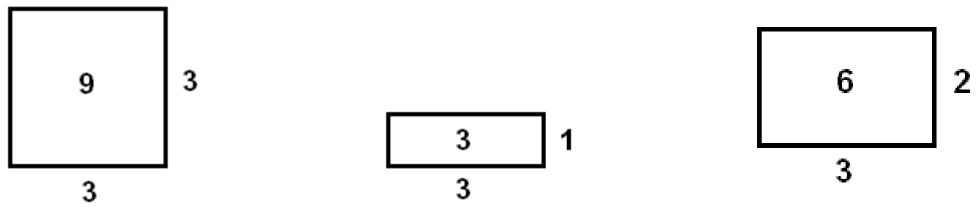
- Teeteto generaliza: já que é infinita a quantidade dessas raízes, ele tenta reuni-las em uma única que serviria para designar todas. Assim, ele divide os números em duas classes:

1- os que podem ser formados pela multiplicação de fatores iguais, representando-os pela figura de um quadrado e designando-os pelo nome de quadrados.

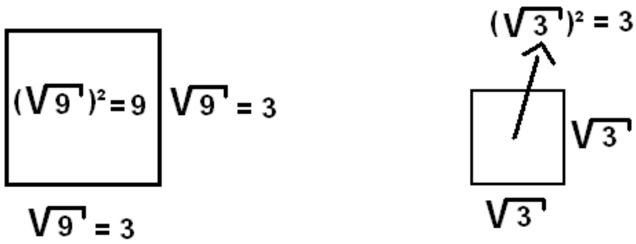
2- os que ficam entre esses primeiros, como o 3, o 5 e todos os números que não podem ser formados multiplicando fatores iguais, mas somente um maior por um menor ou o inverso e que exprimem por uma figura de lados desiguais, representando-os pela figura de um retângulo e designando-os pelo nome de retangulares.

Daí, todas as linhas cujo quadrado forma um número quadrado são definidas como longitude, e essas cujo quadrado forma um número de fatores desiguais, são definidas como raízes, porque elas não são comensuráveis com as outras pelo comprimento, mas somente pelas áreas que elas formam.(*)

(*) Visualização:



9 é um número quadrado | 3 é um número retangular | 6 é um número retangular



3 é uma longitude
9 é um número quadrado

$\sqrt{3}$ é uma raiz
3 é um número retangular

- Teeteto procedeu do mesmo modo com os sólidos, isto é, ele sabia demonstrar a irracionalidade de $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots$

- Podemos observar a relação de um ponto de vista geométrico com um ponto de vista aritmético.

- Devemos ver Teeteto como o fundador da teoria dos incomensuráveis, tal como ela é exposta no Livro X dos Elementos de Euclides. Entretanto na podemos concluir daí que o Livro X todo inteiro seja devido a Teeteto.

- Alguns resultados de Teodoro e Teeteto aparecem no diálogo platônico "Teeteto".

○ **Antifão de Atenas** (480 à 411 aC)

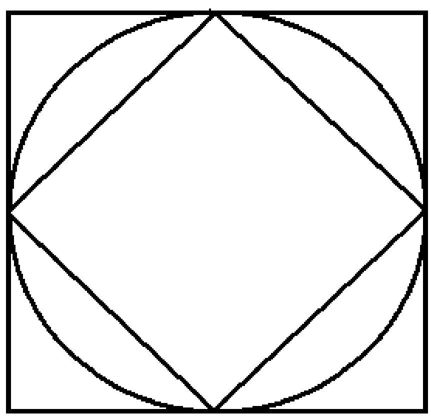
- Foi o primeiro a sugerir que a área de um círculo poderia ser calculada em termos de polígonos regulares nele inscritos e circunscritos, a partir da tentativa de solucionar o problema da quadratura do círculo;

- Geômetras gregos:

* O 2^n-ágono regular inscrito num círculo ocupa mais do que $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ da área deste círculo.

Demonstração:
(Prova por indução matemática sobre o número de lados)

a) O quadrado inscrito ocupa mais do que a metade do círculo:

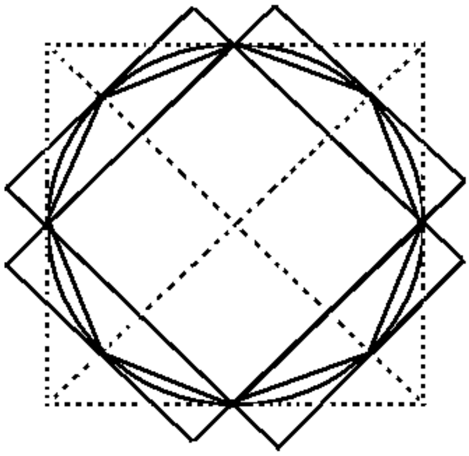


Realmente, a área do quadrado inscrito é exatamente a metade da área do quadrado circunscrito cuja área é maior do que a área do círculo.

Na verdade, o lado do quadrado circunscrito é igual a diagonal do quadrado inscrito que é igual ao diâmetro do círculo. (n = 2)

b) Vamos agora provar que o octógono (n = 3) ocupa mais do que $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ da área do círculo no qual ele está inscrito.

Denotamos por A_2 a área do quadrado e por A_3 a área do octógono. A_c é a área do círculo.



Seja R_2 a área dos quatro retângulos

(a) $\rightarrow$

$A_2 > \frac{A_c}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) A_c.$ (1)

É claro da construção que $A_3 - A_2 = \frac{R_2}{2}$ (2)

Também é evidente que $A_c - A_2 < R_2$ (3)

(2) e (3) $\rightarrow$

$$A_3 - A_2 = \frac{R_2}{2} > \frac{A_c}{2} - \frac{A_2}{2} \rightarrow A_3 > \frac{A_c}{2} + \frac{A_2}{2}$$

Acrescentando (1) temos

$$A_3 > \frac{A_c}{2} + \frac{A_2}{2} > \frac{A_c}{2} + \frac{A_c}{2} - \frac{A_c}{4}$$

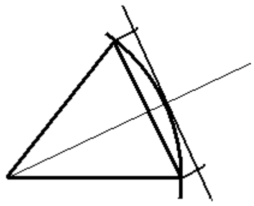
Ou seja,

$$A_3 > \frac{3}{4} A_c = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) A_c$$

c) Agora vamos provar que se A_n denota a área do 2^n-ágono então:

$$A_n > \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)A_c \to A_{n+1} > (1 - \frac{1}{2^n})A_c$$

Suponhamos que a figura abaixo representa um 2_n-ésimo setor do 2^n-ágono:



Analogamente, considere os 2^n-retângulos cuja soma das áreas é R_n tais que:

$$A_{n+1} - A_n = \frac{R_n}{2} \qquad (2)$$

Estamos assumindo a hipótese que $A_n > A_c - \frac{A_c}{2^{n-1}}$. (1)

Além disso, $R_n > A_c - A_n$. (3)

(2) e (3) $\rightarrow A_{n+1} - A_n = \frac{R_n}{2} > \frac{A_c}{2} - \frac{A_n}{2}$

e portanto $A_{n+1} > \frac{A_c}{2} + \frac{A_n}{2} > \frac{A_c}{2} + \frac{A_c}{2} - \frac{A_c}{2^n}$

Isto é: $A_{n+1} > \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)A_c$.

■

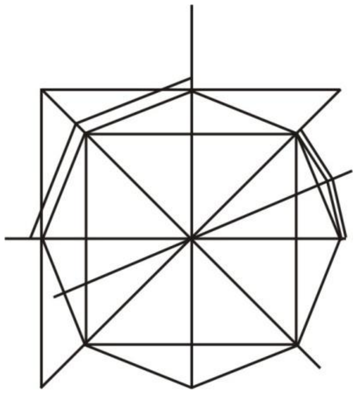
* a área de um 2^n-ágono regular é proporcional ao quadrado de sua maior diagonal.

- Antifão:

* um círculo é um polígono regular com um número muito grande (mas finito) de lados.
* uma vez que um círculo comporta-se como um 2^n-ágono regular, sua área é proporcional ao quadrado de seu diâmetro.

- Procedimento de Antifão (com este procedimento Antifão foi o precursor da demonstração por ”exaustão”)

“Dobrando o número de lados de polígonos regulares inscritos e circunscritos a um círculo e repetindo sucessivamente a operação, pode-se tornar nula a diferença entre a área do círculo e as áreas dos polígonos regulares.”



Obs.:

1) Na prova pelo Método de Indução Finita do teorema acima, os itens (a) e (b) constituem o passo chamado “base da indução”. No item (c) a desigualdade $A_n > \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) A_c$ constitui o passo chamado “hipótese da indução”. Mostrar a partir daí que $A_{n+1} > \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) A_C$ corresponde ao chamado “etapa indutiva”.

2) O método de Indução Finita é um método de demonstração proveniente do quinto axioma de um sistema de cinco axiomas conhecidos como “axiomas de Peano” (Giuseppe Peano – italiano – 1858 à 1932), estabelecidos em 1899 na sua obra “Os princípios da aritmética, novo método de exposição”, propostos para elaborar uma definição axiomática dos números naturais, ou seja, propostos para definir a aritmética. Essa axiomatização se enuncia como segue:

Existem o conjunto dos números naturais notado por $\mathbb{N}$ e uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ chamada sucessor tais que:

I. O elemento chamado um e notado por 1, é um número natural.

[Este axioma é existencial. Ele garante que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não é vazio.]

II. Todo número natural n possui um outro número natural, único, denominado seu <u>sucessor</u>, notado s(n).

[Este axioma consolida uma noção intuitiva amadurecida das experiências concretas de contagem. Os números naturais são ordenados: a um número natural n segue seu sucessor]

III. Nenhum número natural tem 1 como sucessor.

IV. Dois números naturais tendo o mesmo sucessor são iguais (dito de outro modo: para dois números naturais diferentes os sucessores são diferentes).

[A concepção intuitiva que tem-se do conjunto dos números naturais e os fundamentos dos processos de contagem evidenciam que dois números naturais distintos n e m tem sucessores distintos s(n) e s(m)]

Nota: Dos Axiomas II, III e IV vê-se que o processo de definir o sucessor de um número natural é visto através de uma função injetiva $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Deste modo tem-se o seguinte diagrama:

$$1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \xrightarrow{s} 5 \xrightarrow{s} \ldots$$

V. Seja X um subconjunto dos números naturais com as seguintes propriedades:

(i) X contém o número 1;

(ii) X contém o sucessor de cada um de seus elementos. Isto é, se $x \in$ X, então o sucessor de $x, s(x),$ também pertence a X.

Nestas condições, X=$\mathbb{N}$.

[Este axioma, conhecido como “axioma de indução”, garante que, partindo do número 1 e tomando os sucessores, pode-se <u>completar</u> o conjunto $\mathbb{N}$. Por outro lado, além de desempenhar esse papel fundamental na formulação de uma consistente teoria dos números naturais$^{(*)}$, sua importância extrapola o domínio dos números naturais. O axioma da indução de Peano é um método de demonstração, denominado "Método de Indução Finita" ou "Princípio de Indução Finita" ou "Princípio de Indução Matemática".]

Nota para o axioma V:

O axioma V pode ser apresentado também da seguinte maneira:

"Seja P(n) uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que

(i) P(1) seja verdadeira, e

(ii) qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que P(n) é verdadeira, segue que P(n +1) é verdadeira

Então, P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$"

Deve-se observar que a hipótese (ii) diz que sempre que algum n pertença a categoria "P(n) é verdadeira", então n+1 também pertence a esta mesma categoria.

3) <u>Considerações históricas</u>: Cita-se o matemático Francesco <u>Maurolico</u> (italiano – 1494 à 1575) como o primeiro a utilizar a indução matemática nos eu livro "Arithmeticorum libri duo" (1575) ao demonstrar que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2 (isto é, $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$). Entretanto, descobertas recentes mostram que, antes, matemáticos como Abu Bakr Muhammad ibn al-Hasan <u>al-Karaji</u> (persa - ~953 à ~1029) e Lévi ben Gershom dito <u>Gersonide</u> (francês de origem judia – 1288 à 1344) já utilizavam este método de demonstração para sentenças abertas sobre $\mathbb{N}$.

$^{(*)}$De fato, não é possível "escrever" o conjunto dos números naturais apenas com o auxílio dos quatro primeiros axiomas.

4) Pode ocorrer que uma dada sentença aberta seja válida para todos os números naturais a partir de um determinado número natural n_o, mas não necessariamente para valores menores. Como proceder nesses casos? Utilizando a generalização da "prova por Indução Matemática" vista na "Nota para o axioma V":

"Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$, e seja $n_0 \in \mathbb{N}$. Suponha que

i) $P(n_o)$ é verdade, e

ii) $P(n+1)$ é verdade sempre que $P(n)$ é verdade, para $n \geq n_0$.

Então, $P(n)$ é verdade para todo número natural $n \geq n_0$."

Os três problemas clássicos e a invenção de novas curvas

No período da matemática em Atenas os conhecimentos matemáticos já eram notáveis. Dele são os ditos três problemas clássicos da matemática grega:

1) Como construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado?
2) Como dividir um ângulo qualquer em três partes iguais?
3) Como construir um quadrado de área igual à de um círculo dado?

[Problema que já tinha, por exemplo, ocupado os matemáticos no Antigo Egito:

Problema 50 do papiro de Rhind:

"Modo de operar em um campo circular de 9khet (de diâmetro).

Qual o valor disso em área?

Toma $\frac{1}{9}$ disso, isto e, 1khet;

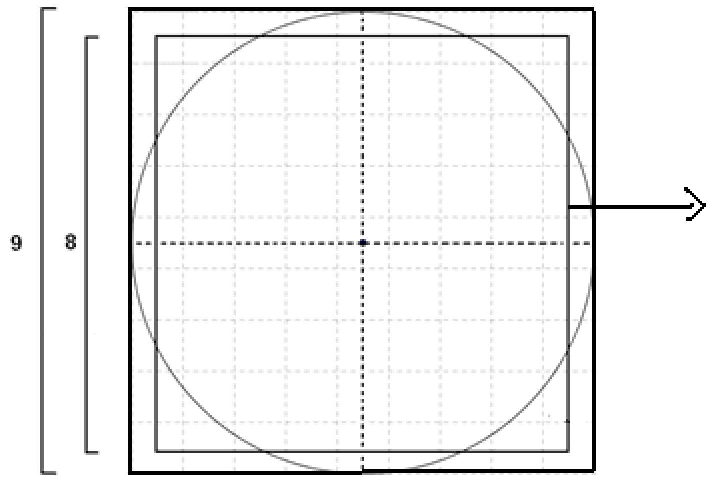
O resto é 8khet. Opera:

Multiplica 8 por 8, o que faz 64;

O valor disso é, em área, 64 setat de terra"

(1 setat é o khet ao quadrado)

A solução vem acompanhada da figura de um círculo tendo, para a dimensão do diâmetro, 9khet.



Área do quadrado =

$\left(\frac{8}{9}\,\text{de}\ 9\right)^2 = 64$

$= \underline{3{,}160493827}\ (\frac{9}{2})^2$

Identificado

como π

Adaptando-se a solução do problema a outra leitura, verifica-se que ela diz ser a área do círculo equivalente a área de um quadrado que tenha lado $\frac{8}{9}$ do valor de seu diâmetro, o que caracteriza a forma atual de avaliar a área do círculo, considerando o valor de π como 3,160493827.]

Os enunciados dos três problemas são:

1) Duplicação do cubo: dado um cubo qualquer, construir um cubo com o dobro do volume do cubo dado;
2) Trissecção do ângulo: dado um ângulo qualquer, construir um ângulo que seja a terça parte do ângulo dado;
3) Quadratura do círculo(*): dado um círculo qualquer construir um quadrado que tenha a mesma área do círculo dado.

Nota: Esses três problemas têm um papel importante no desenvolvimento da matemática. Eles são problemas de construção que resistiam a todas as tentativas para resolvê-los utilizando somente régua sem graduação e compasso.

O fato dos gregos tentarem resolver problemas de construção geométrica usando somente régua sem graduação e compasso pode-se dever a ideia de perfeição atribuída à circunferência e à linha reta(**). Contudo é falsa a crença de que os gregos trabalhavam com régua sem marcas e compasso, para a resolução de problemas geométricos. De fato, para resolverem um problema eles usavam estas duas ferramentas ou criavam novas ferramentas.

(*) Quadratura é um nome emprestado do latim quadratura que por sua vez é derivada de quadratus (quadrado). Este termo de geometria entra correntemente na expressão "A quadratura do círculo" em 1407. Ele tomou o sentido de "operação consistindo a determinar a área delimitada por uma curva fechada" em 1875.

(**) De fato, para os gregos duas figuras geométricas faziam o objeto de uma admiração quase mística: a reta e o círculo, pilares fundadores da sociedade grega, tanto na matemática quanto na política. Assim, o círculo era o símbolo da democracia, pois em uma democracia, todos os cidadãos estão a uma igual distância do poder, a exemplo dos pontos do círculo em relação a seu centro. Se está longe da antiguidade egípcia, onde a organização política estava simbolizada por uma pirâmide, modelo da hierarquização social.

De suas tentativas para achar soluções para os problemas clássicos, por exemplo, surgiram várias curvas e métodos mecânicos que enriqueceram a matemática. No entanto é verdade que para eles sempre que uma construção fosse possível com régua e compasso, métodos mais avançados não deveriam ser utilizados. Por outro lado, somente em 1837 é que foi demonstrado, por Pierre-Laurent Wantzel (francês – 1814 à 1848) que um número real é construtível com régua sem graduação e compasso se, e somente se, ele é um número algébrico de grau uma potência de 2, sobre os racionais.

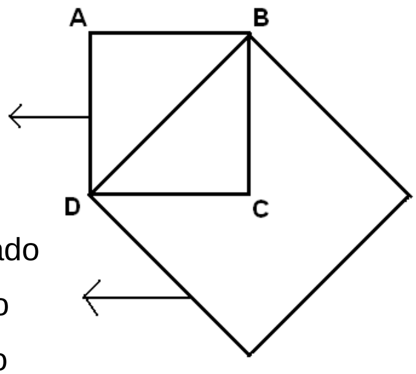
1) Duplicação do cubo

- A duplicação do quadrado

No diálogo Menão de Platão, Sócrates faz com que um jovem escravo ache um quadrado cuja área é duas vezes a área de um quadrado dado. Isto pode ser feito facilmente com régua sem graduação e compasso.

Quadrado dado

Quadrado cujo lado é a diagonal do quadrado dado



Pelo teorema de Pitágoras:

$DB^2 = AB^2 + AD^2 \quad (AD^2 = AB^2)$

$DB^2 = 2AB^2$

$\leftrightarrow \quad \frac{AB}{DB} = \frac{DB}{2AB}$

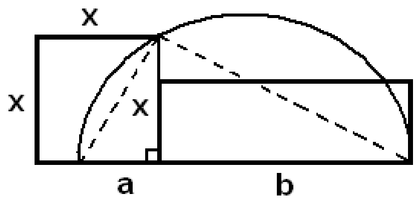
Assim, achar DB é equivalente a inserir uma média proporcional entre AB e 2AB.

- A origem do problema da duplicação do cubo está nas investigações de:

***** **<u>Hipócrates de Quios</u>** (460 à 380 aC) trabalha sobre a média proporcional entre dois segmentos (assinala Eratóstenes de Cirene (274 à 194 aC)).

Hipócrates procura generalizar a construção de um quadrado cuja área é igual a esta de um retângulo dado.

Consideremos um retângulo de lados a e b.



No triângulo retângulo, $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ (a altura x é a média proporcional entre os dois segmentos que ela determina sobre a hipotenusa).

Algebricamente, a construção do quadrado significa encontrar x tal que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

Tentando generalizar essa ideia para a construção do dobro do volume do cubo, Hipócrates trouxe o problema para encontrar duas médias proporcionais x e y em uma proporção contínua entre os segmentos retos a e b dados:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

e, daí,

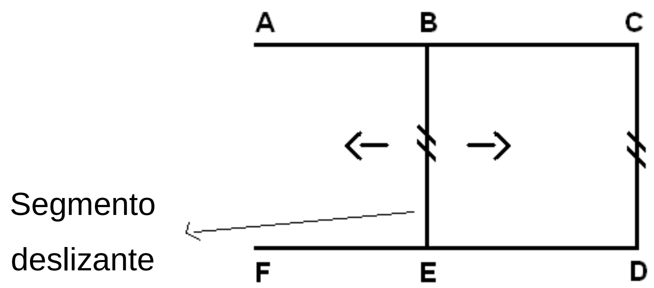
$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x}.\frac{x}{y}.\frac{y}{b} = \frac{a}{b}$$

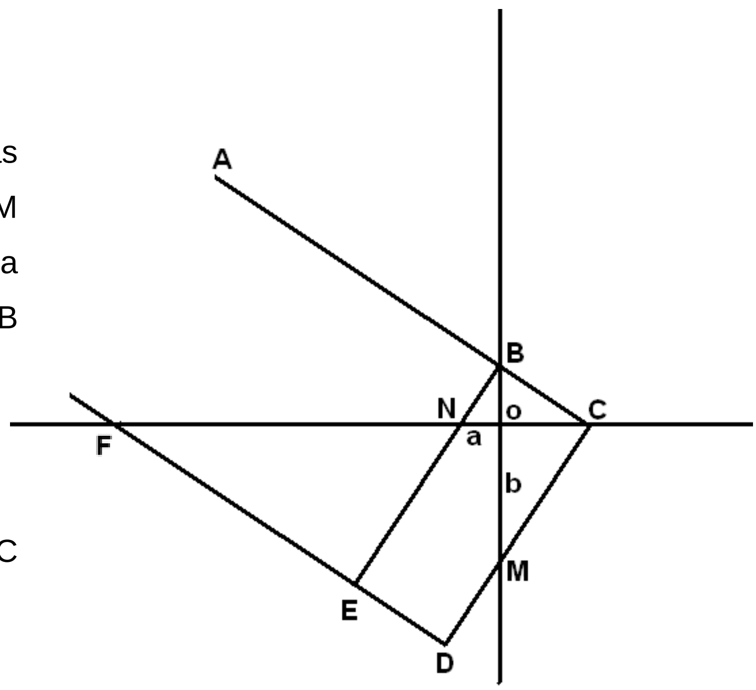
$$\leftrightarrow \quad \frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{b} \quad \leftrightarrow \quad x^3 = \left(\frac{b}{a}\right)a^3$$

Assim, construindo x podemos aumentar o volume do cubo na proporção $\frac{b}{a}$ desejada. Em particular quando b = 2a, se obtêm a duplicação desejada:

$x^3 = \left(\frac{2a}{a}\right)a^3 \quad \leftrightarrow \quad x^3 = 2a^3,$ onde a é a aresta do cubo dado.

A máquina de Platão (de pseudo-Platão)





Para achar duas médias proporcionais entre ON e OM movimentamos ACDF como na figura acima. Os triângulos NOB e COM sendo semelhantes,

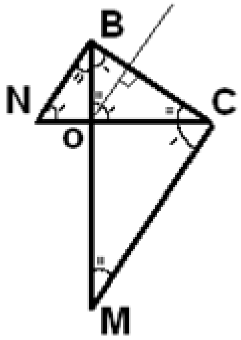
$$\frac{ON}{OB} = \frac{OC}{OM}$$

Os triângulos NOB e BOC também o são. Daí,

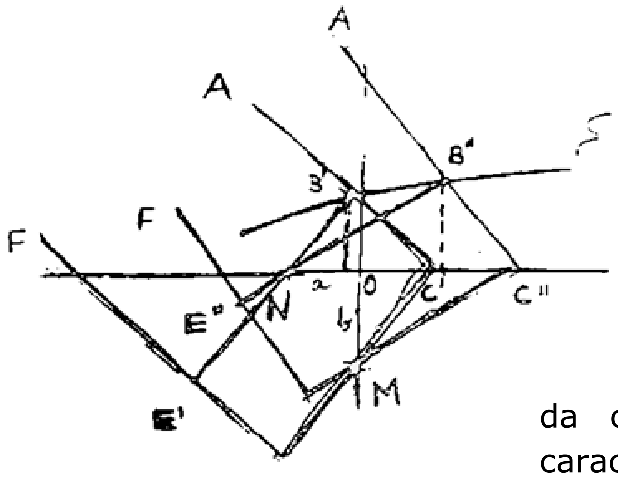
$$\frac{ON}{OB} = \frac{OB}{OC}$$

Logo, $\frac{ON}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OM}$, isto é, OB e OC são médias proporcionais entre ON e OM. Fazendo ON = a e OM = b, temos:

$$\frac{a}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{b}$$



Manipulando o dispositivo pseudo-platônico como na figura da próxima página, obtemos:



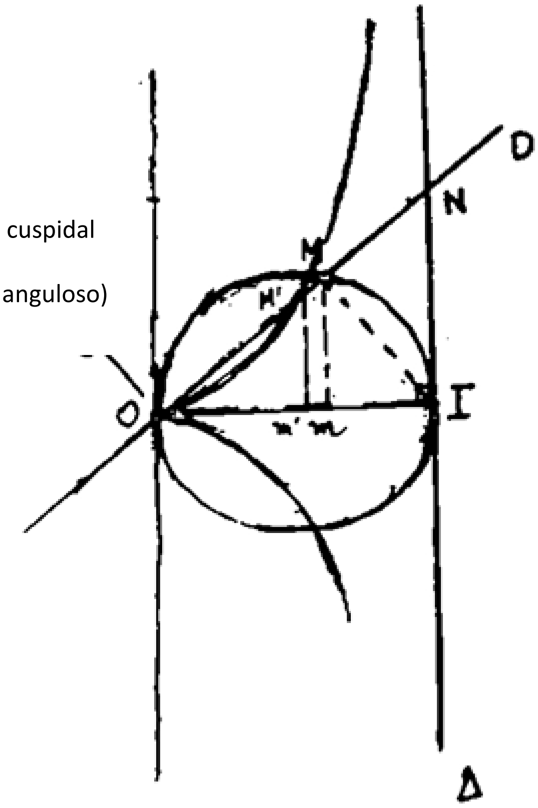
Curva denominada <u>ofiuride</u>

O ponto de interseção da curva com a reta MO caracteriza a configuração para a solução do problema.

- Dioclés (~200 à ~150 aC)

Ponto cuspidal

(ponto anguloso)



OM = NM'

O lugar geométrico do ponto M' quando M descreve o círculo é chamado cissóide[*] (reta) de Dioclés.

Temos que $Mm^2 = Om.mI$ (pois o triângulo OMI é retângulo em M).

Além disso, $Om.mI = Om.Om'$ (pois OM'=MN, então Om'=mI).

Daí, $\frac{\mathrm{Om'}}{\mathrm{Om}} = \frac{\mathrm{Mm}^2}{\mathrm{Om}^2}$. Por semelhança de triângulos

$$\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{Om}} = \frac{\mathrm{M'm'}}{\mathrm{Om'}}$$

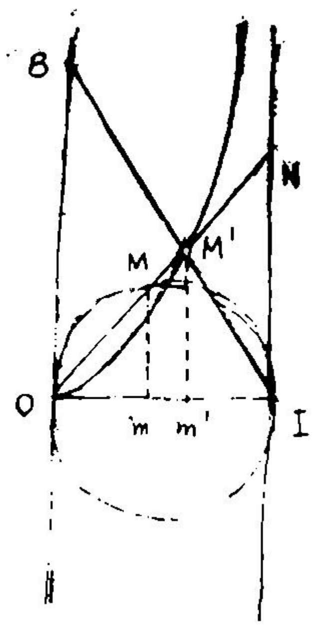
Logo $\frac{\mathrm{Om'}^3}{\mathrm{Om}} = \mathrm{M'm'}^2$. Em linguagem algébrica, fazendo Om'=x e M'm'=y, temos

Om = m'I = OI − Om' = OI − x.

Considerando m(OI) = 1, Om = 1 − x e $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$.

---

[*] em forma de folha de hera



Para obter a construção de $\sqrt[3]{2}$, é suficiente de colocar sobe um eixo perpendicular em O à OI o ponto B tal que m(OB) = 2.

Teoricamente, seja M' o ponto de interseção de IB e da cissóide. Obtivemos acima,

$$\frac{0m'}{0m} = \frac{Mm^2}{0m^2} = \frac{M'm'^2}{0m'^2}.$$

Temos agora que

$$\frac{Im'}{1} = \frac{M'm'}{2}.$$

Daí,

$$0m = Im' = \frac{M'm'}{2}$$

e então

$$\frac{20m'}{M'm'} = \frac{M'm'^2}{0m'^2}.$$

Logo

$$2 = \frac{M'm'^3}{0m'^3} = \frac{IN^3}{OI^3} = IN^3 \text{ e } IN^3 = 2.$$

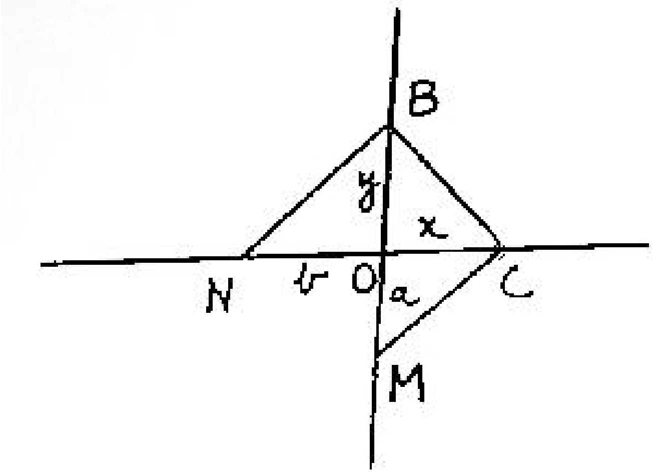
- Menécmo de Proconeso (~375 à ~325 aC)

Observou que a proporção contínua de Hipócrates podia ser pensada sob a forma de duas proporções simultâneas:

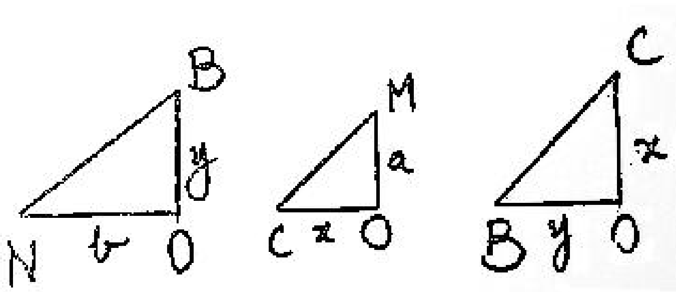
$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} & \text{(parábola)} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{b} & \text{(parábola)} \end{cases}$$

O problema consiste em encontrar segmentos x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ e $\frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ para os segmentos a e b dados. Vamos analisar separadamente cada uma destas duas proporções geometricamente através do aparato de Platão.

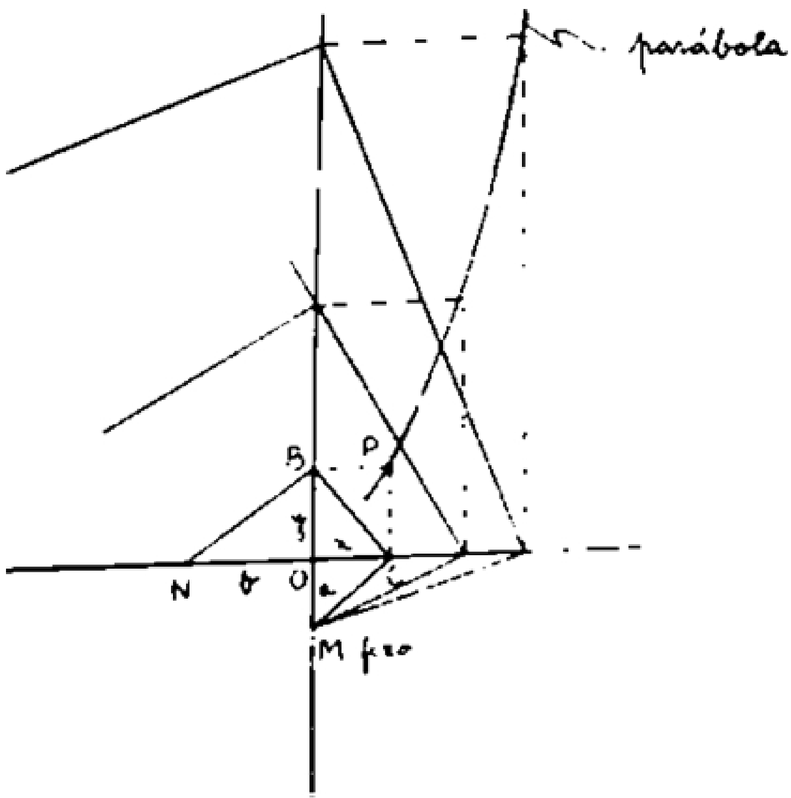
Para estabelecer uma analogia com a ideia de eixos coordenados vamos configurar com a máquina de Platão a seguinte disposição:



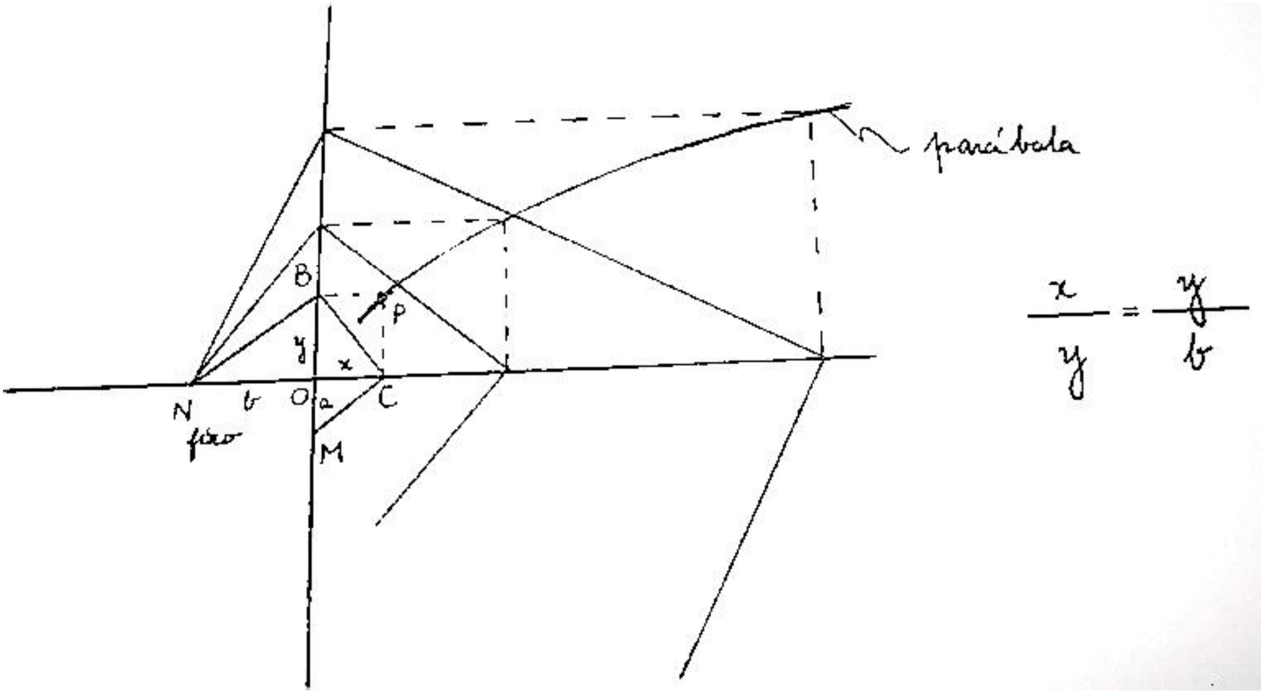
Como os triângulos NOB e COM são semelhantes, bem como os triângulos NOB e BOC, temos



$$\frac{y}{b} = \frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad \leftrightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$



$$\mathbf{\frac{a}{x} = \frac{x}{y}}$$



O ponto P é o ponto de interseção das duas curvas. OC é um segmento que mede $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,a$.

Fazendo b = 2ª, OC mede $\sqrt[3]{2}\,a$.

A proporção contínua de Hipócrates pode também ser escrita sob a forma de duas proporções simultâneas seguintes:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} & \text{(parábola)} \\ \dfrac{a}{x} = \dfrac{y}{b} & \text{(hipérbole)} \end{cases}$$

- Obs:

Alguns historiadores pensam que essas curvas não fossem conhecidas por Menécmo como sendo seções de um cone de revolução. Sugerem que elas foram construídas pontualmente de maneira mecânica.(*)

(*) Outros historiadores, seguindo Eutocio de Ascalon (~480 Á ~540 dC) preferem admitir que elas já eram conhecidas por Menécmo como seções do cone. Ponto importante: através da resolução do problema da duplicação do cubo pelas interseções de seções cônicas (interseção de duas parábolas e de uma parábola com uma hipérbole eqüilátera), Menécmo trouxe para o problema duas soluções logicamente deduzidas a partir de definições claras e distintas

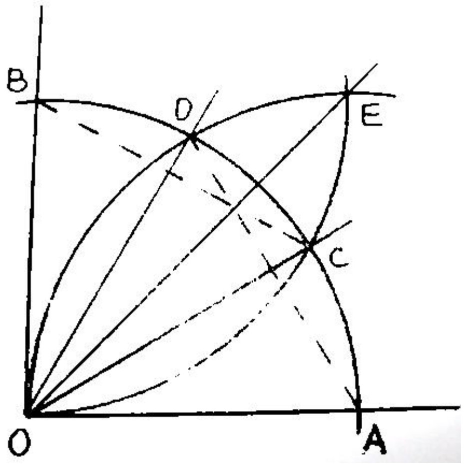
2) Trisseção do ângulo

O problema da trissecção do ângulo estava resolvido para o ângulo reto, graças ao triângulo equilátero(*). Restava resolver para o ângulo agudo. A questão se apresentava naturalmente. O estudo da bissecção tinha fixado a atenção das primeiras gerações dos geômetras gregos a propósito da importância da bissetriz no estudo das propriedades do triângulo. Por um movimento lógico do pensamento, o problema da bissecção levava a procurar a trissecção do ângulo através da régua sem graduação e do compasso.

Acredita-se que

- **Hípias de Elis** (~465 à ~390 aC) foi um dos primeiros a tentar resolver este problema inventando uma curva denominada <u>trissectriz de Hípias</u> (conhecida também como <u>quadratriz de Dinostrato</u> (~390 à 320 aC) (irmão de Menécmo))

(*)

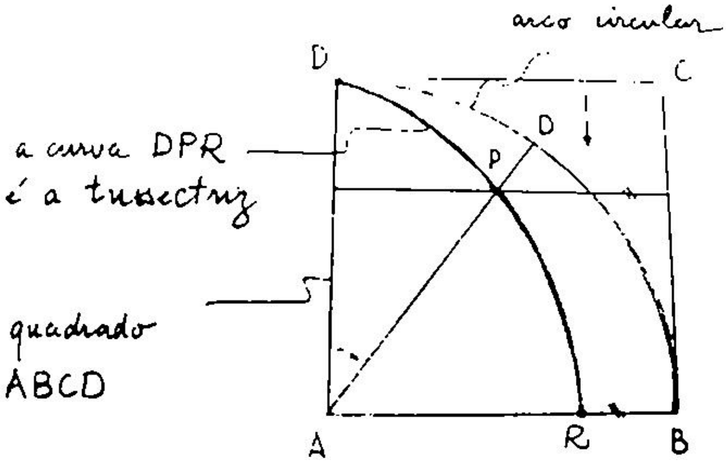


Os três círculos têm o mesmo raio.

Logo os triângulos BOC e DOA são equiláteros e congruentes.

A semi-reta OE bissecta o ângulo AOB.

Obs.: Com o raciocínio da figura acima, vemos que os ângulos da forma $\frac{\pi}{2^n}$, $n \geq 1$, são trissectáveis com régua não-graduada e compasso.

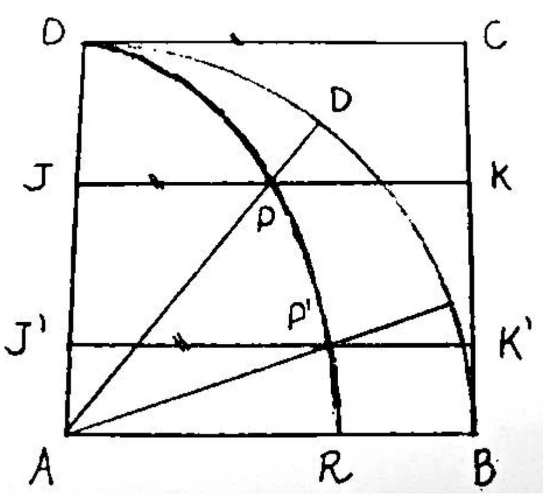


AD gira com um movimento circular uniforme em torno e A até que coincida com o lado AB. Ao mesmo tempo o lado DC desce com velocidade constante até coincidir com AB. Os dois movimentos estão sincronizados de maneira que ambos os lados DC e AD coincidam com AB no mesmo instante. A trissectriz é o lugar geométrico gerado pelas interseções destes dois lados móveis.

<u>Obs.:</u>

Vê-se que a trissectriz nunca intersecta o lado AB porque quando AD chegar a AB, DC também chegará de modo que os dois lados coincidem sem se intersectar. Assim a trissectriz <u>se aproxima indefinidamente do ponto R</u>.

<u>A trisseção do ângulo pela trissectriz</u>



$$AJ' = \frac{AJ}{3} \quad , \qquad BK' = \frac{BK}{3}$$

Assim, $P'AR = \frac{1}{3}\,PAR$

Nota: A construção por ajustamento ou por neusis (em grego)

Em uma construção por neusis deve-se ajustar um segmento dado entre duas linhas (retas ou curvas) dadas com a exigência de que o segmento passe por um ponto dado. Assim, uma linha reta tem que ser colocada entre duas linhas retas ou curvas de maneira que passe por um ponto dado e o segmento determinado sobre ela pelas interseções com as linhas retas ou curvas seja igual ao comprimento dado.

Exemplo: a trissecção do ângulo por Arquimedes é um exemplo de construção pelo método de neusis: ajustamos um segmento (o raio FB), cuja reta suporte passa por C, entre o círculo e a reta que passa por D e por B. (Exercício 2 – 2ª lista)

Exercício: Faça um estudo da trissecção do ângulo por Nicomedes (que utiliza o método de neusis) Esboce também a curva gerada denominada Conchóide(*) de Nicomedes(**).

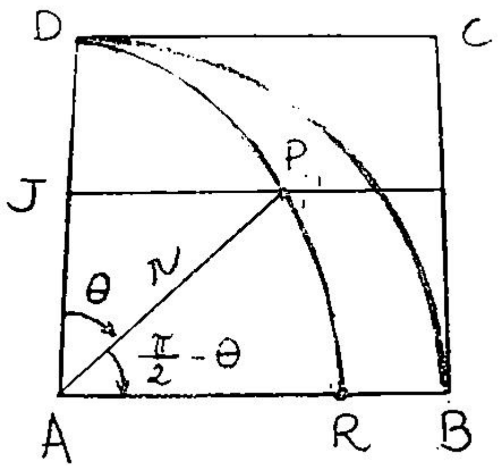
3) **Quadratura do círculo**

Quadrar uma região poligonal consiste em traçar, somente com régua não graduada e compasso, um quadrado cuja área seja igual a área dessa região poligonal. Esse problema está completamente resolvido nos Livros I e II dos Elementos de Euclides. O próximo problema é então quadrar regiões limitadas por curvas. Dentre essas regiões, o círculo é uma região obvia. Acredita-se que a origem do interesse grego nos problemas de quadratura tenha se originado da quadratura do retângulo. Aristóteles diz que a origem desta quadratura foi a procura da medida geométrica, mas que isso foi esquecido e só ficou preservado o problema.

(*) em forma de concha
(**) ~280 à ~210 a.C.

- **Dinostrato de Proconeso**

A trissectriz é mais chamada <u>quadratriz de Dinostrato</u>, pois este a utilizou para resolver a quadratura do círculo.



x = JP

y = AJ

Devido à proporcionalidade dos dois movimentos, $y = k(\frac{\pi}{2} - \theta)$, k constante de proporcionalidade. Quando $\theta = 0$, temos

$$y = AD = k\left(\frac{\pi}{2}\right) \leftrightarrow \quad k = \frac{2AD}{\pi}. \text{ Daí, } \; y = \frac{2AD}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Assim, com

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y}{r} \leftrightarrow \quad r = \frac{2AD\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\pi\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \quad (equação\ polar\ da\ quadratriz).$$

Logo,

$$AR = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} r = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{2AD}{\pi} \cdot \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{2AD}{\pi}.1 = \frac{2AD}{\pi}.$$

Raciocínio: se considerarmos um círculo de centro A e raio AR, ele tem uma circunferência igual ao perímetro do quadrado ABCD. De fato, pois, se $\mathrm{AR} = \frac{2\mathrm{AD}}{\pi}$, o perímetro do círculo de raio $\mathrm{AR} = 2\pi\mathrm{AR} = 2\pi\left(\frac{2\mathrm{AD}}{\pi}\right) = 4\mathrm{AD}$ = perímetro do quadrado ABCD. Entretanto, o comprimento AR não foi obtido com régua não graduada e compasso.

- **Hipócrates de Quios**

Definição de lúnula (em grego meniscos):

- é a região plana compreendida entre dois arcos de círculo cuja convexidade é voltada para o mesmo lado e que se intersectam, como o crescente da lua;

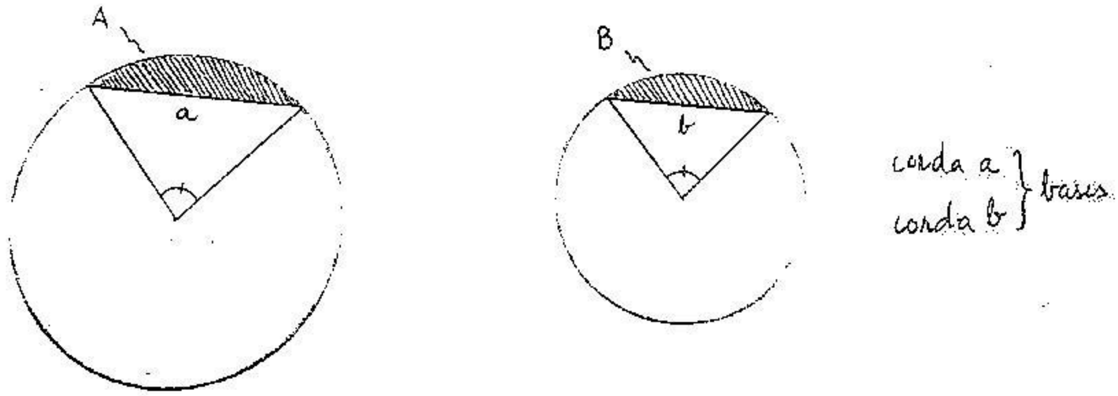
- é a diferença entre um segmento de círculo dado a partir do semi-círculo traçado sobre um lado de um polígono e a porção de área do círculo circunscrito a esse polígono sobre o mesmo lado.

Segmento de círculo: é a região limitada por um arco de círculo e uma corda, tendo eles as mesmas extremidades:

- Realizou a quadratura de certas lúnulas;

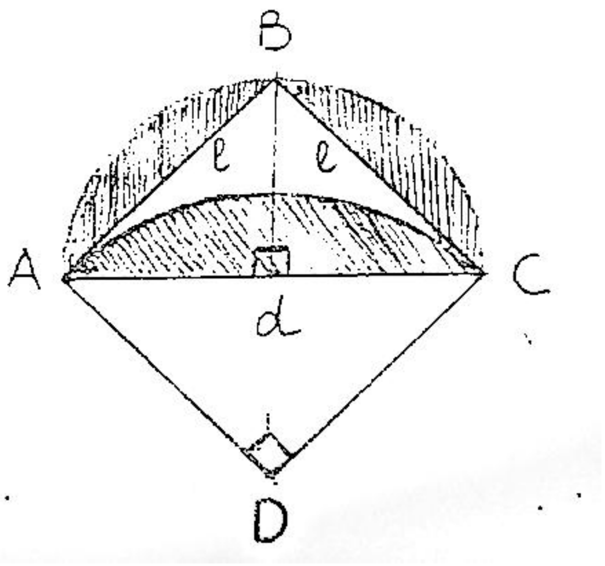
- Alguns resultados de Hipócrates:

* As áreas de segmentos circulares semelhantes estão na mesma razão que o quadrado de suas bases.



$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2}$$

* A área da lúnula construída sobre a diagonal de um quadrado é igual a metade da área do quadrado.



$$\frac{A_{AB}}{A_{BC}} = \frac{l^2}{l^2} = 1 \;\leftrightarrow\; A_{AB} = A_{BC}$$

(Os índices de A indicam os arcos.)

Como os segmentos circulares AB, BC e AC são semelhantes,

$$\frac{A_{AB}}{A_{AC}} = \frac{l^2}{d^2} = \frac{l^2}{2l^2} = \frac{1}{2} \;\leftrightarrow\; A_{AB} = \frac{1}{2}A_{AC}$$

Igualmente,

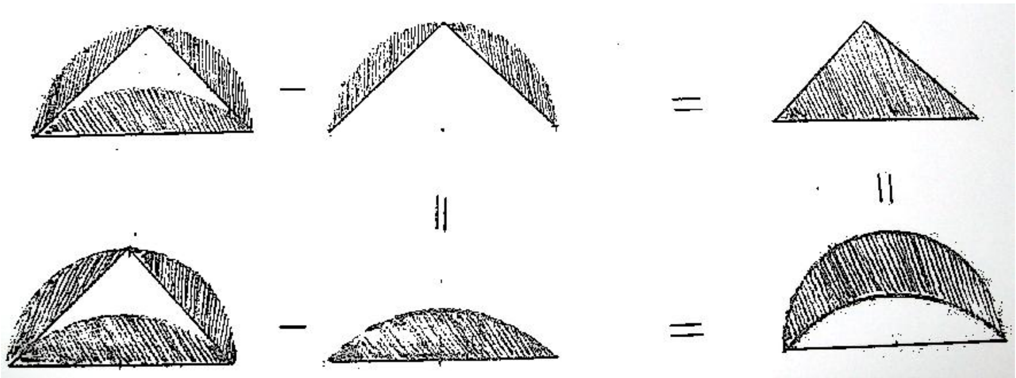
$$A_{BC} = \frac{1}{2} A_{AC}$$

Logo,

$$A_{AC} = A_{AB} + A_{BC}$$

Por outro lado, retirando da figura acima os segmentos circulares AB e BC, resta a área do triângulo ABC e retirando o segmento circular AC resta a área da lúnula.

Quer dizer:



Assim, a área da lúnula é igual a área do triângulo acima, que por sua vez é igual a metade da área do quadrado, isto é, a área da lúnula é igual a

$$\frac{1}{2}.d.\frac{d}{2} = \frac{d^2}{4} = \frac{2l^2}{4} = \frac{l^2}{2}$$

* A soma das áreas das quatro lúnulas construídas sobre os lados de um quadrado é igual a área do quadrado. (Demonstre como exercício)

Daí,

* A soma das áreas das lúnulas construídas sobre os lados do ângulo reto de um triângulo retângulo isósceles é igual a área desse triângulo (Demonstre como exercício).

- Foi o primeiro matemático a ”calcular” uma área delimitada por curvas (→lúnulas) (até então, somente se sabia “calcular” áreas delimitadas por segmentos de retas)

- Responsável por uma parte do conteúdo sobre círculos e polígonos regulares dos Livros III e IV dos Elementos de Euclides.

- Introduziu a noção de problemas equivalentes[(*)]

- Foi um dos primeiros a compilar de um modo lógico e organizado o conjunto dos conhecimentos geométricos sob o nome de “Elementos”. Supõe-se que a geometria demonstrativa e verdadeiramente racional deve ter começado a se constituir a partir daí.

- Esses resultados das lúnulas surgiram de tentativas de efetuar a quadratura do círculo. Hipócrates provavelmente acreditou que pela via que ele abriu isso seria possível. Entretanto, de fato, as lúnulas de Hipócrates foram construídas de tal forma que sua geometria permitia de se fazer sua quadratura.

[(*)]ou de “redução” de um problema a um outro

Exercício:

1) Defina e esboce a espiral(*) de Arquimedes.
2) Apresente a solução para o problema da quadratura do círculo com esta curva.

Construções Geométricas / Construtibilidade

- As construções com régua não graduada e compasso, as construções ditas geométricas tiveram uma enorme importância no desenvolvimento da matemática grega.

- A resolução de um problema por construção através da régua não graduada e do compasso certamente tem suas raízes nas concepções filosóficas do platonismo. Assim, “resolver” significa “construir geometricamente”.

- Entretanto o tratamento dos três problemas clássicos foi objeto de uma pesquisa livre e aberta: construções teóricas com a ajuda de interseção de curvas ou de superfícies, construções com a ajuda de um movimento contínuo ou de muitos movimentos contínuos coordenados entre eles, concepção e fabricação de instrumentos específicos, de dispositivos mecânicos.

(*) élix em grego

- Apoiando-se principalmente nos Elementos de Euclides, muitos pretenderam que a geometria grega não tolerava outros instrumentos além da régua não graduada e do compasso (os únicos instrumentos utilizados por Euclides nos Elementos) (1). O mal-entendido foi devido provavelmente ao motivo de se ter visto nessa obra de Euclides um reflexo fiel da totalidade das pesquisas matemáticas gregas, enquanto que de fato caracterizavam uma síntese clara e incontestável dos primeiros princípios da matemáticos. Síntese essa constituída de problemas que se pode resolver utilizando somente retas e círculos.(2)

- Logo, o problema: **construção mecânica X construção geométrica** equivale ao problema **objetos dos sentidos X objetos da inteligência pura** (régua não graduada e compasso)(3)

---

(1) De fato, nenhum texto antigo diz que a geometria deve ficar restrita às condições dos três primeiros postulados. Assim, se os Elementos só fazem intervir a reta e o círculo, provavelmente porque eram, por um lado as curvas mais simples, e por outro lado as únicas que se conseguiu teorizar de maneira satisfatória(*).

(2) Proclo: "(...) pois Euclides não admitiu todos os elementos que ele podia recolher, mas todos esses que estavam suscetíveis de instruir nos primeiros princípios da geometria." Por isso, o conhecimento dos Elementos é necessário para se ler os matemáticos gregos posteriores.

(3) Uma longa tradição faz remontar este ponto de vista a Platão, para o qual a geometria seria a geometria das figuras ideias. Certamente, para ele, o objeto da geometria não é a figura grosseira que se traça no papel com um instrumento material, mas a figura-em-si, a figura perfeita (objeto da inteligência pura). Entretanto não havia uma rejeição explícita de sua parte em relação ao uso dos instrumentos, em particular da régua não graduada e do compasso. Em todo caso, uma tendência fundamental do pensamento platônico é que a solução de um problema seja demonstrativa e não mecânica. Assim, mecânico não significa tão somente "construído com a ajuda de uma máquina, sem força demonstrativa", ainda que essa seja a origem da expressão. É mecânica toda solução que não pode se efetuar só pela demonstração intelectual. Nesse momento, a solução demonstrativa não é necessária, mas contingente, matemática, mas de caráter empírico. Percebe-se aqui uma influência provável da escola eleática pela consideração da ininteligibilidade do sensível e do movimento dados através do mecânico.

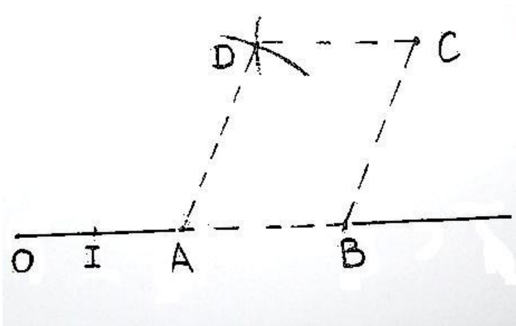
(*) De um modo filosófico, poderia se pensar que a intervenção tão somente do círculo e da reta se deve, via Platão, ao fato de que o círculo é o exemplo máximo de ente geométrico perfeito, enquanto a reta é uma aproximação necessária para que os seres geométricos possam aparecer no mundo sensível.

Def.1: Se $\mathcal{P}$ designa um conjunto de pontos do plano, consideramos o conjunto $\mathcal{R}$ das retas que passam por dois de seus pontos e dos círculos centrados em um de seus pontos e de raios iguais à distância entre dois de seus pontos.

Se chama "pontos construídos a partir de $\mathcal{P}$ com a régua não graduada e com o compasso" o conjunto das interseções dos elementos de $\mathcal{R}$.

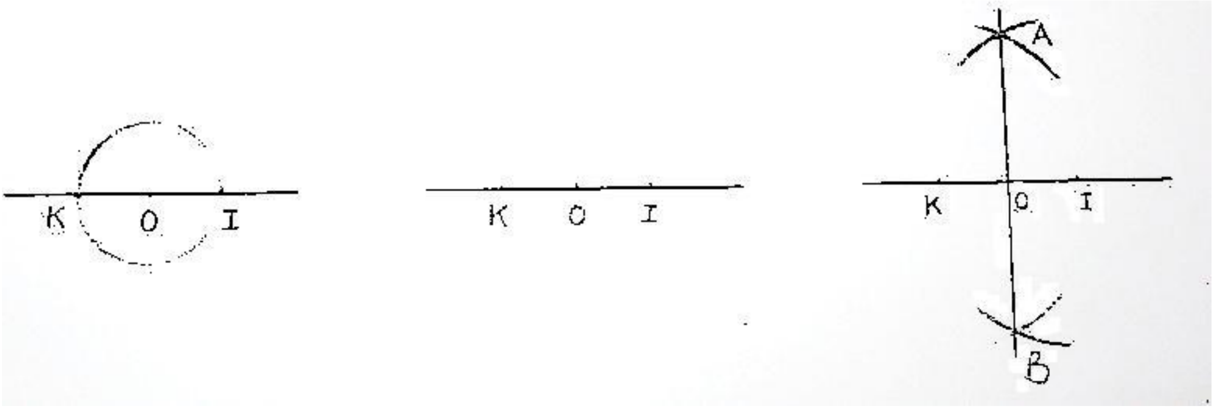
Def.2: Um ponto P do plano é dito "construtível" se existe uma sequência finita $P_1, P_2, \dots, P_n = P$ de pontos do plano tal que para todo $i \leq n$, P_i seja um ponto construído a partir do conjunto $\{ O, I, P_1, P_2, \dots, P_{i-1} \}$ onde os pontos O e I, pontos de base, definem um eixo munido de uma unidade de comprimento que é o segmento OI.

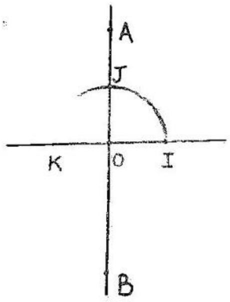
Exemplo:



D é um ponto construído a partir de { O, I, A, B, C } com a régua não graduada e o compasso.

A partir dos pontos O e I, pode-se construir um referencial do plano O, I, J ortonormal:



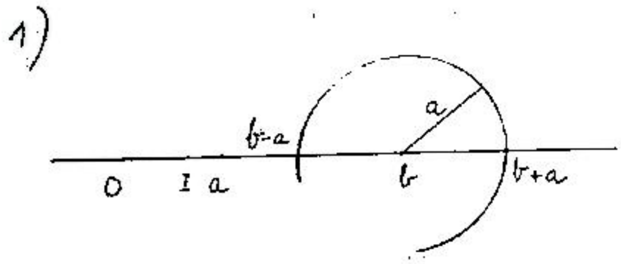


Nota: Com este referencial, considerando m(OI) = m(OJ) = 1, o plano será identificado com $\mathbb{R}^2$.

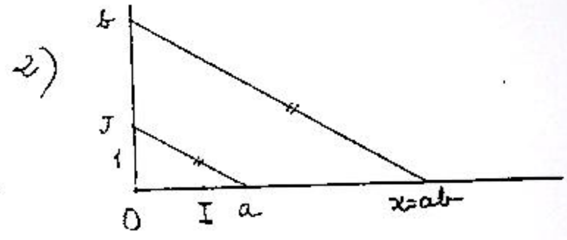
Def.: Um número real é "construtível" se ele é a abcissa ou a ordenada de um ponto construtível em um referencial do plano.

Se a, b, k são três números reais positivos construtíveis, constrói-se:

1)

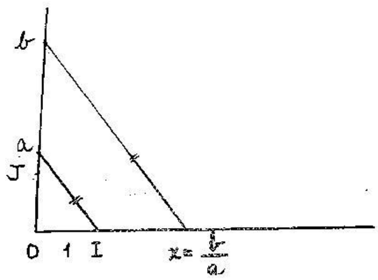


2)



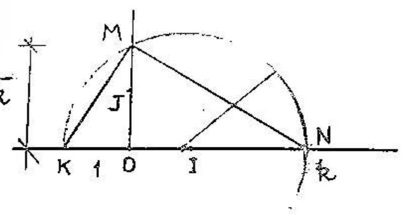
$$\frac{1}{b} = \frac{a}{x}$$ (teorema das linhas proporcionais)

3)



$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x}$$ (teorema das linhas proporcionais)

4)



Como os triângulos retângulos NOM e MOK são semelhantes $\frac{OK}{OM} = \frac{OM}{ON}$, isto é,

$$\frac{1}{OM} = \frac{OM}{k}$$

Fato:

1) Podemos aplicar as quatro operações aritméticas elementares aos números construtíveis. Assim, o conjunto dos números construtíveis admite a <u>estrutura algébrica de corpo</u>.
2) A partir do fato 1 vê-se que os números racionais são construtíveis. Daí, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um conjunto de números construtíveis.
3) A raiz quadrada de um número construtível é um número construtível. Logo, se $k \in \mathbb{Q}_+$, pode-se construir $\sqrt{k}$ e $a + b\sqrt{k}$, onde $a, b \in \mathbb{Q}$. Além disso, se $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}_+$, todos os números da forma $a + b\sqrt{k}$

formam um corpo denominado uma extensão do corpo dos racionais por $\sqrt{k}$. Notação: $\mathbb{Q}[\sqrt{k}]$

4) Esse processo do fato 3 pode ser repetido indefinidamente. Assim, $(a+b\sqrt{k_1})++(c+d\sqrt{k_2})\sqrt{(e+f\sqrt{k_3})}$, onde $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Q}$ e $k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{Q}_+$, é um número construtível. Mais precisamente, representando por R_o o corpo dos racionais, tem-se como R_1 a extensão de R_o por $\sqrt{K_o}$, onde $K_o \in R_o, K_o > 0$, R_2 a extensão de R_1 por $\sqrt{K_1}$, onde $K_1 \in R_1,\ K_1 > 0$, e assim sucessivamente. Considerando a cadeia $R_o \subset R_1 \subset R_2 \subset \cdots$ (*) (de sub-corpos de $\mathbb{R}$) tal que $R_{i+1} = R_i[\sqrt{K_i}]$ onde $K_i \in R_i,\ K_i > 0,\ i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Diz-se que R_{i+1} é uma extensão quadrática do corpo R_i por $\sqrt{K_i}$. A sequência de corpos R_0, R_1, R_2, ... é chamada uma torre de extensões quadráticas.

5) Dos fatos 1, 2 e 3, tem-se que as equações do 1º grau e do 2º grau (com $\Delta \geq 0$) são resolvíveis com a régua não graduada e o compasso.

6) O que se faz quando se constrói um ponto do plano com a régua não-graduada e o compasso? Se é levado a resolver três tipos de problemas: achar a

- **interseção de duas retas**, que corresponde a resolução de um sistema do tipo

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases} \quad \text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

- **interseção de uma reta e de um círculo**, que corresponde a resolução de um sistema do tipo

$$\begin{cases} y = ax + b & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = & \text{(II)} \end{cases} \quad \text{com } a, b, D, E, F \in \mathbb{R}$$

(*) Todos os números em R_0, R_1, R_2, ... são construtíveis

Tal que levando a equação (I) na equação (II), obtêm-se a equação $\alpha x^2 + \beta x + +\gamma = 0$ (com $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$) que tem soluções construtíveis.

- **<u>interseção de dois círculos</u>**, que corresponde a resolução de um sistema do tipo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0 & \text{(II)} \end{cases} \quad \text{com } D, D', E, E', F, F' \in \mathbb{R}$$

Tal que subtraindo membro a membro a equação (I) da equação (II) obtêm-se a equação $(D' - D)x + (E' - E)y + (F' - F) = 0$ que sendo levada na equação (I) ou na equação (II) recai no segundo tipo de problema.

Logo, as coordenadas do ponto de interseção de duas retas envolvem apenas operações racionais, e as coordenadas da interseção de uma reta e de um círculo, ou de dois círculos, envolve além das operações racionais a extração de raízes quadradas.

A partir do que foi visto sobre os três problemas clássicos mais um (a construção de polígonos regulares inscritos no círculo), pode-se colocar as seguintes questões:

- Por que se pode trissectar certos ângulos com a régua não graduada e o compasso e outros não?

- Por que não se pode resolver a duplicação do cubo com a régua não graduada e o compasso?

- Por que não se pode quadrar o círculo com a régua não graduada e o compasso?

- Por que se pode construir certos polígonos regulares inscritos no círculo com a régua não graduada e o compasso e outros não? (Esta questão está respondida nas páginas 210 a 212)

Condições gerais de construtibilidade

* $z \in \mathbb{C}$ é um número algébrico se ele é raiz de um polinômio a coeficientes racionais. Caso contrário ele é dito transcendente.

* O conjunto dos números algébricos é um subconjunto de $\mathbb{C}$ e não de $\mathbb{R}$. Por exemplo, i é algébrico, pois é raiz do polinômio x^2+1.

* Todo número algébrico z é raiz de um único polinômio de coeficientes em $\mathbb{Q}$ irredutível. O grau desse polinômio é dito grau de z.

Exemplo: $\sqrt[3]{2}$ é algébrico de grau 3 sobre $\mathbb{Q}$, pois é raiz do polinômio irredutível $x^3 - 2$.

* Para que um número z seja construtível, é necessário e suficiente que ele seja algébrico sobre $\mathbb{Q}$ e seu grau da forma 2^k, $k \in \mathbb{Z}_+$(Teorema de Wantzel (1837))

* A duplicação do cubo é impossível usando somente a régua não graduada e o compasso. De fato, pois sendo $\sqrt[3]{2}$ de grau 3 sobre $\mathbb{Q}$, não é construtível.

* Para encontrar a trissecção de um ângulo $\theta \neq \frac{\pi}{2^n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, é necessário encontrar em ângulo x tal que $3x = \theta$. Da trigonometria temos: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Daí, X=cos x, isto é, X é um número algébrico sobre $\mathbb{Q}$ de grau 3. Logo, a trissecção do ângulo θ não é possível com régua não graduada e compasso.

Exemplo: A trissecção do ângulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ não é possível com a régua não graduada e o compasso. De fato, pois $X = \cos\frac{\pi}{9}$ $\left(3x = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{9}\right)$ solução da equação irredutível em $\mathbb{Q}$, $4X^3 - 3X - \frac{1}{2} = 0$, é algébrico de grau 3.

- <u>Teorema de Lindemann</u>$^{(*)}$ (1882): π não é raiz de nenhum polinômio a coeficientes racionais.

Corolário: A quadratura do círculo é impossível com a régua não-graduada e o compasso.

Os temas tratados a partir da página 190 mostraram a ligação entre geometria e álgebra através da <u>tradução</u> dos objetos da geometria e das operações entre eles bem como, dos problemas que os envolvem, em equivalente na álgebra$^{(**)}$. Historicamente essa ligação se fundamentará inicialmente com a introdução em geometria do "método das coordenadas" (dito também "aplicação da álgebra à geometria" e posteriormente "geometria analítica") por Fermat e René <u>Descartes</u> (francês – 1596 à 1650)$^{(***)}$

Nota: A "geometria sintética" se baseia unicamente nos axiomas geométricos e se abstém d cálculo algébrico

---

(*)Ferdinand von <u>Lindemann</u> (alemão – 1852 à 1939)

(**)Isto resulta do fato de que os objetos e as relações da geometria plana podem ser <u>interpretados</u> com os objetos e as relações da <u>teoria dos números reais</u>, segundo identificações como abaixo:

Ponto M $\leftrightarrow$ par de números reais (x,y) [M=(x,y)]

Ponto pertencendo à ... $\leftrightarrow$ par verificando...

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

Ponto entre os ponto A e B ↔ par($tx_1 + (1-t)x_2$, $ty_1 + (1-t)y_2$)

com $0 < t < 1$,entre $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$

Comprimento do segmento AB ↔ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (=distância do ponto A ao ponto B)

Ângulo (θ) entre os segmentos AB e AC ↔ $\cos\theta = \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}}$

com $A=(x_1 , y_1)$, $B=(x_2 , y_2)$ e $C=(x_3 , y_3)$

Reta ↔ equação $ax + by + c = 0$ com $a^2 + b^2 \neq 0$

Círculo ↔ equação $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ com $d^2 + e^2 > 4f$

[cônicas, etc.]

No século XIX, quando se aprofundará os fundamentos da matemática, através dos sistemas axiomáticos, se dirá que a geometria euclidiana tem $\mathbb{R}^2$ (o plano cartesiano) como <u>um modelo</u>(1), ou seja, $\mathbb{R}^2$ é <u>um modelo</u> para a geometria euclidiana(2). Isto será o começo de uma série de pontes ligando partes (aparentemente) dessemelhantes da matemática.

(continua na próxima página)

---

(1)Um modelo $\mathcal{M}$ é um universo, uma estrutura, que valida, que satisfaz, uma teoria matemática axiomatizada $\mathcal{T}$ dada.

Notação: $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}$

(2)O que levará nos modernos cursos de geometria elementar a se aprender que um segmento de reta tem um comprimento, que é um número real; um ângulo é medido por um número (real) de graus; e uma área é identificada a um número real, que é sua medida.

Consideração histórica importante: Em Euclides, segmentos de reta, ângulos e áreas podem ser comparados através das relações de menor, igual ou maior, mas não existe uma medida vinculada a eles.

(continuação das notas extras da página anterior)

(***) A invenção das coordenadas cartesianas possibilitou, como já se disse, um procedimento sistemático de tradução de toda relação geométrica entre os pontos do plano (ou do espaço), em uma relação entre as coordenadas desses pontos.

A partir daí, o fato de que as retas, os círculos e as cônicas poderem ser definidas por equações do tipo $P(x,y)=0$, onde P é um polinômio a coeficientes reais do 1º e do 2º grau, conduziu naturalmente os matemáticos desde Descartes (e Fermat) a estudarem e definirem curvas tendo uma tal equação, mas agora sem restrição de grau, e estabelecerem com isso a noção de curva algébrica (noção que se generalizará as superfícies (→ superfície algébrica)). Foi o começo de um novo domínio da matemática chamado “Geometria Algébrica”.[1]

---

[1] A Geometria Algébrica é um domínio da matemática que aparece basicamente no final do século XIX onde se estuda as equações ou os sistemas de equações polinomiais de várias variáveis cujas soluções (raízes) determinam conjuntos de pontos não-isolados denominados variedades algébricas. Assim, ela se caracteriza pelo estudo das propriedades (geométricas) das curvas e das superfícies algébricas.

(fim das notas extras)

- **Platão** (428 à 348 a.C.)

- É um filósofo e não um matemático.

- A Academia de Platão (fundada em ~386 aC perto dos jardins dedicados a um herói lendário ateniense de nome Academos) é uma escola filosófica que reuniu grandes matemáticos (como Eudoxo de Cnido, Teeteto de Atenas e Teodoro de Cirene).

- A Academia de Platão foi o centro de uma investigação matemática intensa.

- Embora não fosse matemático, Platão recebeu uma boa formação matemática e teve um papel fundamental para a matemática grega ao insistir sobre a demonstração como uma característica essencial da atividade matemática (demonstração cujas regras foram sistematizadas de forma definitiva por Aristóteles).

- Para ele, os números e as figuras (os entes matemáticos da aritmética e da geometria) não são sensíveis. São realidades que existem independentemente de nosso conhecimento, em um "mundo de ideias", do qual o "mundo físico" (sensível) é um reflexo imperfeito (→ alegoria da Caverna).

Este tema filosófico é ainda de atualidade, quando se coloca a questão: A matemática é descoberta ou inventada?

* se respondemos descoberta, nos situamos na filosofia platônica que considera os entes matemáticos pré-existentes e suas descobertas pelos matemáticos que fazem papel de exploradores de um mundo desconhecido (isso que caracteriza o realismo platônico ou o idealismo platônico)

* se respondemos inventada, nos situamos em uma outra filosofia que faz da matemática puro produto da nossa atividade intelectual.

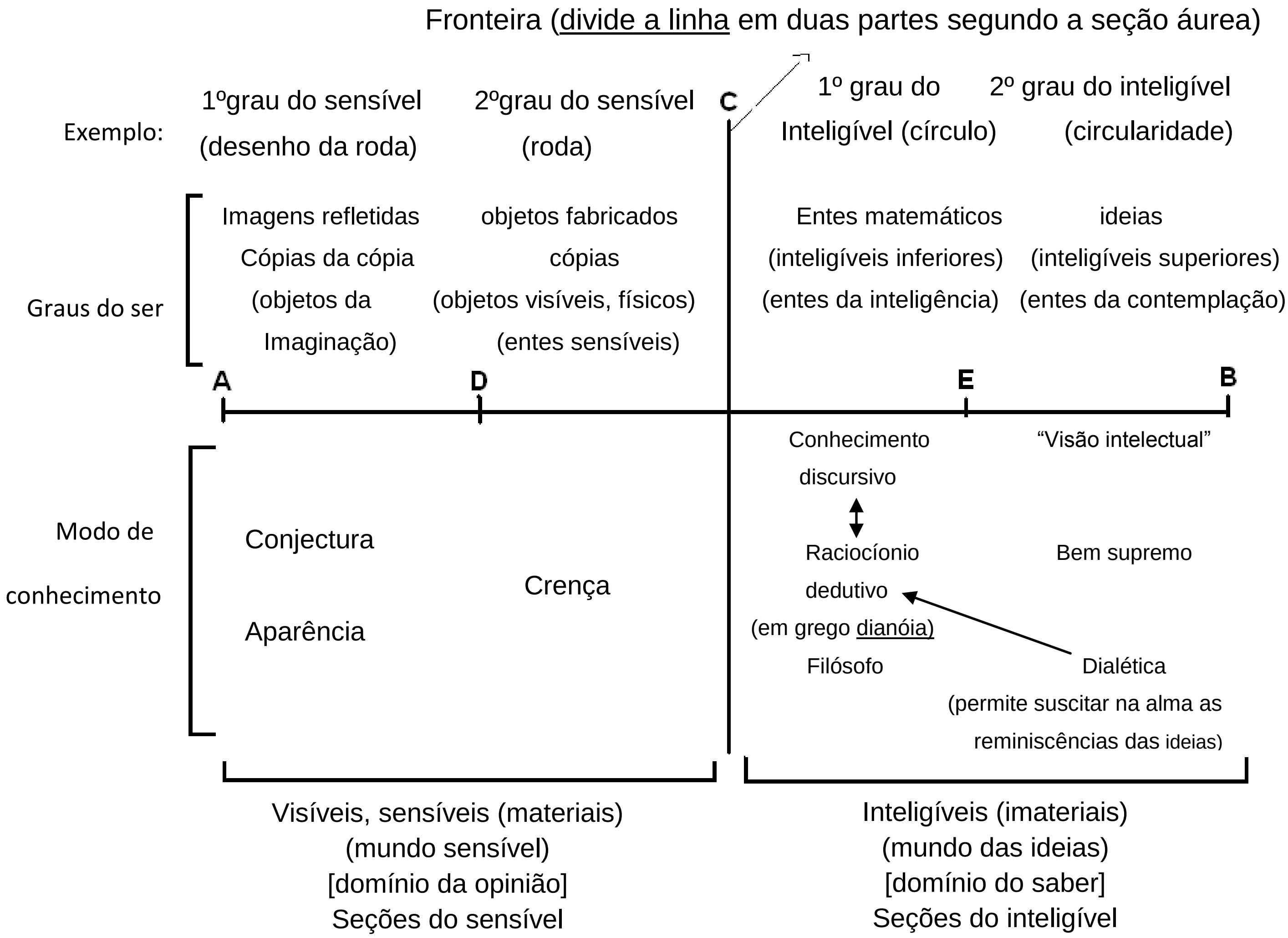
- Em Platão, o papel primordial da matemática é a educação da mente. Assim, o verdadeiro valor da geometria consiste em conduzir a alma para a verdade e infundir-lhe uma abertura para a filosofia.

- "Ninguém entre aqui se não é geômetra" (inscrição gravada na entrada da Academia mencionada pelo filósofo João Filopão. Século VI dC).

- "A geometria tem por objeto o conhecimento disso que existe sempre e não disso que nasce e perece. Ela leva a alma para a verdade, e desenvolve nela (a alma) esse espírito filosófico que eleva para as coisas de cima o olhar que nós abaixamos erradamente para as coisas daqui de baixo. Para compreender as outras ciências, nós sabemos que há uma diferença entre este que sabe geometria e aquele que não sabe".

- **Esquema dos graus do ser e dos modos de conhecimento**

(a "Linha Dividida") (apresentado no diálogo platônico "República" – Livro VI)



Obs.:

1) Os entes matemáticos <u>intermediam</u> os entes sensíveis e as ideias, isto é, são <u>intermediários</u> (em grego <u>metaxí</u>) entre os entes sensíveis e as ideias.
2) Cada parte é dividida na mesma relação da linha.

Este esquema permite de se estabelecer as relações e as igualdades seguintes:

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EB}} \quad \text{(proporção descontínua),}$$

Isto é,

$$\frac{\text{o sensível}}{\text{o inteligível}} = \frac{\text{as imagens refletidas}}{\text{os objetos fabricados}} = \frac{\text{os entes matemáticos}}{\text{as ideias}}$$

- Em Platão, há uma certa primazia da geometria sobre a aritmética. Quando o escravo, no diálogo Menão, tenta duplicar o quadrado dobrando o lado do quadrado dado (com a aritmo-geometria dos pitagóricos) e erra, Sócrates indica a solução através da diagonal desse quadrado mostrando que nesse momento não fala de quantidade, mas de qualidade. Com Sócrates não houve medidas. Assim, a geometria mostra grandezas que a aritmética não "compreende" (o lógos não "compreende" a incomensurabilidade). A demonstração de Sócrates pela geometria torna possível o que com a aritmética é impossível.

- Em Platão:

<u>Aritmética</u> :

* se estende a todas as coisas;

* nos obriga a raciocinar sobre os números-em-si sem a intervenção dos corpos visíveis e tangíveis;

* nos impulsiona a sair do âmbito da geração para o da essência através do discernimento;

Geometria:

* é o conhecimento daquilo que sempre é.

(Uma versão da) **Alegoria da Caverna** (A República – Livro VII – diálogo de Platão)

- O homem vive na Caverna, ele é filodoxo. A fronteira que o levará a ser filósofo só é atravessada por meio da geometria.

- Pelo raciocínio dedutivo, o homem tem a profundidade suficiente para escapar das aparências.

Mundo inteligível $\left\{\begin{array}{l} 1 - \text{ bem supremo } (\leftrightarrow \text{luz do sol}) \\ 2 - \text{filósofo} \end{array}\right\} \; 3 - \text{conhecimento}$

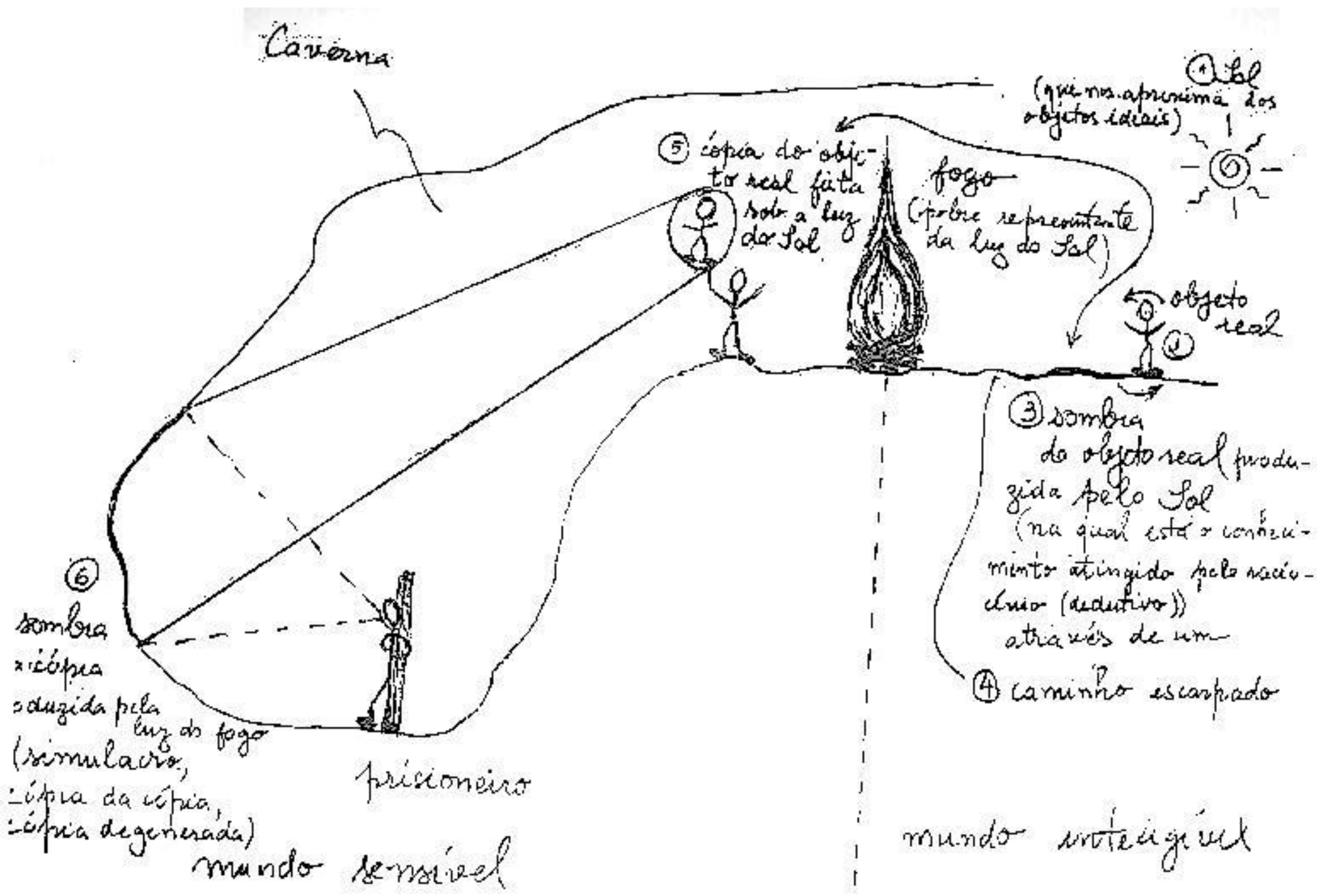
caracteriza um esforço

$4 - \text{dialética}^{(*)}$ Contradição

(discussão) Analogia

Mundo sensível $\left\{\begin{array}{l} 5 - \text{crença} \\ 6 - \text{aparência} \end{array}\right.$

A busca de uma síntese para as contradições da realidade.



(*) Estrutura elementar do argumento dialético platônico: o filósofo coloca um tema, se "destaca" (se "afasta") e revêm.

Fator externo → hipótese[1] ← (Platão)(filósofo)

Interlocutor → definição

Filósofo → tema → definição ↔ hipótese → conclusão

---

(1) (do grego <u>hipótesis</u>, onde <u>hipo</u> quer dizer <u>sob</u> e <u>tésis</u> quer dizer <u>opinião, afirmação</u> (do verbo <u>tenai</u>-<u>colocar</u> (<u>ação de colocar</u>)) Proposição <u>na base</u> (←sob) de um raciocínio a partir da qual se demonstra um teorema.

Nota:

1) Como já foi dito, Platão reconhece o interesse das ciências matemáticas e acorda-as um lugar importante em seu sistema filosófico. De fato, na sua maneira de utilizar a matemática para descrever e explicar as realidades sensíveis, ele esboçou "modelos matemáticos"(*) na forma de identificação geométrica ou de proporção de dois registros, por exemplo um matemático e outro físico.

2) Sobre a modelagem e a simulação matemáticas

A modelagem matemática supõe dois registros. Um, por definição, é matemático, o outro é fenomenal (proveniente do fenômeno) ou ao menos "sensível". É este segundo registro, mais imediatamente conhecido graças às sensações, que é necessário descrever de outro modo (quer dizer matematicamente) e explicar, totalmente ou parcialmente através da matematização.

(*) Deve-se ressaltar que essa "prática" aparece ao longo de todo o pensamento filosófico-matemático grego, desde as analogias de ordem metafórico-matemáticas da época dos Pré-socráticos aos modelos geométricos no domínio da astronomia como, por exemplo, o de Eudoxo de Cnido.

Quadro explicativo básico

Fase 1 da modelagem

- Tradução matemática (números, figuras, ...);
- Determinação dos parâmetros pertinentes; ← os "fenômenos" ou os "observáveis"
- Simplificações e ajustes;
- Uma regra matemática (proporção, equação, ...) descrevendo o comportamento do sistema modelisado.

↓

Fase 2 da modelagem

- Trabalho matemático;
- Análise do modelo que permitirá:

  a) explicar outras características do modelisado (colocando em evidência a coerência interna do modelo);

  b) perceber casos ainda não observáveis.

↓

Fase 3 da modelagem

- Predições (previsões) e simulações.

↓

Fase 4 da modelagem

- Verificação (observação e/ou experimentação);
- O modelo pode ser "confirmado" ou "refutado";
- Quase sempre ele exige aperfeiçoamentos:

  * pela necessidade de um novo parâmetro do modelisado a ser tomado em conta;

  * pela exigência de uma melhor análise matemática do modelo;

  * pela precisão maior dos cálculos.

Prático x teórico na Matemática grega

Enunciados algoritmicos	Enunciados demonstrativos
Ligados às atividades práticas e comerciais	* Ligados à filosofia * "Desinteressados" (uma caracte-rística de distinção social?)
Herdados das tradições babi-lônias e egípcias	Originários da Grécia antiga (nascidos com Tales e Pitágoras)
Institucionalizados: tradições corporativas	* Pouco ou não institucionalizados * Comunicação passando pela es-crita através de textos autônomos
* Figuras geométricas utilizando letras * Uma Linguagem estandardizada e impessoal * Palavras e procedimentos comuns	

Os Elementos de Euclides (de Alexandria) (~325 à ~265 a.C.) (Escola de Alexandria)

- Composto em ~290 a.C. [Dúvidas quanto a unicidade do autor (Euclides, nome próprio?(*)), diversas tradições];
- Com os Elementos uma nova forma de racionalidade emerge;
- Elementos: - uma vasta síntese estruturada de uma parte da matemática grega;

  - um programa de trabalho;

  - unidade dessa síntese vem do modo de apresentação: axiomática;

    * toda proposição deve ser justificada com a ajuda de axiomas, de definições e de proposições precedentemente provadas → unificação estruturada de todas as proposições;

(*)Hipótese emitida pela primeira vez nos anos 1950.

* Aristóteles de Estagira (384 à 322 aC): "Nós damos o nome de "elementos"(*) a essas proposições cujas provas são implícitas nas provas de todas as outras, ou de quase todas";

- foram inspirados da <u>doutrina aristotélica da ciência</u>:

* <u>ciência</u> (em grego <u>epistéme</u>): sistema coerente edificado com uma sequência ordenada de deduções rigorosas dependente de algumas proposições iniciais indemonstráveis ↔ sistema dedutivo unificado ↔ sistema (dito) axiomatizado;

* a ciência deve ser demonstrativa, pois conhecer é não somente conhecer o fato, mas também o por quê, e a resposta a esse "por quê" se reduz a colocação em evidência de um elo dedutivo que faz com que uma verdade dependa necessariamente de outras verdades anteriores, já conhecidas

* isso é exatamente o que fez Euclides nos Elementos: cada um de seus volumes (<u>livros</u>) se abre com o enunciado de um corpo mínimo de definições <u>necessárias e suficientes</u> para demonstrar a verdade de todas as proposições.

(*) <u>O significado da palavra "elemento"</u>
- Em grego <u>estoiqueion;</u>
- Escrita alfabética grega: 24 letras bastam para constituir o conjunto das sílabas, das palavras e dos discursos;
- Essas letras são identificadas como "elementos" (em grego <u>estoiqueia</u>);
- Filósofos gregos projetaram sobre as coisas e as produções humanas esse modo de composição de um todo a partir de <u>constituintes elementares</u>;
- Aristóteles: em geometria certas proposições se encontram na demonstração de muitas outras. <u>São denominadas elementos e devem ser aprendidas</u>;
- A constituição de uma coleção de elementos requer o acúmulo de resultados significativos que sejam suficientemente numerosos e a indicação das propriedades ou das construções que intervêm na maioria dos casos de um contexto considerado. Assim, a escolha dessa coleção <u>pressupõe uma análise prévia que determine os constituintes essenciais</u> de um corpo dedutivo conciso e claro.[1];
- O gênero "Elementos" expõe uma parte da ciência matemática já feita.

---

[1]o que caracteriza uma <u>ordem</u>, uma <u>estrutura</u>

- Se uma grande parte dos resultados provém de outros matemáticos(*), Euclides é o responsável pela forma axiomática dada aos tratados desses matemáticos.

Obs.:

Em Euclides, a lógica é onipresente, ela está em ação constantemente. Eis três regras lógicas que estão implícitas em Euclides:

1) Se todo ser de tipo T tem a propriedade P, é suficiente de mostrar que isso que se estuda é do tipo T para se deduzir que ele tem a propriedade P.
2) $[(P\rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$
3) Raciocínio por absurdo (particularmente útil para evitar o recurso ao infinito) (dispensa de se "inventar")

- Por quê falar dos Elementos? Por ao menos dois motivos:

  - se não é a única obra fundamental da Antiguidade, é o livro de matemática até o século XVIII (e mesmo na Inglaterra até o final do século XIX)(**) Matemáticos não podiam não conhecer Euclides.
  - gregos colocam questões fundamentais, muito próximas do século XIX e XX. Imbricação entre filosofia e matemática. Os Elementos permitem compreender como a matemática traz dificuldades que os matemáticos consideram como não justamente de ordem matemática.

Exemplo: o caso dos incomensuráveis.

(*)Euclides, de fato, coloco nos Elementos os resultados fundamentais da matemática necessários ao desenvolvimento de resultados de matemática mais avançados.

(**)é fato que as qualidade dos Elementos foram reconhecidas desde a Antiguidade. Por exemplo, nenhum outro autor grego posterior tentou substituir a obra de Euclides. Os méritos que os antigos reconheciam nos Elementos, eram a seleção, a ordem de disposição e a demonstração rigorosa das proposições.

- O que não está nos Elementos?

  - os três problemas clássicos(*):

  * duplicação do cubo (Hipócrates de Quios);

  * trissecção do ângulo (Hípias de Elis);
  * quadratura do círculo (Artemão de Clazomenas (~500 à 428 aC));

  - a matemática "prática": astronomia, música, ótica, mecânica, arquitetura, etc.

(*) **Papo de Alexandria** (fim do século III e a primeira metade do século IV d.C.) distingue três tipos de problemas (na matemática antiga):

- problema "plano": solúvel com a ajuda da régua (não-graduada) e do compasso, ou seja, que é construtível por linhas retas e círculos.[1]

- problema "sólido": solúvel com a ajuda das cônicas (não-degeneradas)[2], ou seja, problema não-plano solúvel por meio das seções cônicas[3] (em grego tomaí conicaí)

- problema "linear": solúvel com a ajuda de curvas que não são nem círculos, nem retas e nem cônicas (espirais, conchóides, cissóides, quadratrizes, ... (→ curvas transcendentes))

Ponto interessante: uma distinção entre os gêneros de problemas.

Exemplos:

1) Problema sólido: problema da duplicação do cubo resolvido com a ajuda da interseção de duas parábolas.
2) Problema linear: problema da quadratura do círculo, pois π é transcendente

Os problemas em Euclides são problemas planos

Ponto importante nos gregos: não resolver um problema plano por meios mais poderosos.

---

[1] A linha reta e o círculo eram chamados "lugares (geométricas) planos" porque eles resolviam os problemas relativos aos lugares geométricos no plano

[2] As cônicas (não-degeneradas) não são construtíveis, mas os pontos pertencentes a elas o são.

[3] As seções cônicas eram chamadas de "lugares (geométricos) sólidos" porque elas foram construídas em um sólido (o cone de revolução/ a superfície cônica de revolução)

Conteúdo dos "Elementos"

Dividido em 13 livros - 467 proposições ao todo

(Parte I – geometria plana)

Livro I	- Começa com uma lista de 23 definições seguidas de 5 postulados (demandas) e 5 à 9 axiomas (noções comuns). - Construções e propriedades fundamentais das figuras retilíneas, notadamente as do triângulo (das quais o teorema de Pitágoras – Proposição 47) e do paralelogramo - Equivalência das áreas - 48 proposições	Origem: Pitagóricos
Livro II	- Fundamentação da "álgebra geométrica(*)": apresentação das operações onde todas as grandezas são representadas geometricamente por segmentos de reta, o produto de duas grandezas iguais pelo quadrado, o produto de duas grandezas quaisquer por um retângulo.	Pitagóricos

(*)Expressão cunhada por Paul Tannery para descrever um ramo da matemática grega desenvolvido no Livro II dos Elementos sobre o que são interpretados hoje como métodos para a resolução de problemas do segundo grau. A resolução de uma equação do segundo grau, no caso geral, se faz com a ajuda de três identidades notáveis do Livro II.

Exemplo: Seja a equação $bx - x^2 = c$ com $b^2 > 4c > 0$ ($\leftrightarrow \frac{b^2}{4} > c > 0$). O método de resolução para encontrar uma raiz positiva se inspira diretamente no cálculo análogo a esses que permitem estabelecer as identidades acima. Com efeito, se ao segmento AD dado, com m(AD)=b, se aplica um retângulo ACFI de área igual a uma área c dada tal que a área que falta CDJF seja igual a de um quadrado x^2, a área do gnomon BDHGFE, onde B está no meio de AD, será igual a área do retângulo ACFI. A área gnômica, sendo igual a diferença das áreas dos quadrados de lados BD com m(BD)=$\frac{b}{2}$ e EF com m(EF)=$\frac{b}{2} - x$, vale:

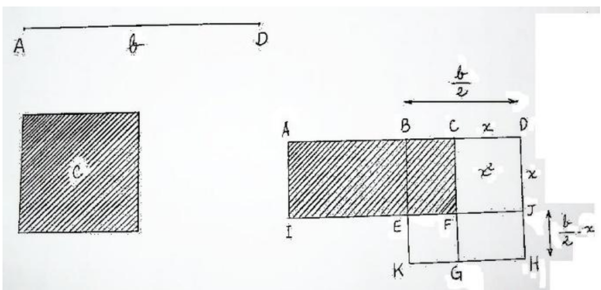
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 \left[= \left(\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2} - x\right)\right)\left(\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2} - x\right)\right)\right] = bx - x^2 \ ^{(1)}$$

(Continua no rodapé da próxima página)

Livro II	- Se encontram formuladas, através de proposições demonstradas geometricamente, as identidades: 1- $a(b+c+d) = ab+ac+ad$ 2- $(a+b)a+(a+b)b = (a+b)^2$ 3- $(a+b)a = ab+a^2$ 4- $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ 5- $(a+b)(a-b)+b^2 = a^2$ ou $ab+\left(\frac{1}{2}(a+b)-b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2$ 6- $(2a+b)b+a^2 = (a+b)^2$ ou $(a+b)(b-a)+a^2 = b^2$ 7- $a^2+b^2 = 2ab+(a-b)^2$ ou $(a+b)^2+a^2 = 2(a+b)a+b^2$ 8- $4ab+(a-b)^2 = (a+b)^2$ ou $4(a+b)a+b^2 = ((a+b)+a)^2$ 9- $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ ou $a^2+b^2 = 2\left(\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 + \right.$ $\left. + \left(\frac{1}{2}(a+b)-b\right)^2\right)$ 10- $(a+b)^2+(b-a)^2 = 2(a^2+b^2)$ ou $(2a+b)^2+b^2 = 2(a^2+$ $+(a+b)^2)$ $[\text{ou } (2a+b)^2-2(a+b)^2 = 2a^2-b^2]$ - Equivalências de áreas - 2 definições e 14 proposições	Pitagóricos

(continuação das notas extras da página anterior)

Por outro lado, a área do retângulo ACFI é <u>por construção</u> igual a c, mas vale também $\frac{b}{2}x + + \left(\frac{b}{2} - x\right)x = bx - x^2$. Logo, a área gnômica $bx - x^2$ é igual a c, e assim a construção do gnomon permite encontram o valor de x.



Em Euclides, o problema para resolver não é a resolução da equação (no sentido algébrico), mas a procura de um comprimento (x)

Livro III	- Geometria do círculo - 11 definições e 37 proposições	Hipócrates
Livro IV	- Propriedades e construção de certos polígonos regulares inscritos ou cirscunscritos em um círculo (3,4,5,6,15-ágonos, mas não o 7-ágono)(*) - 7 definições e 16 proposições	Pitagóricos

(*)Um problema relacionado ao círculo, que ocupou bastante a atenção dos matemáticos desde a antiguidade até o século XIX, é o de dividi-lo em arcos exatamente iguais. Ligando os pontos sucessivos da divisão por cordas, obtemos um polígono regular.

Os gregos eram capazes de construir (ou seja, construir usando somente régua não-graduada e compasso) polígonos regulares de 2^m lados, com $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq 2$. Sabia, também, construir os de 3 e 5 lados. Como o arco de círculo pode ser bissectado usando apenas régua não graduada e compasso, os polígonos regulares de 2^px3 e 2^px5, onde $p \in \mathbb{Z}_+$, eram conhecidos.

Podemos então resumir os polígonos regulares construtíveis conhecidos pelos gregos através da seguinte forma 2^qx3^{r1}x5^{r2}, onde $q \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\ e\ r_i = 0\ ou\ 1, i = 1,2\ (\ com\ q \geq 2\ quando\ r_i = 0, i = 1,2)$

O problema de dividir o círculo em partes iguais foi estudado por matemáticos como Pierre de Fermat (Francês – 1601 à 1665) e Euler. Mesmo assim nenhum progresso significativo foi feito até o final do século XVIII quando Carl Friedrich Gauss (alemão – 1777 à 1855) resolve completamente o problema em 1796 através do seguinte teorema complementado por Wantzel (→ teorema de Gauss-Wantzel):

Um n-ágono regular, $n \geq 3$, é construtível se, e somente se, n é da forma 2^m, onde $m \in \mathbb{Z}_+, m \geq 2,$ ou da forma $2^q f_0 f_1 f_2 ... f_l$, onde $q \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e os f_j, j$\in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ são números de Fermat primos distintos, isto é, números da forma $2^{2^j} + 1$ primos e distintos.

[Exemplos de números de Fermat primos:

Para j=0, tem-se f_0=$2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$.

Para j=1, tem-se f_1=$2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$

Para j=2, tem-se f_2=$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$

Para j=3, tem-se f_3=$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$

Para j=4, tem-se f_4=$2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$

Entretanto, para j=5, tem-se f_5=2^{32}+1 = 4.294.967.297 = 641 x 6.700.417 não é primo]

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

É uma análise sobre os chamados polinômios ciclotômicos (do grego kíklos – círculo e tomia – corte) que permitiu a demonstração deste teorema.

Algumas definições e propriedades importantes:

- Um elemento $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma n-ésima raiz da unidade se, e somente se, $\alpha^n = 1$.
- $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma n-ésima raiz da unidade se, e somente se, α é uma raiz do polinômio z^n-1
- U_n={ $z \in \mathbb{C}$ / z^n=1} = conjunto das n-ésias raízes da unidade. Como $1 \in U_n$, $U_n \neq \emptyset$
- Card(U_n)=n
- Se $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, 0 \leq k \leq n-1, e^{\frac{i(2k\pi)}{n}}$ é uma n-ésima raiz da unidade, isto é, U_n={$e^{\frac{i(2k\pi)}{n}}$/ k∈ $\{0,1,\ldots,n-1\}$
- Z_n-1=$\prod_{k=0}^{n-1}(z-\alpha_k)$

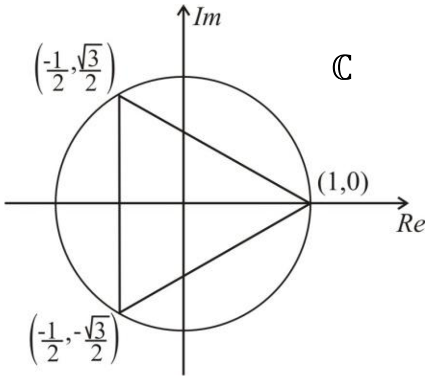
Exemplo: As raízes cúbicas da unidade são:

$$\alpha_0 = e^{\frac{i(2\times 0\times \pi)}{3}} = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$$

$$\alpha_1 = e^{\frac{i(2\times 1\times \pi)}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_2 = e^{\frac{i(2\times 2\times \pi)}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Visualização no círculo trigonométrico no plano complexo:



- Seja $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. Diz-se que uma n-ésima raiz da unidade $e^{\frac{i(2k\pi)}{n}}$ é uma n-ésima raiz primitiva da unidade se, e somente se, mdc(k,n)=1.
- Define-se o n-ésimo polinônio ciclotômico como sendo o polinômio $\Phi_n(z) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)}(z-\alpha_k)$, onde
  - α_k descreve as n-ésimas raízes primitivas da unidade
  - φ é chamada função indicadora de Euler tal que $\varphi(n) =$ número de inteiros positivos compreendidos entre 1 e n-1 que são relativamente primos com n.
  Se n é primo, $\varphi(n) = n - 1$.
- Entendimento da função indicadora de Euler

Exemplos:

- para n=1, $\varphi(1) = 1$. Daí, existe uma raiz primitiva da unidade que é o número 1 (z^1=1).

- para n=2, existem duas raízes quadradas da unidade que são

$$\alpha_0 = e^{\frac{i(2\times 0\times \pi)}{2}} = e^0 = 1$$

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

$\alpha_1 = e^{\frac{i(2\times 1\times \pi)}{2}} = e^{i\pi} = -1 \quad (z^2 = 1)$

Mas, como $\varphi(2) = 1$, então existe uma só raiz primitiva da unidade que é $\alpha_1 = -1$. Observa-se que $(\alpha_1)^2 = (-1)^2 = 1 = \alpha_o$ (quer dizer α_1 gera α_0)

- para n=3, tem-se três raízes cúbicas da unidade que são

$\alpha_0 = e^{\frac{i(2\times 0\times \pi)}{3}} = 1$

$\alpha_1 = e^{\frac{i(2\times 1\times \pi)}{3}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

$\alpha_2 = e^{\frac{i(2\times 2\times \pi)}{3}} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$ $(z^3=1)$.

Mas, como $\varphi(3) = 2$, Logo α_1 e α_2 são as raízes cúbicas primitivas da unidade, $(\alpha_1)^3 = (\alpha_2)^3 = 1 = \alpha_o$.

- Os sete primeiros polinômios ciclotômicos são:

  $\Phi_1(z) = z - 1$

  $\Phi_2(z) = z + 1$

  $\Phi_3(z) = z^2 + z + 1$

  $\Phi_4(z) = z^2 + 1$

  $\Phi_5(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$

  $\Phi_6(z) = z^2 - z + 1$

  $\Phi_7(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$

Como se viu, encontrar as coordenadas dos vértices de um n-ágono regular, $n \geq 3$, inscrito em um círculo trigonométrico no plano complexo, consiste em encontrar as n-ésimas raízes da unidade, $n \geq 3$. Entretanto, a construtibilidade ou não desse n-ágono vai se caracterizar através da avaliação do polinômio ciclotômico correspondente ao polinômio z^n-1, verificando-se se ele satisfaz ou não as condições dos teoremas de Gauss-Wantzel e de Wantzel(1837).

Exemplo: O heptágono regular (é o primeiro polígono regular que) não é construtível.

Primeira demonstração: 7 é um número primo que não é um número de Fermat. Daí, pelo teorema de Gauss-Wantzel, o heptágono regular não é construtível.

Segunda demonstração: Encontrar as coordenadas dos vértices do heptágono regular consiste em encontrar as raízes sétimas da unidade, isto é, resolver a equação $z^7 = 1$. A primeira raiz evidente é z=1. Fatorando, tem-se $z^7-1=(z-1).f(z)$. Daí, $f(z)=z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$ $(= \Phi_7(z))$. Para se achar as demais raízes da unidade, deve-se então resolver a equação $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ (irredutível em $\mathbb{Q}$). Entretanto, pelo teorema de Wantzel, o grau deste polinômio não é da forma $2^m, m \in \mathbb{Z}_+$. Logo, os pontos no círculo trigonométrico, que correspondem aos outros vértices do heptágono, não são construtíveis.

Adendo: Sobre a demonstração de um teorema de impossibilidade

- Uma demonstração de um teorema de impossibilidade exige uma descrição da totalidade das possibilidades.

- Ponto importante: o fato de que não se tenha encontrado uma possibilidade não significa que ela não exista.

- Para mostrar que não existe, é necessário explorar todas as situações.

- Sobre a demonstração dos teoremas de Wantzel e de Gauss-Wantzel(*)

  – Estabelece uma cartografia de todos os pontos construtíveis e, em seguida, quando um ponto não está neste espaço. Sem esta preliminar não se tem a demonstração de impossibilidade, pois pode-se interpretar essa ausência como sinal de que não se procurou suficientemente.

  – Não se encontra novas construções. Também não se diz onde uma construção apresenta um erro. O raciocínio é completamente geral, e visa mostrar que as construções são impossíveis, ou que existem construções. De outro modo, o objeto considerado não é mais diretamente as construções geométricas singulares; o que se considera, são diretamente as construções. Trata-se as construções como se fossem o objeto da teoria. O que caracteriza a prioridade das operações de construção, é a maneira como se define a noção de construtível: parte-se da noção de ponto construtível e se enriquece progressivamente o conjunto das construções.

  – Perspectiva diferente no pensamento matemático grego: toda figura definida deve ser construída. Assim, falar de existência de uma construção exige que se efetue, que se exiba a dita construção. Entretanto, os elementos fundamentais não são considerados eles mesmos como construção.

(*) O teorema de Gauss-Wantzel é deduzido do teorema de Wantzel

– Na demonstração de impossibilidade não se dá um procedimento permitindo a exibição. A existência de uma construção não equivale a se dar a construção.

– Uma característica: existe um erro na prova da quadratura do círculo com a régua e o compasso, sem se dizer o qual.

– Demonstração da impossibilidade: não trata diretamente os objetos da Geometria Euclidiana, mas seus instrumentos → uma teoria das construções $\left(\begin{array}{l} \longrightarrow \text{álgebra} \longleftarrow \text{operação} \\ \searrow \quad \updownarrow \\ \quad\ \text{aritmética} \end{array} \right\}\Bigg)$

– Wantzel / Gauss-Wanzel: através da noção de Estrutura Algébrica → • descrição de todas as construções possíveis;
• uma forma de resposta matemática ao problema nos gregos:

uma construção não é necessariamente a apreensão mais completa das propriedades do triângulo-em-si.

Dotar-se de uma estrutura algébrica permite evitar esta situação: uma construção é uma operação algébrica. Além disso, a estrutura algébrica não é dada no mundo inteligível.

(Parte II – teoria das grandezas)

Livro V	- teoria da medida: teoria das relações de grandezas homogêneas → teoria das proporções entre grandezas incomensuráveis - 18 definições e 25 proposições	Eudoxo
Livro VI	(Aplicação do Livro V à geometria plana) - Propriedades das figuras retilíneas semelhantes - Teorema (dito) de Tales (Proposição 2) - Construções de comprimentos utilizando o método pitagórico de aplicação de áreas - 5 definições e 33 proposições	Pitagóricos

(Parte III – aritmética – teoria dos números inteiros positivos)

Livro VII	- Trata da aritmética propriamente dita - Definição de unidade e de número - Estudo de múltiplo e de divisor - Números pares e ímpares - Definição de número perfeito - O "algoritmo de Euclides", cálculo do MDC - Propriedades da proporcionalidade - Propriedades dos números primos - Propriedades dos números primos entre si - Cálculo do MMC - 22 definições e 39 proposições	Pitagóricos Arquitas

Livro VIII	- Continua o estudo da proporcionalidade iniciado no Livro VII - Estudo das sequências geométricas (de inteiros positivos) (teoria das proporções contínuas) [Seja a proporção contínua $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \cdots = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = q, q \in \mathbb{Z}_+$, $q > 1$. Daí, $a_n = a_{n-1}q$. Logo, $a_n = a_1q^{n-1}$ $a_{n-1} = a_{n-2}q$ $a_{n-1} = a_1q^{n-2}$ ... ... $a_3 = a_2q$ $a_3 = a_1q^2$ $a_2 = a_1q$ $a_2 = a_1q$ ou seja, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ é uma sequência geométrica com $a_i \in \mathbb{Z}_+, 1 \le i \le n$.] - 27 proposições	
Livro IX	- Continua o estudo da aritmética começado nos Livros VII e VIII com proposições importantes - Forma dos números perfeitos pares - Infinidade dos números primos - Soma dos termos de uma sequência geométrica [Proposição 35: Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ é uma sequência geométrica, então: $\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_n - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}$ (ou com $a_2 = a_1q, \sum_{i=1}^{n-1} a_i = \frac{a_n - a_1}{q-1}$, $q > 1$)] **- Enunciado de uma forma fraca do <u>teorema de decomposição de um inteiro em fatores primos</u> (→ <u>teorema fundamental da aritmética</u>)** [Proposição 14: O menor número de todos esses que podem ser medidos por certos números primos, não será medido por nenhum outro número primo, que por esses que o medirão no começo] - 36 proposições	Pitagóricos Arquitas

(Parte IV – teoria das quantidades incomensuráveis) (aritmética e geometria)

Livro X	- Classificação das quantidades incomensuráveis, notadamente em quadráticas e biquadráticas, a partir de construções geométricas fundadas nas consequências do teorema de Pitágoras que permitem de obtê-las, em 13 categorias - 16 definições e 115 proposições	Teeteto

(Parte V – geometria espacial)

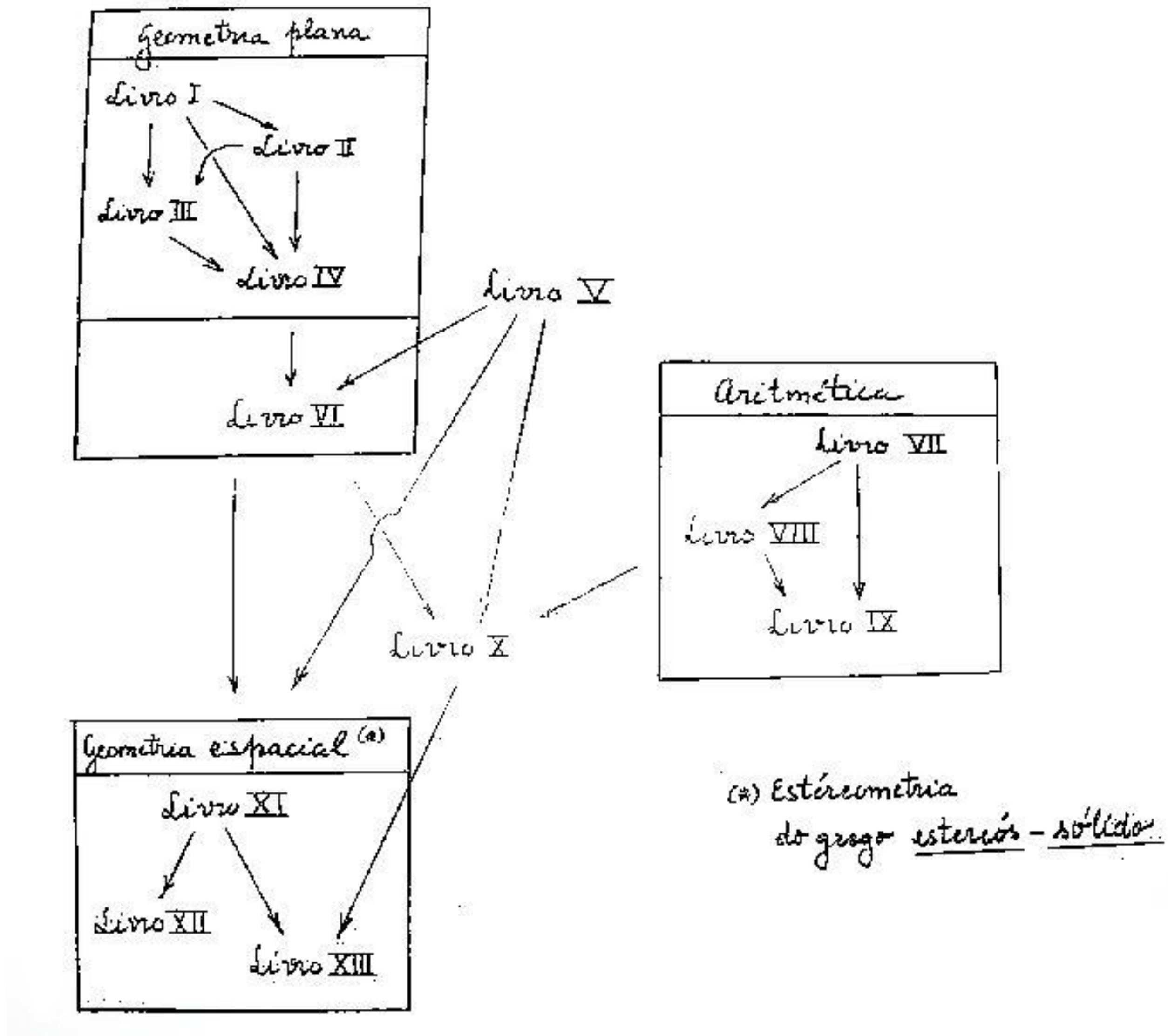
Livro XI	- Definição de ângulo sólido, de poliedro, de paralelepípedo, de prisma e de figura sólida redonda (para esta é feito o uso do <u>movimento</u>: revolução de um retângulo e de um triângulo retângulo em torno de um lado, e de um semi-círculo em torno de seu diâmetro – cilindro, cone reto, esfera) - Propriedades elementares no espaço: paralelismo e perpendicularidade (generalização no espaço da geometria dos livros I e VI) - 28 definições e 39 proposições	Escola de Atenas (Arquitas)

(Parte V – geometria espacial)

Livro XII Livro XIII	- Áreas e volumes pelo método de "exaustão" (Grégoire de Saint-Vincent(*) (belga – 1584 à 1667)) de Eudoxo - 18 proposições - Seção áurea - Construção dos cinco poliedros regulares inscritos na esfera - 18 proposições	Pitágoricos Teeteto

(*) rebatiza o método de Eudoxo chamando-o <u>método de exaustão</u> na obra "Opus geometricum quadratura circuli"(1647)

Estrutura global dos Elementos



- **Relação entre os Elementos e a matemática hoje:**

- No conteúdo:

* geometria, álgebra e aritmética;

* domínios muito mais presentes que hoje: geometria plana, geometria espacial, importância da construção de polígonos regulares;

* a teoria das grandezas sem correspondência hoje;

* forma de Cálculo Integral/Infinitesimal aparece no cálculo das áreas e dos volumes no Livro XII;

* ligação muito estreita entre o Cálculo e a teoria das grandezas: teoria grega do contínuo(*);

- No método:

* sem língua matemática própria oposta a linguagem usual. Sem ideografia (→ sistema de signos que traduzem ideias), sem notação que não possa ser retomada pela palavra

Nota: 1) Mundo grego: lugar da alfabetização da escrita.

2) Escrita antes dos gregos: disjunta da palavra e reservada a uma classe de letrados. A escrita não é mediada pela discussão em comum.

3) Impacto profundo da cultura grega: a palavra é ligada à forma dialógica das obras de Platão. Além disso, a linguagem deve permitir apreender o objeto enquanto tal.

* figuras(**) e um discurso

Matemática grega e texto demonstrativo: não é uma linguagem particular com suas regras e seus códigos, mas um texto literário.

Muitas coisas em comum com o que se faz em matemática atualmente. Mas a linguagem usual é a única utilizada.

(*)**O contínuo nos Elementos de Euclides**

- A noção de contínuo (em grego sinexés (=que é ininterrupto) (→conexo)) é correlata com a noção de grandeza (geométrica)

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

- As grandezas geométricas são de três gêneros: comprimentos, áreas e volumes. Por extensão chamamos também grandezas os segmentos de retas, as porções de superfícies e os sólidos. As de mesmo gênero são qualificadas de homogêneas.

- O tratamento do contínuo nos Elementos de Euclides:

* Não se encontra neste tratado um enunciado de um <u>princípio de continuidade</u>.

* A palavra ‘contínuo’ aparece uma única vez no Postulado 2. Ele demanda “que se prolongue <u>continuamente</u> em linha reta uma linha reta limitada”.

* Euclides se serve de resultados que não estão explicitados nos Elementos:

1) para duas grandezas homogêneas A e B tem-se uma das três situações:

A é igual a B

A é menor do que B

A é maior do que B

2) para duas grandezas homogêneas A e B, existe um número inteiro positivo n tal que n grandezas iguais a B somam uma grandeza maior do que A (esta propriedade fundamental foi enunciada efetivamente por Arquimedes de Siracusa (287 à 212 a.C.) e remonta provavelmente à Eudoxo de Cnido (~400 à ~347 a.C.). É algumas vezes chamada “postulado de Eudoxo”, ou de maneira mais moderna “axioma da medida” ou “axioma de Arquimedes”)[1]

3) consequência: combinando o enunciado de Arquimedes e a propriedade de divisibilidade, demonstra-se a divisibilidade ilimitada das grandezas: é sempre possível de se encontrar uma grandeza menor do que toda grandeza de mesma espécie, dada, e tão pequena quanto se queira (basicamente a Proposição 1 – Livro X dos Elementos)

(continua na próxima página)

[1] utilizada por Euclides na demonstração da Proposição 1 do Livro X

(continuação das notas extras da página anterior)

(**) **A "figura" (geométrica) nos Elementos de Euclides**

- em latim: "figura"

designa um objeto geométrico

- em grego: "esquema"

- uma figura é isso que é contido por um ou mais limites (→fronteira)(em grego péras quer dizer limite)

- na reta, um segmento pode ser considerado com uma figura com os dois pontos das suas extremidades como limites.

- figura correspondendo a uma porção do plano (→figura plana) e fronteira são termos correlatos, isto é, "figura" designa ao mesmo tempo a fronteira e isso que ela contém.

- em grego, "diagrama" designa um agenciamento de muitos "esquemas" entre eles

Exemplo: 1) um pentágono inscrito em um círculo.

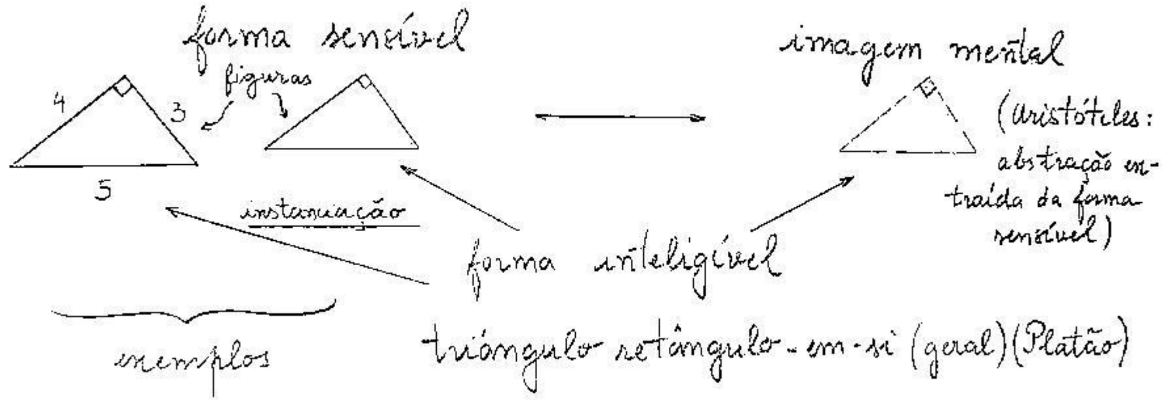
2) a representação gráfica dos dados de um problema geométrico.

- Situação: um triângulo retângulo (espécie de triangulo) de lados 3, 4, 5 unidades (grandezas), repousando sobre a hipotenusa (posição), pode ser representado por um traçado.

Chamar-se-à figura esse traçado que é de fato uma instanciação do triangulo retângulo-em-si.

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)



- a figura identificada como <u>objeto geométrico</u> é inteiramente determinada conceitualmente e morfologicamente.

- objeto geométrico → objeto matemático (→ entre matemático)

↓

Centro de atividade para um pensamento d caráter operatório

O estudo de um objeto matemático consiste essencialmente na análise de suas propriedades (suas possibilidades operatórias) e na descoberta das ligações que as unem a outras propriedades (através de demonstrações) de tal maneira que se possa provar sua <u>realidade</u>.

- Considerações:

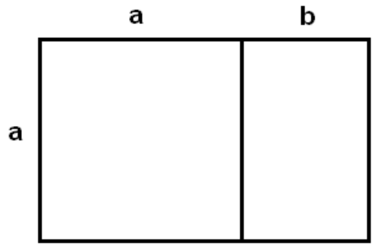
* figura e texto formam um todo na prática da demonstração na geometria grega.

* raciocinar sobre um triângulo retângulo exige o emprego da figura de um triângulo, ainda que se saiba que este triângulo retângulo desenhado (instanciado) <u>não é o verdadeiro triângulo retângulo</u> (em si).

* assim, a geometria utiliza hipóteses e dados sensíveis para chegar às conclusões de modo consistente. Deve ficar claro, no entanto, que ao utilizar formas visíveis, a geometria deseja investigar o absoluto, o geral que elas encerram.

(fim das notas extras)

Exemplo: Proposição 3 – Livro II: "Se uma linha reta (limitada) for dividida, como se quiser, será o retângulo contido pela reta (limitada), e por uma parte dela, igual ao retângulo das partes juntamente com o quadrado da dita parte."



$$(a+b)a = ab + a^2$$

- **<u>A Organização Axiomática</u>**

Os Elementos são uma síntese, e a unidade dessa síntese vem do modo de apresentação: axiomático. Toda proposição deve ser justificada, com a ajuda de resultados precedentes provados e das definições(*). Se muitas coisas nos Elementos proveem de outros matemáticos, Euclides é tido por responsável da forma axiomática dada aos tratados.

Ponto importante: diferença entre coleção de resultados e <u>resultados estruturados através de uma ordem</u> (O Livro I é o mais estruturado)

- as <u>proposições</u> se dividem em <u>problemas</u> (uma construção para efetuar com régua não graduada e compasso e uma justificativa que o objeto construído tem as propriedades requeridas) e <u>teoremas</u> (uma demonstração).

<u>Adendo</u>: <u>Sobre a demonstração</u>

- Demonstração: uma <u>atividade</u> na qual é necessária <u>acrescentar alguma coisa</u> que não está visível, mas que de uma certa maneira já está presente. Além disso, ao mesmo tempo, este acréscimo deve estar submetido à regras muito estritas. Por isso que a Matemática é difícil.

(*)caracterizando a interdependência lógica das proposições ou a <u>estrutura dedutiva</u>.

Ponto Fundamental: a demonstração pede elementos exteriores/auxiliares que devem ser entendidos como articulações do objeto em questão no enunciado, isto é, devem respeitar a estrutura desse objeto.

Exemplo: $\int \ln x \, dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$, integrando por partes.

Não é evidente que se precise escrever $\ln x$ na forma $1\ln x$, e fazer $dv = 1dx \ (\Rightarrow v = x)$.

O matemático não pode acrescentar qualquer coisa: introduzir um fator 2, por exemplo.

A essência da Matemática é destacar esses elementos que não são aparentes no processo de dedução (síntese).

- Pensar esta atividade do matemático em termos de atualização das possibilidades.

– Por outro lado, mesmo diante da impossibilidade de se estabelecer uma teoria matemática de construção para esses elementos auxiliares, pode-se abordar este problema de forma menos filosófica e mais matemática através

da elaboração de um método de descoberta: a partir da tese, admitida, se tenta voltar a um objeto inicial já existente que acarretou a tese (análise), sem precisar de se acrescentar elementos auxiliares,

ou

da redução ao absurdo que dispensa a descoberta, bem como a adjunção de elementos auxiliares.

- Questão: Por que demonstrar? Porque uma demonstração permite de se fazer ligações com outras proposições. Exemplo de um resultado de Análise: "Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy" (se diz então que $\mathbb{R}$ é completo).

Entretanto, se o aprende ou se o utiliza (como critério de convergência) sem ver de onde ele veio, não se faz matemática no sentido pleno.

Fazer matemática: não conhecer os resultados matemáticos, mas conhecê-los de um outro modo(*). Ou seja, não é suficiente conhecer um resultado para compreendê-lo; é preciso conhecer sua "causa", seu "por quê", sua "explicação".

Assim, a demonstração não torna mais certo um conhecimento; ela caracteriza um tipo de conhecimento: o conhecimento matemático (=conhecimento da estrutura, da ligação entre verdades)(**) Descartes: não é suficiente convencer, é preciso também explicar.

Fato: existe matemática sem demonstração

(*) Ou como diria Bernhard Riemann (alemão – 1826 à 1866), mais precisamente, "é necessário de aprofundar os interstícios de um encadeamento de hipóteses." (em "Sobre as hipóteses..." – ver página 241)

(**) O filósofo Georg Hegel (alemão – 1770 à 1831) na sua obra "Fenomenologia do Espírito" (1807) diz: "Quanto às verdades matemáticas, na se pode considerar geômetra quem saiba de cor, exteriormente, os teoremas de Euclides, sem saber suas demonstrações, sem conhecê-las interiormente. Também será considerado insatisfatório o conhecimento da relação de Pitágoras se esta for adquirida a partir da medida de muitos triângulos. Todavia, a essencialidade da demonstração ainda não tem, no conhecimento matemático, a significação e a natureza que fariam dela um momento do próprio resultado, mas, no resultado da demonstração, esse momento some e desvanece".

Em seguida ele acrescenta: "Enquanto resultado, um teorema é bem reconhecido como um teorema verdadeiro, mas essa circunstância, acrescentada, não diz respeito ao conteúdo do teorema, ela diz respeito apenas à relação do teorema com o sujeito que o conhece.

O movimento da demonstração matemática não pertence ao conteúdo que é objeto, mas é um agir exterior (...)."

Ainda, não é suficiente saber ler um demonstração. É necessário se dispor de exemplos significativos para dar corpo a um resultado matemático identificando assim suas motivações, o que marca tanto um entendimento histórico como prático.

Exemplo: algoritmo de resolução de problemas nos babilônios e nos egípcios.

- demonstração, generalidade e idealidade

- Nos gregos, a demonstração é necessária, pois ela garante a generalidade dos resultados(*)

- A generalidade de um resultado X Particularidade da figura (noção de exemplo)

↓

Platão: arrancar a verdade geométrica do mundo sensível para considerá-la através de puras relações no mundo das ideias.

- Prática da Demonstração

Demonstrar é provar, quer dizer estabelecer a verdade de uma proposição[1]. Mas nem toda prova é uma demonstração. As ciências experimentais estabelecem uma verdade pela experiência; não tem demonstração nesse caso. Para que haja uma demonstração, é preciso que a prova de uma verdade seja estabelecida como consequência necessária de uma outra verdade. Ou seja, a demonstração é um encadeamento contínuo que supõe verdades anteriores.

São os matemáticos gregos que inventaram a demonstração. Desde o meado do século V a.C., as regras da demonstração começaram a ser fundamentadas. Pode-se perceber pelo estudo dos textos que, entretanto, a emergência da demonstração caracterizou-se através de um esforço consciente e progressivo. Da própria língua grega, percebe-se essa progressão. Temos inicialmente o verbo deícnimi, que possui dois sentidos:

i) Mostrar concretamente, isto é, dar uma certeza apoiada sobre o visual (→ mostrar)
ii) Mostrar pela palavra, isto é, explicar (→ demonstrar)

[1] e a sua generalidade consequente

Para o sentido (ii) tem-se o verbo apodeícnimi que quer dizer demonstrar (→ provar). Daí, finalmente, tem-se a palavra apódeixis que quer dizer demonstração (→ prova).

Entre mostrar e demonstrar pode-se estabelecer as seguintes diferenças básicas:

Mostrar	X	Demonstrar
Conhecimento a posteriori		conhecimento a priori
(depende da experiência)		(independe da experiência)
Particular		Universal

Immanuel Kant (filósofo alemão – 1724 à 1804) falando de Tales: "ele não devia se fixar a isso que ele via na figura para extrair propriedades, mas devia engendrar por construção essa figura por meio disso que ele pensava a respeito dela e representava a priori por conceito".

Na Matemática grega a demonstração apresentava diferentes formas. O quadro abaixo apresenta essas formas:

demonstração

dedução

análise

síntese

Indução (operação pela qual se passa do conhecimento de todos os fatos às leis que os regem) (Aristóteles)

[indução matemática (Na matemática, não há lugar para afirmações verdadeiras até que se prove em contrário. A prova por indução matemática trata de estabelecer que determinada sentença aberta sobre ℕ é sempre verdadeira)]

[indução empírica das ciências naturais (em que é comum, após um certo número, necessariamente finito, de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Essas leis são tidas como verdadeiras, até prova em contrário)]

Quanto as duas maneiras de se demonstrar por dedução, elas significam:

Análise (em grego analisis): compreende duas ideias:

1) Desfazer as ligações (os vínculos) (lisis)
2) Procedendo em sentido inverso, retornando "subindo" (ana) às causas; ação de resolver

Papo: Supondo que a coisa procurada é obtida, se considera isso do qual ela é precedida, até que retornando sobre seus passos, se atinge uma coisa já conhecida ou que está na ordem dos princípios; e se nomeia essa via a análise porque ela constitui uma inversão (um sentido inverso) da solução.

Notando por p uma proposição, temos na análise a seguinte ordem de implicações:

$$p_{procurada} \to p_n \to \dots \to p_1 \to p_{verdadeira}$$

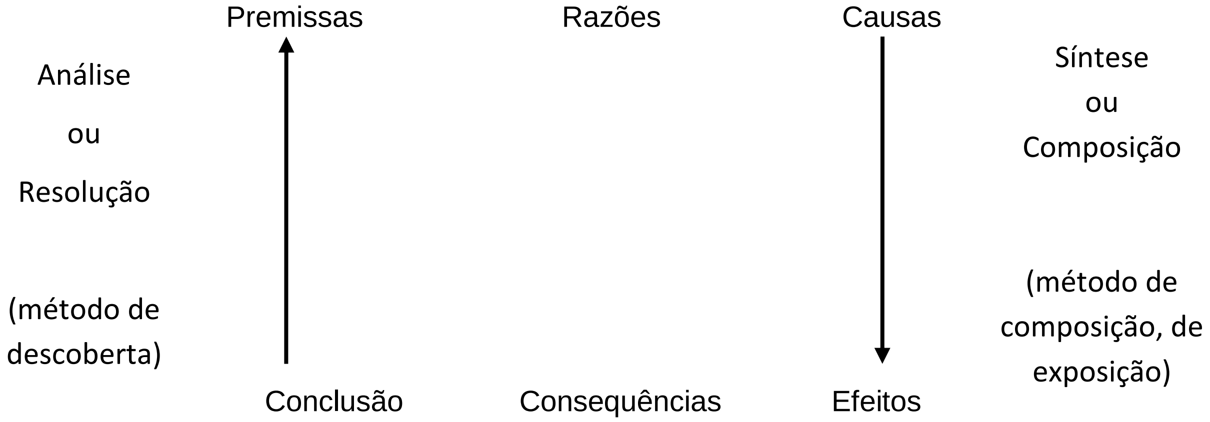
Síntese (em grego sintesis): ação de combinar, de compor, de construir.

Papo: Na síntese, supondo a coisa finalmente percebida pela análise como sendo já obtida, e dispondo de suas consequências e suas causas nas suas ordens naturais, depois ligando-as umas às outras, se chega a construir a coisa procurada.

Temos na síntese a seguinte ordem de implicações:

$$p_{verdadeira} \to p_1 \to \dots \to p_n \to p_{procurada} \ ^{(*)}$$

Pode-se resumir as características destes dois métodos para se demonstrar, no quadro sinóptico abaixo:



(*) Deduzir uma conclusão a partir de certas premissas equivale a oferecer uma demonstração da conclusão quando já estiver assegurada a verdade das premissas

Um caso especial da dedução analítica é distinguido por Aristóteles como a forma de demonstração pela hipótese (Demonstração esta que repousa sobre dois princípios:

* "o princípio segundo o qual é impossível de afirmar e de negar ao mesmo tempo um predicado de um sujeito, não é posto por nenhuma demonstração" (Aristóteles) $[\sim(p \wedge \sim p)]$

* "o princípio segundo o qual, para todo predicado, é a afirmação ou a negação que é verdadeira, é posta pela demonstração que opera" uma demonstração pela hipótese (Aristóteles) ["lei do terceiro excluído" – $(p \vee \sim p)$]). Ei-la:

A redução ao absurdo (do latim reductio ad absurdum) (Aristóteles → redução ao impossível)

{provar que} $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$, onde r é uma proposição que é conhecida ser falsa {equivale a provar $p \rightarrow q$}

[Este método é baseado no fundamento que $(p \wedge \sim q)$ é uma proposição falsa, e que está sendo assumida como verdadeira. Daí, a partir de uma sequência de argumentações logicamente consistentes, chega-se à conclusão que a proposição r é verdadeira. Mas, isto é uma contradição, pois r não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Consequentemente, a única possibilidade de inconsistência, responsável pela contradição, está no fato de se ter inicialmente suposto que $(p \wedge \sim q)$ é verdadeiro. Portanto, pelos dois princípios acima, $(p \wedge \sim q)$ é falsa. Como p é verdadeira (é a hipótese), então resta apenas a possibilidade de que ~q é falsa. Isto é, q é verdadeira. Assim, ao argumentar e provar que $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$, tem-se como consequência que $p \rightarrow q$.]

- **<u>Axiomática de Euclides</u> X <u>Axiomática de hoje</u>**

– o sentido da axiomática modificou-se completamente desde Euclides.

– obra de referência: <u>Fundamentos da Geometria</u> de David <u>Hilbert</u> (alemão – 1862 à 1943) (1899)(*)

– Euclides: os axiomas são verdadeiros, e os conceitos que aparecem nos axiomas têm uma significação (empírica ou inteligível) por eles mesmos.

Hilbert: os axiomas não são verdadeiros e nem falsos, e os conceitos que aparecem nos axiomas não tem nenhuma significação por eles mesmos

<u>Exemplo</u>: Euclides: desigualdade triangular é verdadeira porque é provada por axiomas que são verdadeiros.

Hilbert: desigualdade triangular é verdadeira sob certas estruturas (por exemplo, nas estruturas de <u>espaço vetorial normado</u>, porque a desigualdade triangular se estabelece na definição de norma).

- Euclides: estrutura teórica descreve sempre um objeto

(*) Após o desenvolvimento prodigioso da Geometria no século XIX, era preciso reconstruir seus fundamentos, que as geometrias não-euclidianas abalaram ao identificarem de maneira incisiva as insuficiências dos axiomas euclidianos e a ausência de definições das "noções primitivas" (dos "elementos simples"). Esse movimento converge para a axiomatização da geometria euclidiana por Hilbert através da sua obra "Fundamentos da Geometria". Hilbert parte de objetos não definidos cuja natureza não importa e especifica a relação entre eles por meio de axiomas.

A possibilidade de definir axiomaticamente espaços abstratos <u>cujos elementos chamados "pontos" são números, curvas, superfícies, funções etc.</u> é reconhecida. Assim, a partir do final do século XIX, se instaurou a prática de descrever as propriedades desses espaços abstratos na linguagem da geometria clássica. Essa linguagem permite à intuição geométrica de se exercer, não mais sobre os corpos concretos do espaço físico (→figuras do espaço) ou sobre as figuras do plano, <u>mas sobre objetos mais gerais e universais definidos por uma sequência de axiomas</u>. Se essa ida para a abstração vai significar o fim da geometria como tão somente ciência das figuras do espaço e do plano, e ramo separado da matemática, seus métodos de investigação vão permanecer.

Hilbert: axiomática define uma certa estrutura(*)
- O sistema axiomático de Hilbert, de fato, organiza os fundamentos da Geometria e da Análise. A comparação mais próxima que pode ser feita é com a organização ocorrida na Álgebra ao ser introduzido o conceito de grupo.
- Pela sua lucidez e profundidade de exposição, esta obra de Hilbert logo se tornou a carta da axiomática moderna.

Observações gerais:

1) Definição e existência

- Aristóteles: definição determina uma significação, e não uma descrição;

- quando se define um conceito (representação mental geral e abstrata de um objeto) não se procura provar que ele existe.

- em Euclides: tem-se a formulação da definição; e, depois, a construção do objeto definido vale como prova de existência.

Exemplo: quadrado: definições 22 e 30 – Livro I, existência (=construção?) proposição 46 – Livro I (→ proposição 47 – Teorema de Pitágoras)

- sem prova de existência do ponto ou da reta (→ não se prova a existência de elementos simples)
- atualmente: a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ não existe, isto é, não existe um número real que corresponde a este símbolo. A prova de convergência (no caso, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge) pode ser concebida como uma prova de existência.

2) Axiomas e postulados

– dois tipos de hipóteses:

As noções comuns ou os axiomas (em grego axiómata): lógicas(os) e válidas(os) em todos os domínios. Propriedades essenciais.

– os postulados ou as demandas (em grego aitémata): são válidos(as) unicamente para a geometria plana. Afirmam sem demonstração que certas construções originais são possíveis.

(*) o que equivale a um rejeito da intuição, da visualização e da experiência.

- a distinção que os gregos estabeleciam entre os postulados e os axiomas não foi mantida. Atualmente os matemáticos não veem mais a necessidade de tal distinção, e chamam em uma teoria, ambos os tipos de hipóteses básicas de axiomas.

3) Na estrutura dedutiva euclidiana

– a questão da continuidade

Continuidade: propriedade de um objeto geométrico dada pela intuição.

- definição topológica de continuidade é uma criação dos séculos XIX/XX

– a questão da "igualdade" de figuras

Euclides a avalia sob três aspectos:

Congruência = superposição (via construção geométrica)

Igual em grandeza = mesmo comprimento para os segmentos

mesma área para as figuras planas

mesmo volume para os sólidos

Igual em forma = semelhança

4) Segundo Proclo, nos seguintes agrupamentos sinópticos para os enunciados matemáticos, se articula a construção matemática em Euclides:

Os princípios

Axiomas Postulados

Definições

A partir dos princípios

(proposições derivadas dos princípios)

Problemas

(geração de figuras)

Teoremas

(propriedades que se demonstram acerca das figuras)

Adendo sobre o conceito de "estrutura"

- Em vários momentos falou-se em "estrutura". Este adendo pretende esclarecer seu significado matemático;
- Inicialmente a palavra "estrutura": ela vem do latim structura que quer dizer construção (verbo struere – construir)
- Essencialmente entende-se por "estrutura":
  - Uma disposição, um arranjo, que estabelece um agenciamento das partes de uma obra;
  - Uma coleção de proposições organizadas tais que cada uma depende das outras anteriores e só pode ser o que é na e por sua relação com as outras.
- Esse entendimento de "estrutura" caracteriza o modo de trabalhar a matemática como Euclides o fez.
- Historicamente, sua utilização precedeu sua formalização explícita:

– na aritmética modular a ideia de estrutura aparece verdadeiramente com a abordagem de Carl Friedrich Gauss (alemão – 1777 à 1855) em sua obra "*Disquisitiones Arithmeticae*" ("Investigações Aritméticas" em latim) (1801). Ele estuda os restos da divisão euclidiana sob um ponto de vista estrutural.

– a abordagem essencialmente estrutural de Évariste Galois (francês – 1811 à 1832) para a solução das equações algébricas: as propriedades dos grupos associados aos polinômios dão um critério permitindo determinar se uma equação polinomial é solúvel por radicais, isto é, se as soluções podem ser expressas a partir dos coeficientes do polinômio utilizando somente a adição, a multiplicação e as raízes de ordem n.

– na Álgebra Linear, a ideia de estrutura aparece na Geometria Euclidiana com a abordagem axiomática, e depois com as tentativas de formalização dos espaços vetoriais por Hermann Grassmann (alemão – 1809 à 1877) e Peano.

– Contemporaneamente o conceito de "estrutura" se caracteriza matematicamente de maneira explícita e rigorosa a partir das ideias de Nicolas Bourbaki {nome de um grupo, inicialmente composto de jovens matemáticos franceses de alto nível (*), que se constitui em 1934 e se dissolve nos anos 80, tendo como grande propósito escrever (coletivamente) um tratado moderno de matemática afim de suprir as lacunas dos manuais universitários franceses caracterizados pelo estilo prolixo e não tão rigoroso que obscurecia as ideias gerais, e pela ausência dos desenvolvimentos mais recentes da matemática da época. Esse tratado monumental de mais de sete mil páginas chamado "Elementos de Matemática"(**), inacabado, consistirá de dez livros (o primeiro livro foi publicado em 1939 e o último em 1998). Ele segue uma certa ordem (lógica). Assim, nos seis primeiros livros (Teoria dos conjuntos, Álgebra, Topologia geral, Funções de uma variável real, Espaços vetoriais topológicos, Integração) cada enunciado só faz apelo às definições e resultados expostos precedentemente no próprio livro ou nos livros anteriores. Entretanto, os livros seguintes (Álgebra comutativa, Variedades diferenciais e analíticas, Grupos e álgebra de Lie, Teorias espectrais) não obedecem mais a uma ordem particular, embora suponham conhecidos os conteúdos dos livros anteriores.

Uma das qualidades do tratado de Bourbaki se deve ao grande esforço investido em matéria de terminologia. Procurando empregar uma linguagem rigorosa e ao mesmo tempo tão simples quanto possível, os membros do grupo foram levados a criar vários termos (por exemplo, "partição", "bola", "inj/sobre/bi/jetiva") e notações inovadoras (por exemplo, do conjunto vazio, $\emptyset$ (letra do alfabeto sueco (pronúncia: "oe") (André Weil)), dos conjuntos de números, $\mathbb{Q}$ (identificado à $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$), $\mathbb{R}, \mathbb{C}$) e dos símbolos $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ da lógica.

(*) André Weil (irmão da filósofa Simone Weil) (1906 à 1998)
Jean Dieudonné (1906 à 1992)
Claude Chevalley (1904 à 1984)
Henri Cartan (filho de Élie Cartan) (1904 à 2008)
Laurent Schwartz (1915 à 2002)
Jean – Pierre Serre (1926)
Pierre Samuel (1921 à 2009)
René de Possel (1905 à 1974)
Charles Ehresmann (1905 à 1979)
Jean Delsarte (1903 à 1968)
(**) A palavra "elementos" remete aos "Elementos" de Euclides e a palavra "matemática" no singular (em francês "matemática" é dita no plural "matemáticas") remete à ideia que esta ciência reveste uma unidade profunda.

Os dez livros dos "Elementos de Matemática" ou Um panorama básico da Matemática

Livro I: Teoria dos Conjuntos [De uma forma geral, a Teoria dos Conjuntos esta estreitamente ligada aos fundamentos lógicos da matemática]

Livro II: Álgebra [A Álgebra é um imenso domínio matemático que, de certo modo, generaliza a aritmética a objetos mais abstratos. Fazendo aparecer as propriedades gerais das operações matemáticas, serão caracterizadas estruturas abstratas, ditas algébricas, tais como de grupo, anel, corpo, espaço vetorial, etc., cada uma definida por certas propriedades e regras de "cálculo". A generalidade dessas estruturas é tal que se as encontra em quase todos os domínios da matemática, e mesmo em outras áreas do conhecimento]

Livro III: Topologia Geral [Nasceu no final do século XIX. Foi axiomatizada por Felix Hausdorff (alemão – 1868 à 1942) em 1914. Ela estuda de maneira geral e abstrata os conceitos e as propriedades que apareceram na origem da Análise. Pode-se dizer que a Topologia se preocupa com tudo que depende das noções de vizinhança, limite e continuidade. Inicialmente fazendo uso da noção de "distância", elas podem, entretanto, ser definidas de maneira mais abstrata por conjuntos verificando certas propriedades. (os "espaços topológicos"; caso particulares, os conjuntos munidos de uma "distância", são denominados "espaços métricos")(*)

(*)1) Seja um conjunto $E \neq \emptyset$. Um conjunto τ (letra grega tau minúscula – corresponde ao "t" latino) de partes de E é uma estrutura denominada topologia de E se, e somente se, satisfaz os seguintes axiomas:

T1- $E \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$
T2- A interseção de dois conjuntos de τ pertence a τ ($\leftrightarrow$ A interseção finita de conjuntos de τ pertence a τ)
T3- A união de um número qualquer (arbitrária) de conjuntos de τ é um conjunto de τ.

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

Exercícios:

1) Considere os seguintes conjuntos de partes de E={a,b,c,d,e}
τ_1={ ∅,{a}, {c,d}, {a,c,d}, {b,c,d,e}, E}
τ_2={ ∅,{a}, {c,d}, {a,c,d}, {b,c,d}, E}

Verifique se τ_1 e τ_2 são topologias de E
2) Seja τ a <u>classe</u> (conjunto de conjuntos) consistindo de $\mathbb{R}, \emptyset$ e de todos os intervalos abertos]r, +∞[, $r \in \mathbb{Q}$. Mostre que τ não é uma topologia de $\mathbb{R}$.

Obs.: 1- Os elementos de τ são chamados <u>τ-abertos</u> ou simplesmente <u>(conjuntos)abertos</u>, e o par <E, τ> é chamado um <u>espaço topológico</u>.

2- Os elementos de <E, τ> são chamados "pontos", por analogia com a linguagem da geometria.

3- Sendo dado um espaço topológico <E, τ>, diz-se que uma parte V de E é uma <u>vizinhança de um ponto x</u> $\in E$ se V contém <u>um aberto</u> U ⊂ E tal que x ∈ U (ou seja, U também é uma vizinhança de x)

(*)2) Seja um conjunto $E \neq \emptyset$ e uma função

d: E x E → $\mathbb{R}$

(x,y) ↦ d(x,y)

satisfazendo os seguintes axiomas:

D1) $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in E$ e $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$

D2) (Simetria) $d(x,y) = d(y,x), \ \forall x,y \in E$

D3) (Desigualdade triangular) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \ \forall x,y,z \in E$

A função d é denominada uma <u>métrica</u> ou uma <u>distância em E</u> (diz-se que E está <u>munido</u> de uma métrica d) e d(x,y) lê-se "distância entre x e y".

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

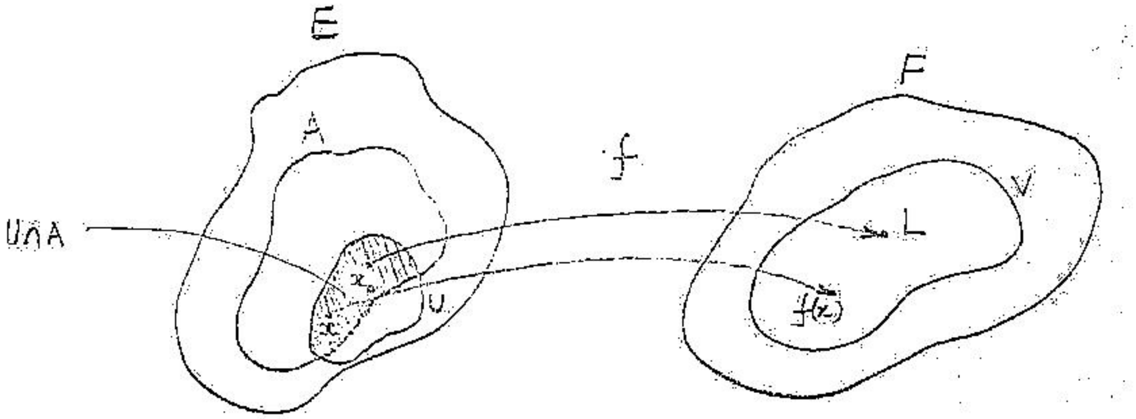
Exemplo: Seja E = $\mathbb{R}^2$. A função d: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, onde $x=(x_1,x_2)$ e $y=(y_1,y_2)$ é uma métrica em $\mathbb{R}^2$, dita métrica euclidiana usual.

Seja d uma métrica em um conjunto $E \neq \emptyset$. A topologia τ em E gerada pela classe de bolas abertas $B_d(p,\delta) = \{x \in E \mid d(p,x) < \delta, p \in E, \delta \in \mathbb{R}_+\}$ em E é chamada topologia métrica (ou topologia induzida pela métrica d).

Além disso, o conjunto E com esta topologia τ é chamado um espaço métrico e é denotado por <E,d>

(*)3) Como exemplo, a definição mais geral de limite será:

Sejam E e F espaços topológicos, A um subconjunto de E, e uma aplicação *f*: A → F. A aplicação *f* tem limite $L \in F$ quando $x \in A$ tende para $x_0 \in A$ se, para toda vizinhança V de L, existe uma vizinhança U de x_0, tal que para todo $x \neq x_0$ pertencendo a $U \cap A$, f(x) é elemento de V.



(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

(*)4) O que se chama Topologia Geral é o estudo qualitativo dos "lugares" e das "relações espaciais": ela teoriza as noções de proximidade, fronteira, localidade, continuidade, etc... e suas ligações mútuas.

Pode-se sem dúvida remontar o projeto da topologia(1) (contração de duas palavras gregas: topos (lugar) e lógos (tratado, estudo)) a Gottfried Leibniz (alemão – 1646 à 1716) através da chamada analisis situs (expressão latina que quer dizer análise da situação (→local), do lugar), mas foi Riemann que lançou as bases na célebre monografia "Sobre as hipóteses que servem de fundamentos à geometria" (1867)

(1) Empregada pela primeira vez por Johann Listing (alemão – 1808 à 1882)

(fim das notas extras)

Quando se trata de objetos geométricos, a topologia estuda as propriedades de uma superfície que não se modifica se se a deforma continuamente (quer dizer sem fazer dobras e rasgos). É por isso que do ponto de vista topológico, uma esfera é equivalente à superfície de um ovo; em revanche a esfera não é topologicamente equivalente a um toro, enquanto que este é equivalente a uma caneca com alça.]

Livro IV: Funções de uma variável real [Este livro trata em detalhes das funções do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathrm{E}$, onde E é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial (topológico) (Livro V), como por exemplo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

A teoria das funções de uma variável real consiste notadamente em definir e analisar as noções de derivada e de integral, as funções elementares (exponencial, logaritmo, etc.), as equações diferenciais, os desenvolvimentos de funções em somas de potências inteiras]

Livro V: Espaços vetoriais topológicos [Um espaço vetorial topológico é um espaço vetorial munido de uma estrutura topológica na qual pode-se passar continuamente de um vetor a outro; mais precisamente, é um espaço vetorial onde as aplicações $(u,v) \mapsto u + v$ e $(\alpha, u) \mapsto \alpha u$, com u, v vetores e $\alpha \in \mathbb{C}$ escalar, são contínuas.

A teoria dos espaços vetoriais topológicos generaliza a teoria dos espaços vetoriais normados, e é útil em Análise Funcional (domínio da matemática que estuda os espaços de dimensão infinita cujos elementos são funções)]

Livro VI: Integração [No século XVII foi definida a integral em um intervalo [a,b] de uma função real contínua de uma variável real; se $f(x) \geq 0$ a integral $\int_a^b f(x)dx$ (notação utilizada desde Jean-Baptiste Fourier (francês – 1768 à 1830)) é a área da região plana definida pelas relações $x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)$ em $\mathbb{R}^2$. No século XVIII se definiu a integral dupla de uma função real contínua de duas variáveis reais, em uma região $D \subset \mathbb{R}^2$; se $f(x,y) \geq 0$, a integral $\iint_D f(x,y)dxdy$ é o volume do sólido definido pelas relações $(x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)$ em $\mathbb{R}^3$. Embora não se tenha mais imagens geométricas desses gêneros, foi possível ainda no século XVIII definir as "integrais múltiplas" de uma função real de várias variáveis reais.

Nota: A extensão da noção de integral, das funções reais de uma variável real às funções reais de duas e depois de várias variáveis reais se deu, historicamente, através da integral dupla $\iint f(x,y)dxdy$ aparecendo de início com Euler como uma solução da equação diferencial parcial $\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = f(x,y)$, por analogia com a integral simples $\int f(x)dx$ que é uma solução da equação diferencial ordinária $\frac{du}{dx} = f(x)$.

De 1895 à 1930, percebeu-se que se podia estender mais a noção de integral; ela pode agora se aplicar às funções reais muito gerais definidas em um conjunto E que pode ser qualquer, desde que se possa definir uma "medida" para subconjuntos A de E, quer dizer atribuir a cada um desses subconjuntos um número $m(A) \geq 0$ tal que $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$, se $A_1, A_2 \subset E$ são tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, propriedades estas de positividade e de aditividade essenciais se se quer que uma "medida" corresponda às noções clássicas de comprimento, de área e de volume. Esta possibilidade de definir integrais em contextos mais amplos que a análise clássica, trouxe enormes progressos, notadamente em Análise Funcional.

Em 1930, Andreï Kolmogorov (russo – 1903 à 1987) mostrou que se pode fundar a Teoria das Probabilidades ligando-a à Teoria da Medida: a medida de um conjunto inteiro é 1 e a medida do conjunto vazio é 0. Assim, incorporando definitivamente o cálculo das probabilidades à matemática.]

Livro VII: Álgebra Comutativa [É o estudo dos anéis e dos corpos comutativos, que se inicia em 1860 e torna-se um ramo separado da Álgebra. Este livro trata então de questões que apareceram no curso do desenvolvimento da Teoria dos Números Algébricos e, mais tardiamente, da Geometria Algébrica (estudo dos conjuntos de soluções de equações algébricas(*), conjuntos que se pode interpretar como objetos geométricos. Por exemplo, o conjunto das soluções da equação $x^2 + y^2 = 1$ pode ser identificado a um círculo de raio 1). Para aceder às propriedades desses objetos geométricos, uma maneira é de estudar diretamente as soluções das equações, o que significa estar na geometria tradicional. Um outra é trabalhar sobre (com as) equações unicamente. Por exemplo, a partir daí, uma das questões fundamentais é de saber, sendo dados dois sistemas de equações diferentes, se eles representam ou não o mesmo objeto geométrico (isso sem resolver as equações). A Álgebra Comutativa está hoje em estreita simbiose com a Geometria Algébrica, fornecendo-lhe suas técnicas e as propriedades dos anéis e dos corpos comutativos. Por outro lado, ela se beneficia dessa simbiose através das intuições que se associam naturalmente às questões da Geometria Algébrica, pois que se pode traduzir os problemas da Álgebra Comutativa em termos geométricos. Traduções essas que permitem generalizar as noções de "curva algébrica" e de "superfície algébrica" para a noção de "variedade algébrica".]

(*) conjuntos denominados "variedades algébricas".

Livro VIII: Grupos e álgebras de Lie [Um grupo de Lie (Sophus Lie – norueguês – 1842 à 1899) é um grupo com infinitos elementos, que se pode "etiquetar" por um ou vários parâmetros. Por exemplo, os número complexos de módulo 1, que se escrevem $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, formam um grupo pela multiplicação (este grupo pode ser interpretado geometricamente como o grupo das rotações planas em torno da origem).

Além disso, este grupo é um grupo de Lie: cada valor do parâmetro θ define um elemento do grupo.

Os grupos de Lie têm propriedades que possuem um papel importante em Matemática (por exemplo, no estudo das Equações Diferenciais), mas também na Física (por exemplo, no estudo das "partículas elementares").

Os grupos de Lie fazem aparecer estruturas algébricas subjacentes chamadas Álgebras de Lie (uma "álgebra" é um espaço vetorial no qual é definida uma multiplicação de vetores)]

Livro IX: Variedades diferenciáveis e analíticas [Riemann, na célebre monografia já citada (rever nota (*4), página 190), explica: "Os conceitos de grandezas só são possíveis quando se encontra uma noção geral antecedente que admite diferentes modos de determinação. Esses modos de determinação formam uma variedade(*) discreta ou contínua na medida em que acontece ou não uma passagem contínua de um modo para outro; em particular, esses modos de determinação denominam, no primeiro caso, pontos e, no segundo caso, elementos da variedade. As noções cujos modos de determinação formam uma variedade discreta são tão abundantes que pode-se encontrar sempre um conceito no qual tais modos estão contidos.

(*) A noção de "variedades" considerada por Riemann, ainda não tinha o sentido preciso que se encontra hoje em Geometria Diferencial, por exemplo.

Por outro lado, as ocasiões para a formação de noções cujos modos de determinação formam uma variedade contínua são tão raros na vida comum, que as posições dos objetos sensíveis e as cores são talvez as únicas situações simples, mas quais os modos de determinação formam uma variedade de muitas dimensões. Ocasiões mais frequentes para o aperfeiçoamento desses conceitos se encontram somente na matemática mais elevada".

Tentando entender Riemann, no interior da noção geral de "mobília" se encontra uma variedade de modos de determinação: mesas, cadeiras, armários, cômodas, etc. (Espécies nessa noção geral). Essa variedade é discreta no sentido de que não se passa de maneira contínua de uma cadeira para uma mesa através de uma "família" de móveis.

Entretanto, passa-se de uma cor a outra, através de toda uma gama de cores intermediárias. Se se acrescenta o tom e a luminosidade se obtém uma variedade contínua, abstrata, de três dimensões, quer dizer completamente diferente do espaço físico da percepção sensível imediata.

Acompanhando este exemplo, se se observa o conceito de "reta no plano", ele admite também uma variedade contínua de "modos de determinação": pode-se passar de uma reta para outra reta por um deslocamento contínuo. Esta variedade "nasce" a partir do plano ao se examinar os seres mais simples que neles habitam, ou seja, as retas. Além disso, ela é abstrata, no sentido que ela não está em principio "mergulhada" em um outro espaço. Trata-se então de uma superfície, que é uma variedade de dimensão 2. Como definir com precisão uma variedade de dimensão n qualquer?

Élie Cartan (francês – 1869 à 1951) no seu livro "Lições sobre a geometria dos espaços de Riemann" (1928) diz: "A noção geral de variedade é muito difícil(*) para definir com precisão. Uma superfície dá a ideia de uma variedade a duas dimensões. Se nós tomamos por exemplo uma esfera, ou um toro, nós podemos decompor essa superfície em um número finito de partes tais que existe uma representação biunívoca de cada um dessas partes sobre uma região simplesmente conexa do plano euclidiano (dimensão 2).

(...) Nos exemplos precedentes cada variedade é definida por um conjunto de pontos situados no espaço preexistente. Mas pode-se também imaginar variedades in abstracto. No caso geral, uma variedade à n dimensões é caracterizada pela possibilidade de representar a vizinhança de cada ponto p por meio de um sistema de n coordenadas suscetíveis de tomar todos os valores possíveis na vizinhança do sistema de valores que representa p".

Assim, uma variedade é recoberta por "pequenos pedaços" identificados à partes do espaço euclidiano de dimensão n. Chama-se essas identificações de cartas locais e o conjunto das cartas forma um atlas(**). Mais precisamente, através da versão mais elementar de variedade, a variedade topológica unicamente ligada à noção de continuidade, define-se:

1) Uma variedade topológica é um espaço topológico M (M de manifold que quer dizer variedade em inglês) que localmente é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, isto é, para cada ponto de M pode-se estabelecer uma aplicação bijetiva e contínua, com inversa também contínua (aplicação denominada homeomorfismo) entre a vizinhança do ponto e um aberto de $\mathbb{R}^n$ (intuitivamente isto significa que para cada ponto de M existe uma vizinhança "deformável" continuamente em uma região aberta de $\mathbb{R}^n$).

(*) "é muito difícil" no sentido de que uma definição é criada tendo em vista fenômenos variados que se deseja unificar.
(**) É dessa maneira que se recobre a superfície da Terra: com as cartas de um atlas geográfico.

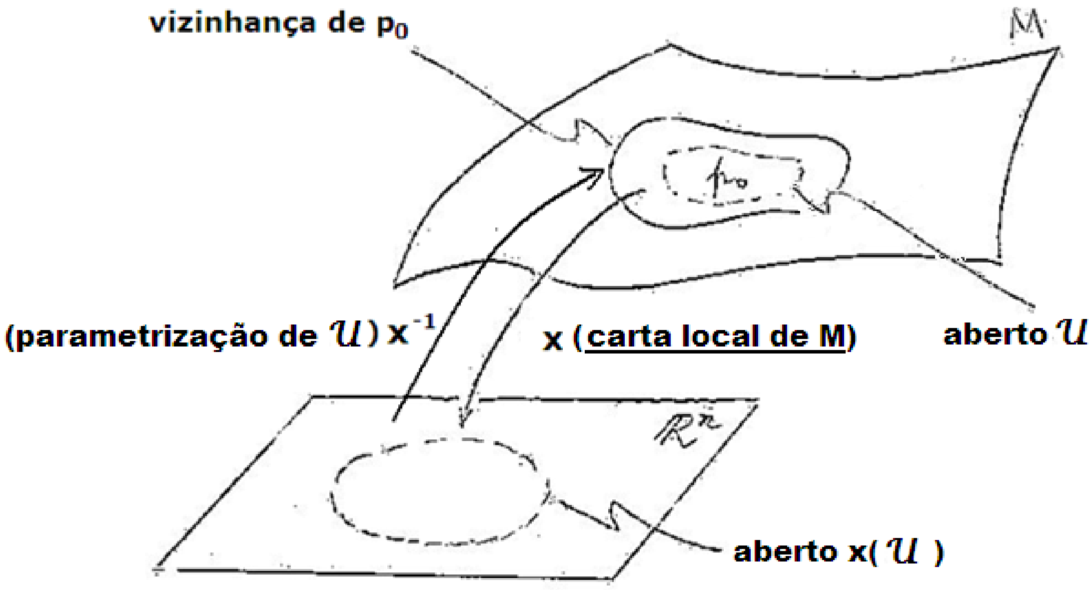
2) Exemplos de homeomorfismos: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^3$$

2) $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

(O exemplo 2 mostra que "comprimento" não é uma propriedade topológica)

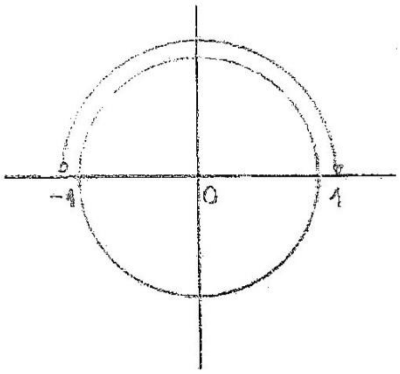


Chamam-se <u>coordenadas locais dos pontos de $\mathcal{U}$</u> as imagens desses pontos por x.

3) O número n se chama a <u>dimensão</u> da variedade M. Uma variedade de dimensão 1 é chamada uma <u>curva</u>. Uma variedade de dimensão 2 é chamada uma <u>superfície</u>. Uma variedade de dimensão zero é um <u>conjunto de pontos isolados</u>.

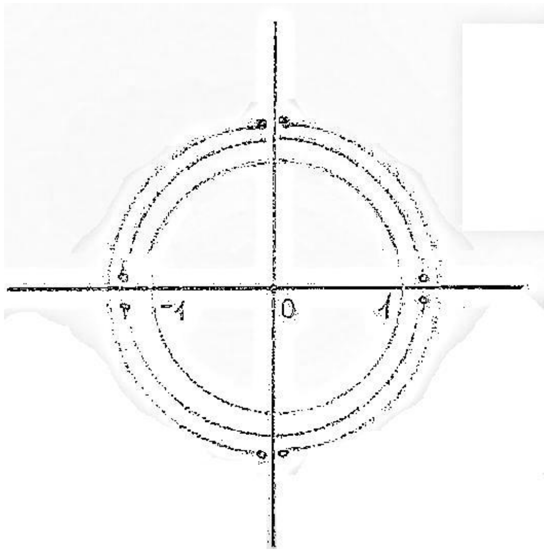
<u>Um exemplo básico</u>

<u>Localmente</u>, o círculo se assemelha a um segmento de reta, que tem dimensão 1. Em outras palavras, uma só coordenada é suficiente para descrever um 'pequeno' arco de círculo.



Seja a parte superior do círculo, como na figura ao lado. Existe um homeomorfismo x que representa cada ponto $(x, y) = (x, \sqrt{1-x^2})$ dessa parte superior pela sua primeira coordenada $x \in\ ]-1,1[$. Uma tal aplicação é chamada carta local.

Seja agora a figura abaixo:



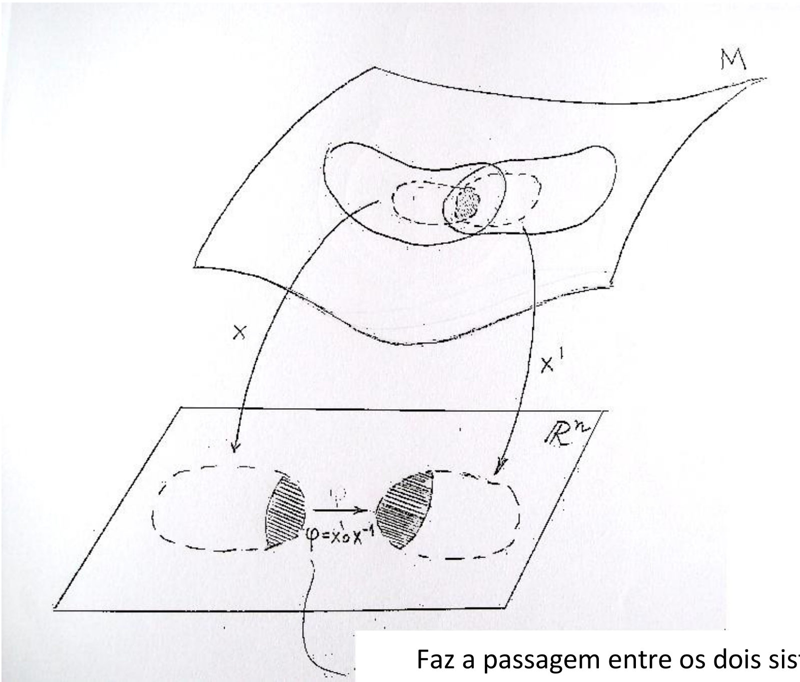
Em conjunto, estas quatro partes recobrem a totalidade do círculo e se diz que as quatro cartas que representam estas partes formam um atlas desse círculo. Por outro lado, essas cartas se recobrem. Assim, a carta da parte superior recobre a carta da parte esquerda no intervalo]-1,0[. Daí, é possível criar uma função $\varphi, \varphi:]-1,0[\to]0,1[$, tal que

$$\varphi(x) = x_{\text{parte esquerda}} \circ x^{-1}_{\text{parte superior}}(x)$$

$$= x_{\text{parte esquerda}}(x^{-1}_{\text{parte superior}}(x))$$

$$= x_{\text{parte esquerda}}\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2} = y$$

A aplicação φ é chamada mudança de cartas. Ela permite se passar do sistema de coordenadas x ao sistema de coordenadas y.



Faz a passagem entre os dois sistemas de coordenadas

Em uma variedade diferenciável(*) a mudança de cartas é um difeomorfismo, isto é, uma aplicação bijetiva, contínua e diferenciável, com inversa também contínua e diferenciável.

Em uma variedade analítica(**) a mudança de cartas é uma função analítica, isto é, uma função que pode ser expressa localmente como uma série de potências convergentes.

Livro X: Teorias Espectrais [O que se chama teoria espectral é uma extensão do estudo do problema dos "autovetores e autovalores". Este problema é bem conhecido a Álgebra Linear para espaços vetoriais de dimensão finita (isto é, espaços vetoriais onde os vetores podem ser caracterizados por um número finito de componentes). O problema dos autovetores e autovalores é relativo às transformações lineares do tipo $T:V \to V$, onde V é um K-espaço vetorial. Se existe um vetor $v \in V$ não nulo e um escalar $\alpha \in K$ tais que $T(v) = \alpha v$, então v é dito um autovetor e α um autovalor. O conjunto de autovalores de uma transformação linear T operando sobre um espaço vetorial V se chama espectro de T, de onde o termo "teoria espectral"]}

(*) Ela é o objeto de base da Geometria Diferencial
(**) Ela é o objeto de base da Geometria Analítica

- Como Bourbaki vê a matemática?

Sua "filosofia" se articula em torno de três noções chaves:

i) A unidade da matemática

[Aparece toda vez que os matemáticos tentam um olhar global sobre suas disciplinas. Constata-se hoje que as divisões tradicionais Álgebra-Análise-Aritmética-Geometria, não se mantêm mais. As pesquisas matemáticas atuais tiram seus utensílios teóricos em todos os domínios.

Exemplos: 1) a geometria euclidiana (Geometria) torna-se um caso particular da teoria dos espaços vetoriais normados de dimensão finita (Álgebra (Linear))

2) a demonstração de um teorema da teoria dos números faz us de conceitos e métodos misturando análise, geometria e álgebra.

Exemplo: O resultado fundamental em Análise que diz que toda sequência crescente e limitada superiormente converge e que toda sequência decrescente limitada inferiormente também converge, é utilizado para o estudo da convergência dos desenvolvimentos em frações contínuas.

À questão "a matemática é uma "torre de Babel" de disciplinas autônomas, isoladas umas das outras, tanto em seus propósitos quanto em seus métodos, e mesmo em suas linguagens?", Bourbaki responde que malgrado as aparências, a evolução interna da matemática guarda mais do que nunca a unidade das diversas partes, e criou aí uma espécie de <u>núcleo/central</u> como jamais aconteceu. O essencial dessa evolução consistiu em uma sistematização das relações existentes entres as diversas teorias matemáticas, e se resume em uma tendência que é geralmente conhecida sob o nome de <u>método axiomático</u>.]

ii) O método axiomático

[O método axiomático, na matemática, é sua própria essência. O rigor pode ser identificado em maior ou menor grau com que se utilizam os padrões desse método. Com Bourbaki, o método axiomático alcança um alto nível de precisão e desenvolvimento.

O que distingue o método axiomático moderno da axiomática euclidiana? De início seu caráter formal: na axiomática moderna, não se define as "noções primitivas" (ponto e reta, por exemplo, na geometria) sobre as quais vai-se estabelecer uma teoria. Elas são consideradas como entidades abstratas cuja natureza ou significação concreta importa pouco. Só importa, de fato, as relações entre as noções primitivas, relações que definem os axiomas. As propriedades que se deduzem a partir de uma tal teoria formal tem um caráter geral: elas são potencialmente aplicáveis a conjuntos de objetos muito diferentes, embora o sistema de axiomas seja o mesmo. É importante, entretanto ressaltar que não se constrói um sistema de axiomas do nada. Inicialmente, o matemático estuda um certo conjunto de objetos e é só a partir desse exame que ele vai resgatar uma axiomática (*).]

iii) As estruturas matemáticas

[Para Bourbaki, o método axiomático é indissociável do estudo das estruturas matemáticas(**).

(*) As axiomatizações das diversas teorias matemáticas se fazem na Teoria dos Conjuntos que já está convenientemente axiomatizada, a partir de Cantor em 1883, por Ernst Zermelo (alemão – 1871 à 1853) em 1904.

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

(**) Na Lógica Matemática a definição de "estrutura matemática" se estabelece da seguinte maneira:

Seja L uma linguagem de primeira ordem com igualdade L {isto é, uma linguagem explicitada por um vocabulário constituído de símbolos separados em duas classes fundamentais:

i) Os símbolos comuns a todas as linguagens de primeira ordem com igualdade:

1) Conectivos proposicionais

$\neg$, ~(não) e v (ou)

2) Quantificador existencial

$\exists$ (existe)

3) Variáveis individuais

v_1, v_2, v_3, ... (um conjunto infinito e enumerável)

4) Símbolo de igualdade

= (igual)

ii) Os símbolos próprios da linguagem L: símbolos predicativos (interpretados como relações entre indivíduos), símbolos funcionais (denotando operações definidas entre indivíduos) e constantes individuais (fazem o papel de nomes de indivíduos privilegiados)

Exemplos: 1) A linguagem da teoria dos corpos (L_K) possui dois símbolo funcionais binários, de adição (+) e de multiplicação (.), e duas constantes individuais: 0 (zero) e 1 (um).

2) A linguagem da teoria dos corpos ordenados (L_{KO}) é obtida de L_K juntando-se o símbolo predicativo binário < ("menor que").

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

Exercício: A linguagem da teoria dos conjuntos (L_C) possui um único símbolo predicativo binário. Qual?

Seja L uma linguagem fixada. Uma expressão de L é uma sequência finita de símbolos de seu vocabulário.

Exemplo: "01+=" é uma expressão de $L_{KO.}$

As expressões permitidas pela gramática de L (conjunto de regras que regem as expressões de L) são:

i) Os termos que tem a seguinte definição indutiva:

T_1: As variáveis individuais são termos.

T_2: As constantes individuais são termos.

T_3: Se $t_1, \ldots , t_n$ são termos e f é um símbolo funcional n-ário de L $(n \geq 1)$, então a expressão $ft_1 \ldots t_n$ é um termo.

T_4: Dentre todas as expressões, os termos de L são aquelas e somente aquelas obtidas pela aplicação das regras gramaticais de T_1 a $T_{3.}$

Exemplos: em L_k

0, 1, $+v_1v_2(v_1+v_2)$, $+v_11$, $.+v_1v_2v_3$

ii) As fórmulas que tem a seguinte definição indutiva:

F_1: Se $t_1, \ldots , t_n$ são termos e P é um símbolo predicativo n-ário de L $(n \geq 1)$, então a expressão $Pt_1 \ldots t_n$ é uma fórmula dita atômica.

F_2: Se A e B são fórmulas, as seguintes expressões também são fórmulas:

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

¬A, vAB(AvB), ¬v¬A¬B(¬(¬Av¬B) (abreviada por $A \wedge B$), v¬AB (¬AvB abreviada por A→B), (¬AvB)∧(¬BvA) (abreviada por A↔B)

F_3: Se A é uma fórmula e v uma variável individual, então ∃vA é uma fórmula.

F_4: Dentre todas as expressões as fórmulas de L são aquelas e somente aquelas, obtidas pela aplicação das regras gramaticais de F_1 a F_3}. Como objetos matemáticos são mais do que simples codificação, eles tem um transcende um mero jogo de símbolos linguísticos e, portanto, além de se precisar exibir uma descrição rigorosa da linguagem, é preciso fornecer um conteúdo interpretativo a estes símbolos, o que será feito através da noção de "estrutura", ou de um "mundo possível" para a linguagem L (uma estrutura para L é então uma interpretação de L).

Uma estrutura para L é uma par $\mathcal{E} =< |\mathcal{E}|, \mathrm{d} >$, constituído por um conjunto não vazio $|\mathcal{E}|$ (chamado universo de $\mathcal{E}$) e uma aplicação d (chamada denotação de $\mathcal{E}$) satisfazendo as seguintes condições:

E_1: A cada símbolo predicativo n-ário P de L, d faz corresponder uma parte $P^{\mathcal{E}}$ do produto cartesiano $|\mathcal{E}|^n = |\mathcal{E}| x \ldots x |\mathcal{E}|$, ou seja:

$$P^{\mathcal{E}} \subset \{(a_1, \ldots, a_n) |\, a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{E}|\}$$

E_2: A cada símbolo funcional n-ário f de L, d faz corresponder uma função $f^{\mathcal{E}}: |\mathcal{E}|^n \to |\mathcal{E}|$.

E_3: A cada constante individual c de L, d faz corresponder um elemento $c^{\mathcal{E}}, c^{\mathcal{E}} \in |\mathcal{E}|$

Assim, uma estrutura para L é constituída por um universo de indivíduos (que servirá de domínio para os quantificadores $\exists, \neg\exists \equiv \forall$) juntamente com um conjunto de operações, relações e elementos (que são as interpretações dos símbolos funcionais, predicativos e constantes de L).

(continua na próxima página)

(continuação das notas extras da página anterior)

Exemplo: Para a linguagem L_{KO} tem-se, entre outras, a estrutura

$$\mathcal{R} =< \underset{(1)}{R}, \underset{(2)}{+^{\mathcal{R}}, \cdot^{\mathcal{R}}}, \underset{(3)}{<^{\mathcal{R}}}, \underset{(4)}{0^{\mathcal{R}}, 1^{\mathcal{R}}} >, \, onde \ \mathbb{R} \text{ é o conjunto dos números reais.}$$

¹ : = $|\mathcal{R}|$ - universo
² : operações
³: relações
⁴: elementos
2,3,4: interpretações

Nota: Seja uma linguagem de primeira ordem com igualdade L fixada. Seja ainda $\mathcal{T}$ um conjunto de fórmulas de L. Diz-se que uma estrutura $\mathcal{E}$ para L é um <u>modelo de $\mathcal{T}$</u> se <u>toda</u> fórmula $A \in \mathcal{T}$ é verdadeira em ε (notações: $\mathcal{E} \vDash A$ e $\mathcal{E} \vDash \mathcal{T}$) A classe de todos os modelos de $\mathcal{T}$ é denotada Mod($\mathcal{T}$)

Def. 1: Diz-se que uma fórmula $A \in L$ é uma <u>consequência</u> <u>semântica</u> de $\mathcal{T}$ se para todo $\mathcal{E} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{T}), \mathcal{E} \vDash A$ (isto é, A é verdadeiro em todo modelo de $\mathcal{T}$). O conjunto de todas as consequências semânticas de $\mathcal{T}$ será denotado por $C_n(\mathcal{T})$

Def. 2: Uma <u>teoria matemática formalizada</u> $\mathcal{T}$ é um conjunto de sentenças semanticamente fechado, isto é, toda consequência semântica de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$. Como $\mathcal{T} \subset C_n(\mathcal{T})$, segue-se que $\mathcal{T}$ é uma teoria matemática formaliza se, e somente se $\mathcal{T} = C_n(\mathcal{T})$ (isto é, como, sempre, $\mathcal{T} \subset C_n(\mathcal{T})$, para $\mathcal{T}$ ser uma teoria matemática basta demonstrar que $C_n(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$).

Def. 3: Uma teoria matemática $\mathcal{T}$ é dita <u>contraditória</u> se existir uma fórmula A no vocabulário de $\mathcal{T}$ tal que $A \in \mathcal{T}$ e $\neg A \in \mathcal{T}$.

(fim das notas extras)

- O que ele entende basicamente por "estrutura matemática"? Parte-se de um conjunto de elementos cuja natureza não é especificada; para definir uma estrutura se caracterizam relações onde intervêm os elementos. Se postula que as relações satisfazem certas condições, e que são os axiomas da estrutura desejada. Fazer a teoria axiomática de uma estrutura dada, é deduzir as consequências lógicas dos axiomas dessa estrutura, não considerando qualquer outra hipótese sobre os elementos considerados (como, em particular, toda hipótese sobre as "naturezas"). No caso de uma teoria matemática, axiomatizá-la, consiste em definir uma espécie de estrutura em teoria dos conjuntos.

Exemplo: A teoria dos grupos é o estudo de uma certa espécie de estrutura, formada por um conjunto e uma operação binária definida nesse conjunto, sujeitos ambos a satisfazerem certos axiomas (propriedades) que não passam de proposições conjuntistas. Desses axiomas pode-se deduzir uma série de outras propriedades. Desta estrutura abstrata, existem numerosas realizações concretas. Eis três delas: o conjunto dos números reais, munido da adição ordinária; o conjunto dos inteiros positivos 1, 2, 3, ... , p-1, munido da multiplicação "módulo p", onde p é um número primo; o conjunto dos deslocamentos no plano euclidiano (isto é, as rotações e as translações agindo sobre os pontos do plano), munido da composição de aplicações. Assim, o processo de axiomatização de teorias matemáticas visa distinguir os princípios sobre os quais elas se alicerçam e, deste modo, pode-se fazer uma ideia mais clara acerca de suas estruturas. Segundo Bourbaki, a partir desta constatação as teorias devem ser classificadas de acordo com suas estruturas. Deste ponto de vista, as estruturas tornam-se os únicos objetos da matemática.

São distinguidas três grandes espécies de estruturas(*) a partir das quais as demais poderão ser obtidas:

1) As estruturas algébricas: essas onde intervêm uma lei(**) que associa a todo par de elementos um terceiro elemento. Dentre as principais figuram os grupos, os anéis, os ideais, os corpos e os espaços vetoriais.
2) As estruturas de ordem: essas onde intervêm uma relação de ordem, relação que permite ordenar, comparar entre eles, os elementos (não forçosamente todos) de um conjunto. Pode-se citar dois exemplos: a relação de ordem "maior ou igual" sobre o conjunto dos números reais; a relação de ordem "inclusão" quando se considera todos os subconjuntos de um conjunto dado.
3) As estruturas topológicas: essas que fornecem um tratamento matemático abstrato das noções intuitivas de vizinhança, de limite e de continuidade.

Tendo como guia a concepção axiomática e estes três grandes tipos de estruturas, Bourbaki se representa um universo matemático onde o princípio ordenador é uma hierarquia de estruturas indo do simples ao complexo, do geral ao particular (ver visualização na página seguinte).

Deve-se observar que a unidade da matemática, o método axiomático ou as estruturas não são invenções próprias de Bourbaki. A unidade da matemática é uma questão que sempre foi mais ou menos colocada, sobretudo para tentar compreender as relações entre a álgebra e a geometria (por exemplo, como se faz que é possível identificar o conjunto dos números reais com os pontos de uma reta?). O método axiomático, iniciado por Euclides, entrou definitivamente na matemática desde o fim do século XIX (por exemplo, com a axiomatização da aritmética dos inteiros elaborada por Richard Dedekind (alemão – 1831 à 1916) ou Giuseppe Peano (italiano – 1858 à 1932), os trabalhos de Hilbert, etc.).

(*) as "estruturas-mães"
(**) uma operação

Quanto às estruturas, pelo menos as estruturas algébricas, Bourbaki foi fortemente influenciado pelo livro "Álgebra Moderna" (escrita em alemão) (1931) de Bartel van der Waerden (holandês – 1903 à 1996) representativo da álgebra alemã dos anos 1900-1930. A especificidade de Bourbaki nessas três noções foi sobretudo de insistir sobre elas, de as ligá-las, de tentar estender ao conjunto das ideias matemáticas um certo conceito de estrutura (absolutamente teorizado por Bourbaki – ver páginas 256 à 259) que emergia dos trabalhos dos algebristas alemães.

Esquematicamente:

Estruturas "carrefour" → Ambiente onde se reúnem as teorias da matemática individualizadas: a teoria das funções, a geometria diferencial, a teoria dos números, a geometria algébrica, etc., domínios que perderam a autonomia de antigamente para serem a partir de agora "carrefours" onde vêm se cruzar e agir numerosos estruturas mais geral.

Esse conjunto constitui a Análise povoada de ideias que podem ser exploradas de várias maneiras.

Fato: Em uma teoria $\mathcal{T}$ onde intervêm numerosas estruturas, qualquer progresso que se realize no estudo dessas estruturas constituintes repercute sobre ela.

↑

Estruturas "múltiplas" → "Estruturas-mães" não simplesmente justapostas, mas combinadas organicamente por um ou mais axiomas que as ligam, isto é, ligadas entre si por condições de compatibilidade.

Exemplo: um grupo topológico é constituído por uma estrutura de grupo é por um estrutura topológica compatíveis no sentido de que as operações $(x,y)\mapsto xy$ e $x\mapsto \frac{1}{x}$ são contínuas.

↑

"Estruturas-mães"

Essencialmente:

→ Estruturas de ordem

→ Estruturas algébricas

→ Estruturas topológicas

Princípio: distinguir a estrutura mais geral do tipo considerado ao lado, com o menor número de axiomas, dessas outras que se obtêm enriquecendo com axiomas suplementares.

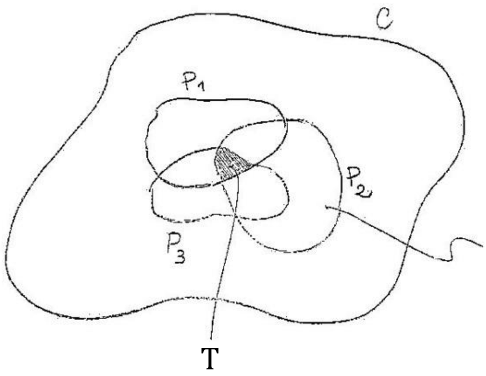
Consequência: grande diversidade de (novas) estruturas.

Uma apresentação sucinta da construção matemática das "espécies de estruturas" de Bourbaki

Uma estrutura é constituída por uma lista finita de conjuntos, ditos conjuntos de base $E_1, \ldots, E_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, (que eventualmente podem ser reduzidos a um só), e de relações e aplicações sobre tais conjuntos. A partir desses conjuntos pode-se formar outros conjuntos através de produtos cartesianos e de conjuntos das partes.

De uma maneira geral, pode-se obter o que Bourbaki chama uma escala de conjuntos. Exemplificando com apenas dois conjuntos base distintos E_1 e E_2, pode-se obter os conjuntos $E_1 x E_2$, $\mathcal{P}(E_1)^{(*)}$, $\mathcal{P}(E_2)$, $\mathcal{P}(E_1 x E_2)$, $\mathcal{P}(E_1) x \mathcal{P}(E_2)$ (...) (uma possível escala de conjuntos). Assim, a partir do caracterizado acima, as estruturas são constituídas tendo por base a teoria dos conjuntos, já convenientemente axiomatizada, e fazendo uso de relações e aplicações.

Seja agora $\mathcal{C}$ um conjunto em uma escala que tem E_1 e E_2 conjuntos de base. Dado explicitamente um certo número de propriedades, por exemplo, P_1, P_2 e P_3, de um elemento genérico de $\mathcal{C}$, seja $T \neq \emptyset$ a interseção dos subconjuntos de $\mathcal{C}$ definidos por estas propriedades.



Subconjunto de $\mathcal{C}$ definido pela propriedade P_2

(*) $\mathcal{P}(E_1)$ = conjunto das partes do conjunto E_1

Uma estrutura de espécie T é caracterizada pelo esquema de formação de $\mathcal{C}$ a partir de E_1 e E_2 (um determinado esquema de construção de escalas) e pelas propriedades que definem T, os axiomas da estrutura. Daí, qualquer proposição que é consequência dos axiomas que definem T, é dita pertencer à teoria das estruturas de espécie de T.

As espécies de estruturas vistas a partir desta construção

Exemplos:

1) Seja $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathrm{ExE})$ elemento de uma escala de conjuntos que tem E como conjunto base. Tome um elemento $\mathrm{R} \in \mathcal{P}(\mathrm{ExE})$ (R é uma relação sobre E), tal que:

i) $\mathrm{R} \circ \mathrm{R} \subset \mathrm{R}$ (onde $\mathrm{R} \circ \mathrm{R}$ é uma relação dada a partir da seguinte definição: Sejam $\mathrm{R}, \mathrm{S} \in \mathcal{P}(\mathrm{ExE})$. A relação $\mathrm{R} \circ \mathrm{S}$ é definida pela seguinte propriedade:

$\exists \mathrm{y} \in \mathrm{E}, (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{S} \wedge (\mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathrm{R} \rightarrow (\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in \mathrm{R} \circ \mathrm{S}$)

ii) $\mathrm{R} \cap \mathrm{R}^{-1} = \Delta_{\mathrm{ExE}} = \text{diagonal de ExE}$ (onde $\mathrm{R}^{-1} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{ExE} \ / \ (\mathrm{y}, \mathrm{x}) \in \mathrm{R}\}$)

Os axiomas (i) e (ii) determinam uma espécie de estrutura de ordem sobre E. O axioma (i) caracteriza a transitividade da relação $\mathcal{R}$. Como $\mathrm{R} \cap \mathrm{R}^{-1} \subset \mathrm{ExE}$, tem-se que R é antissimética, isto é, $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{E}, (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R} \wedge (\mathrm{y}, \mathrm{x}) \in \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$. A igualdade do axioma (ii) implica a reflexividade da relação R.

O conjunto E munido de uma estrutura como essa, um objeto da forma $<\mathrm{E}, \mathrm{R}>$, diz-se conjunto ordenado.

Outras estruturas podem ser obtidas introduzindo-se novos axiomas ou axiomas suplementares. Por exemplo, para que R seja uma relação de ordem total sobre E tal que $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{E}, \quad (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R}$ ou $(\mathrm{y}, \mathrm{x}) \in \mathrm{R}$, deve-se introduzir o axioma suplementar.

iii) $\mathrm{R} \cup \mathrm{R}^{-1} = \mathrm{ExE}$

Exercício: Prove este fato.

2) Seja $\mathcal{C} = \mathcal{P}((\mathrm{ExE})\mathrm{xE})$ um elemento de uma escala de conjuntos que tem E como conjunto de base. Qualquer elemento $\mathrm{F} \in \mathcal{P}((\mathrm{ExE})\mathrm{xE})$ que satisfaça o axioma "F é uma aplicação de ExE em E" define uma espécie de estrutura algébrica sobre E. A função F é uma operação binária sobre E dita Lei de Composição da estrutura.

Introduzindo-se novos axiomas, pode-se obter as espécies de estruturas de grupo e de monoide. Se além de F se considera uma outra aplicação $\mathrm{G} \in \mathcal{P}((\mathrm{ExE})\mathrm{xE})$ satisfazendo o axioma acima, mediante outros axiomas convenientes pode-se obter as espécies de estruturas de corpo e de anel.

Exercício: Estabeleça as espécies de estruturas de espaço vetorial (à esquerda).

3) Seja $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{E}))$ um elemento de uma escala de conjuntos que tem E como conjunto de base. Tome um elemento $\tau \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{E}))$ tal que sejam válidos os seguintes axiomas:

i) $\forall \tau', \tau' \subset \tau \rightarrow \bigcup_{X \in \tau'} X \in \tau$
(a união arbitrária de elementos de τ é um elemento de τ)

ii) $\mathrm{E} \in \tau$

iii) $\forall X, Y,\ X \in \tau\ \wedge\ Y \in \tau\ \rightarrow X \cap Y \in \tau$
(a interseção finita de elementos de τ ainda é um elemento de τ)

Esta espécie de estrutura é chamada espécie de estrutura topológica (ou de espaço topológico). Uma estrutura desta espécie é também chamada topologia e a relação $X \in \tau$ se exprime dizendo que é aberto para a topologia τ.

Outras classes particulares de topologia podem ser obtidas a partir daí com a introdução de novos axiomas.

Algumas características de Bourbaki das quais a Matemática contemporânea, a partir dos anos 1950, é devedora:

- um estilo, uma maneira de escrever a matemática;

- uma atenção à História da Matemática desenvolvida em "Notas históricas" importantes acompanhando o aparecimento gradativo dos Livros dos "Elementos de Matemática";

- um trabalho de classificação dos conceitos, de precisão na formulação das ideias;

- uma busca de estrutura, de classificação sistematizada e exaustiva da matemática (→artigo "A arquitetura da matemática" (1948)) ;

- a própria noção de "estrutura";

- Bourbaki: A Matemática é simplesmente o estudo de estruturas abstratas ou padrões formais de associação.

Livro I

Definições

(*) I. Ponto(1) é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.

(*) II. Linha é o que tem comprimento sem largura.

III. As extremidades da linha são pontos.

IV. Linha reta(**) é aquela que está posta igualmente entre as suas extremidades.

V. Superfície é o que tem comprimento e largura.

VI. As extremidades da superfícies são linhas.

VII. Superfície plana é aquela sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

VIII. Ângulo plano é a inclinação recíproca de duas linhas, que se tocam em uma superfície plana, sem estarem em direitura ua com a outra.

IX. Ângulo plano retilíneo é a inclinação recíproca de duas linhas retas, que se encontram, e não estão em direitura uma com outra.

Se alguns ângulos existirem no mesmo ponto M, cada um deles vem indicado com três letras do alfabeto; e a, que estiver no vértice do ângulo, isto é, no ponto, no qual se encontram as retas, que formam o ângulo, se põe no meio das outras duas; e destas uma está posto perto de uma das ditas retas, em alguma parte, e a outra perto da outra linha.

---

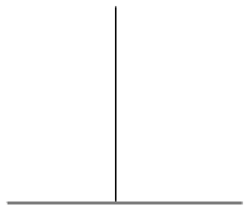
(1) Em grego "sêmeion". Ou seja, o ponto é um signo portador de sentido.

(*) De fato, são duas "pseudo-definições" inutilizáveis. Não se vê jamais Euclides "substituir" estas duas definições no lugar das palavras "ponto" e "linha". Pode-se por isso considerar que nele estas palavras não estão definidas.

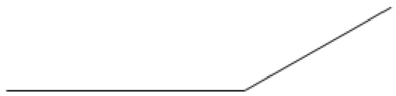
(**) segmento de reta

Assim, o ângulo feito pelas retas AB, CB representar-se-á com as letras ABC, ou CBA; o ângulo formado pelas retas AB, DB, comas letras ABD, ou DBA; e o ângulo que fazem as retas DB, CB, com as letras DBC, ou CBD. Mas, se um ângulo estiver separado de outro qualquer, poder-se-á marcar com a mesma letra, que estiver no vértice, como o ângulo no ponto E.

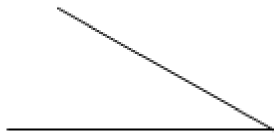
X. Quando uma linha reta, caindo sobre outra linha reta, fizer com esta dois ângulos iguais, um de uma, e ouro de outra parte, cada um destes ângulos iguais se chama ângulo reto; e a linha incidente se diz perpendicular à outra linha, sobre a qual cai.



XI. Ângulo obtuso é o que é maior que o ângulo reto.



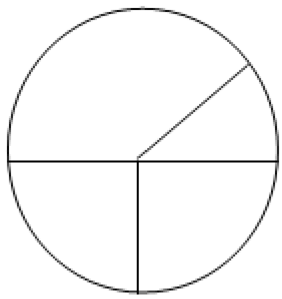
XII. Ângulo agudo é o que é menor que o ângulo reto.



XIII. Limite se diz aquilo que é extremidade de alguma coisa,

XIV. Figura é um espaço fechado por um ou mais limites.

XV. Círculo é uma figura plana, fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência: de maneira que todos as linhas retas, que de um certo ponto existente no meio da figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si,



XVI. O dito ponto se chama centro do círculo.

XVII. Diâmetro do círculo é uma linha reta que passa pelo centro, e que se termina por ambas as partes na circunferência.

XVIII. Semicírculo é uma figura compreendida entre o diâmetro e aquela parte da circunferência do círculo, que é cortada pelo diâmetro.

XIX. Segmento de círculo é uma figura compreendida entre uma linha reta e uma porção da circunferência.

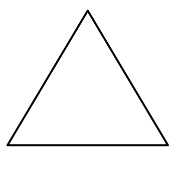
XX. Figuras retilíneas são as que são formadas com linhas retas.

XXI. As triláteras são aquelas que são formadas com três linhas retas.

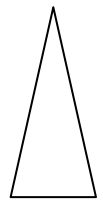
XXII. As quadriláteras são aquelas que são feitas por quatro linhas retas.

XXIII. As multiláteras são as que são feitas por mais de quatro linhas retas.

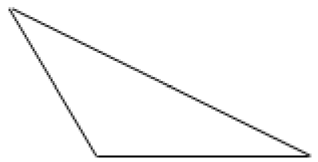
XXIV. Entre as figuras triláteras, o triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais.



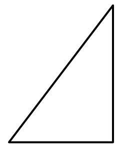
XXV. Triângulo isósceles é o que tem dois lados iguais.



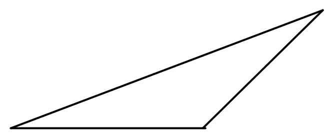
XXVI. Triângulo escaleno é o que tem três lados desiguais.



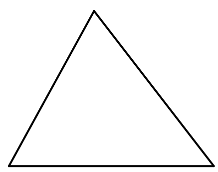
XXVII. Triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto.



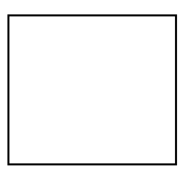
XXVIII. Triângulo obtusângulo é o que tem um ângulo obtuso.



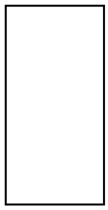
XXIX. O triângulo acutângulo é o que tem todos os ângulos agudos.



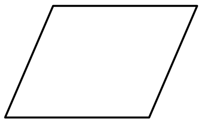
XXX. Entre as figuras quadriláteras o quadrado é o que é juntamente equilátero e retângulo.



XXXI. E a figura, que de uma parte for mais comprida, pode ser retângula, mas não equilátera.

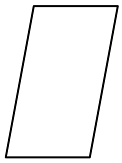


XXXII. Mas o rhombo é uma figura equilátera, e não retângula.



(losango)

XXXIII. Rhomboide é uma figura que, tendo os lado opostos iguais, nem é equilátera e equiângula.



(paralelogramo)

XXXIV. Todas as demais figuras quadriláteras, que não são as referidas, se chamam trapézios.

XXXV. Linhas paralelas ou equidistantes são linhas retas que existindo no mesmo plano, e sendo produzidas de ambas as partes, nunca se chegam a tocar.

Axiomas

I. As coisas que são iguais a uma terceira, são iguais entre si.

II. Se a coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.

III. E, se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos são iguais.

IV. E, se a coisas desiguais se juntarem outras iguais, os todos serão desiguais.

V. E, se de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os restos serão desiguais.

VI. As quantidades das quais cada uma por si faz o dobro de outra quantidade são iguais.
VII. E aquelas que são a metade de uma mesma quantidade são também iguais.

VIII. Duas quantidades que se ajustam perfeitamente uma com outra, são iguais.

IX. O todo é maior do que qualquer das suas partes.

Para as grandezas de todas as espécies.

<u>Interpretação algébrica dos nove axiomas</u>

Axiomas:

1. $x = z \quad \wedge \quad y = z \quad \Longrightarrow \quad x = y$
2. $x = y \quad \Longrightarrow \quad x + z = y + z$
3. $x = y \quad \Longrightarrow \quad x - z = y - z$
4. $x \neq y \quad \Longrightarrow \quad x + z \neq y + z$ com $x, y, z \in \mathbb{R}$
5. $x \neq y \quad \Longrightarrow \quad x - z \neq y - z$
6. $x = y \quad \Longrightarrow \quad 2x = 2y$
7. $x = y \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{2}$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \ x = x$
9. $A \subset B, \ \exists c$ tal que $A + C = B$ (no âmbito do finito)

Postulados

1. Pede-se como coisa possível que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha reta. (axioma de incidência)

2. E que uma linha reta determinada se continue em direitura de si mesma, até onde seja necessário.(*)

3. E que com qualquer centro e qualquer intervalo se descreva um círculo.

4. Todos os ângulos tetos são iguais.

5. E se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer os ângulos internos da mesma parte menores que dois retos, estas duas retas, prolongadas ao infinito (continuamente) concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos.

6. Duas linhas retas não compreendem um espaço (uma área).

[...]

(*) Em Euclides uma reta não existe jamais "inteira". Existe, sobretudo, segmentos de reta (linhas retas) que se pode prolongar "em direitura" de si mesmos à vontade. Além disso, nele, um segmento de reta é um objeto-em-si, que não pode certamente ser considerado como um conjunto ilimitado de pontos.

Esquema sinóptico da dependência das proposições do Livro I e a relação delas com o Postulado 5

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Não utilizam o Postulado 5} & & \text{Postulado 5} \\
 & & \downarrow \\
\text{Proposições de 1 a 26} & & \text{Proposição 29} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Proposição 27} & & \text{Proposição 30} \\
\downarrow \quad \searrow & & \downarrow \\
\text{Proposição 28} & & \text{Proposição 32} \\
 & & \downarrow \\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad \text{Proposição 31}}_{} & & \text{Proposições de 33 a 48}
\end{array}
$$

Formam a "Geometria Absoluta"
(expressão cunhada por János Bolyai
(húngaro – 1802 à 1860)) ou "Geometria Neutra"

Obs.: 1) As proposições 27 à 31 tratam das paralelas e constituem isso que se designa como a teoria das paralelas.

2) O Postulado 5 intervêm pela primeira vez na Proposição 29: "Uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si; o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos".

3) O fato da utilização do Postulado 5 intervir tardiamente no enunciado das proposições fez-se pensar que era também uma proposição (teorema) e que Euclides foi obrigado de colocá-la como postulado porque ele não conseguiu demonstrá-la.

4) O Postulado 5 de Euclides é frequentemente enunciado como: "(no plano,) por um ponto exterior a uma reta dada passa uma e só uma paralela a essa reta", formulação atribuída a John Playfair (escocês, 1748 à 1819) e conhecida como "axioma de Playfair" (embora, de fato, Proclo estabeleceu-a primeiro através de uma proposição equivalente(*), o que aliás Playfair sempre reconheceu). Este enunciado é equivalente ao enunciado do Postulado 5.(**)

Equivalências ao Postulado 5 de Euclides

(Abreviação: postulado 1=1, etc.)

Uma proposição p é dita equivalente ao quinto postulado se:

$$\{1,2,3,4\}+p\Rightarrow 5 \quad \text{e} \quad \{1,2,3,4\}+5\Rightarrow p$$

(*) Proclo precisa inicialmente dois "axiomas":

1. Se duas retas formando um ângulo a partir de um ponto são prolongadas ao infinito, o intervalo dessas retas prolongadas ao infinito ultrapassa toda grandeza finita.
2. A distância entre duas paralelas é limitada (→constante) (consequência do Axioma 1)

Em seguida ele demonstrou a proposição equivalente:
"Quando uma reta corta uma das paralelas, ela corta a outra também".

(**) Este axioma aparece no livro de Playfair intitulado "Elements of Geometry" (1795)

Exemplos de proposições equivalentes ao Postulado 5:

1) O axioma de Playfair

2) "Se uma reta intersecta uma das paralelas, então intersecta outra."

3) "Uma reta que cai sobre duas paralelas, faz ângulos alternos internos iguais entre si." (Proposição 29 – Livro I)

4) "A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois retos." (Proposição 32 – Livro I)

O Postulado 5 e as geometrias

- Geometria Neutra: $\{1, 2, 3, 4\}$
- Geometria Euclidiana: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Geometria Não-Euclidiana: $\{1, 2, 3, 4, \sim 5\}$

Onde ~ 5: "Existe uma reta e existe um ponto fora dela pelo qual passam pelo menos duas retas paralelas a ela"

ou

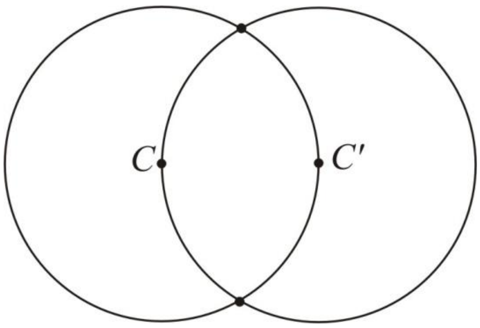
"Existe uma reta e existe um ponto fora dela pelo qual não passa nenhuma reta paralela a ela".

Nota: **Euclides e o rigor**

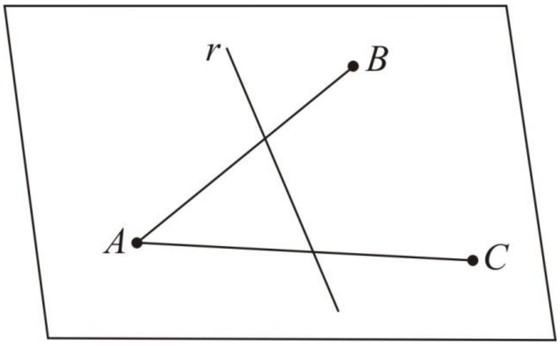
A crítica que se faz à Euclides não se aplica justamente às demonstrações mas sim sobre a ausência de fundamentos suficientes (postulados/axiomas/definições) para uma demonstração rigorosa. Nesse aspecto, ela é antiga: Eudoxo e Arquimedes acrescentam o hoje chamado "axioma de Arquimedes" (ver página 218). Outras imperfeições foram remarcadas também pelos matemáticos gregos. Entre os postulados, o quinto foi o mais criticado; certos continuadores e comentadores de

Euclides tentaram demonstrar outros postulados (por exemplo, este da igualdade dos ângulos retos) ou reconheceram a insuficiência de certas definições como essas da reta ("Linha reta é aquela que estende igualmente em relação à seus pontos") e do plano.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (alemão – 1646 à 1716) observa que Euclides as vezes utiliza a intuição geométrica para encobrir a ausência de certos postulados, por exemplo no seu método de construção do triângulo equilátero (Proposição 1 – Livro I). Ela é feita a partir de dois círculos tais que cada um deles passa pelo centro do outro. Ele admite sem prova que os dois círculos possuem uma interseção (de fato, duas interseções).



O fim do século XIX, ligado ao rigor matemático, vê não somente a multiplicação de críticas dessa natureza, mas também a formulação dos axiomas ($\leftarrow$ postulados) que faltam. Georg Cantor (alemão – 1845 à 1918) e Dedekind mostram a necessidade de um "axioma de continuidade" e o formalizam: "Se considera uma sequência de segmentos encaixados não vazios $[a_n, b_n]$ cujo comprimento tende para 0. Então, existe um ponto comum único a todos segmentos, o qual corresponde ou a um número racional ou a um número irracional." Igualmente, Moritz Pasch (alemão – 1843 à 1930) e o "axioma de ordem": "Sejam *A*, *B* e *C* três pontos não alinhados e *r* uma reta do plano *ABC* que não passa por nenhum dos pontos *A*, *B* e *C*; se a reta *r* passa por um dos pontos do segmento *AB,* ela passa ou por um ponto do segmento *BC* ou por um ponto do segmento *AC*."



Podem-se identificar ainda outras hipóteses utilizadas por Euclides não mencionadas inicialmente como postulados:

- Retas são conjuntos ilimitados de pontos.
- No Postulado 1: a reta que se pode traçar ligando dois pontos <u>é única</u>.
- No Postulado 2: pode-se continuar uma reta de <u>uma única maneira</u>.

No começo do século XX o reconhecimento das <u>faltas</u> na formalização euclidiana, assim como as diferentes características de soluções são suficientemente conhecidas para se estabelecer uma construção rigorosa da geometria. Os matemáticos Hilbert e Pasch estão na origem desse trabalho. Projeto: demonstrar os teoremas da geometria sem apelo à <u>intuição</u>. A aplicação de regras lógicas será o único método autorizado.

<u>**Equivalência e aplicações de áreas**</u>

- O que fazer para "medir" uma figura plana (calcular sua área) quando não se dispõe de números reais, mais precisamente de números irracionais? Como afirmar, por exemplo, que a área de um retângulo é sempre igual ao produto do comprimento da base pelo comprimento de sua altura?

- Para os matemáticos gregos essa falta impunha sérias limitações, pois fixada uma unidade de comprimento, sempre haveria segmentos que não poderiam ser "medidos" exatamente com essa unidade.

- Considerando o que está exposto nos Elementos de Euclides, há uma complicação adicional: todas as construções devem ser efetuadas somente com régua (não- graduada) e compasso.
- Como Euclides resolve esse problema de fazer a quadratura, quadrar qualquer figura poligonal usando somente transformações de áreas? Dado m polígono qualquer, como construir, somente com a régua (não-graduada) e o compasso, um quadrado cuja área é igual à área do polígono dado?

Equivalências e aplicações de áreas nos Elementos de Euclides

- Equivalência de áreas

- Como construir, usando somente a régua não-graduada e o compasso, um quadrado cuja área seja igual a de um polígono dado?
- Euclides faz isso nos livros I e II dos Elementos sem utilizar a teoria das proporções de Eudoxo exposta no Livro V.

Glossário: 1) linha reta – empregada às vezes para designar segmento de reta, outras vezes para designar linha reta (ou reta)
2) reta limitada – empregada para designar segmento de reta.

- Euclides parte dos critérios de congruência de triângulos que estão no Livro I:

Proposição 4: Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e os ângulos compreendidos por estes lados forem também iguais, as bases e os triângulos, e os demais ângulos, que são opostos aos lados iguais serão também iguais.

Proposição 8: Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um e as bases também iguais, os ângulos, compreendidos pelos lados iguais, serão também iguais.

Proposição 26: Se em dois triângulos dois ângulos de um forem iguais a dois ângulos do outro, cada um a cada um, e um lado do primeiro igual a um lado do outro, e forem estes lados ou adjacentes, ou opostos a ângulos iguais, os outros lados dos dois triângulos serão iguais aos outros lados, cada um a cada um e também o terceiro ângulo será igual ao terceiro.

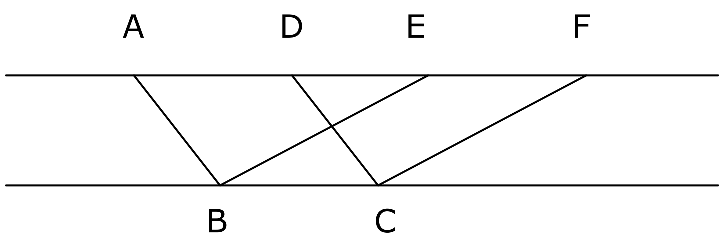
Proposição 29: Uma linha reta que cortar duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si; o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos.

Em seguida vamos considerar a

Proposição 34: Em um paralelogramo, os lados e os ângulos opostos são iguais e o paralelogramo é bissectado por cada diagonal.

A partir dessas proposições, na linha do nosso tema, vamos demonstrar com Euclides as proposições seguintes:

Proposição 35: Os paralelogramos que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais.

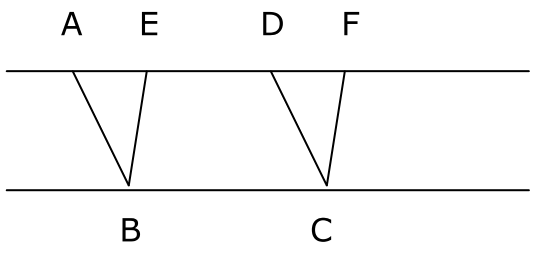


Sejam os paralelogramos ABCD e EFCB sobre a mesma base BC, entre as mesmas paralelas AF, BC. Eu digo que o paralelogramo ABCD é igual ao paralelogramo EBCF. No paralelogramo ABCD, a reta AD é igual a reta BC (I.34) e no paralelogramo EBCF, a reta EF é igual a reta BC. Logo será AD igual EF (Ax.1) e DE é comum. Será então AE igual a DF (Ax.2). Mas a reta AB é igual à reta DC (I.34). Logo as duas retas EA, AB são iguais às duas retas FD, DC, cada uma a cada uma. Mas o ângulo externo FDC é igual ao ângulo interno EAB (I.29). Será então o triângulo EAB igual ao triângulo FDC (I.4). Do trapézio ABCF tire-se o triângulo FDC; e do mesmo trapézio, tire-se o triangulo EAB. Logo os paralelogramos ABCD, EBCF, que são os restos, serão iguais entre si (Ax.3).

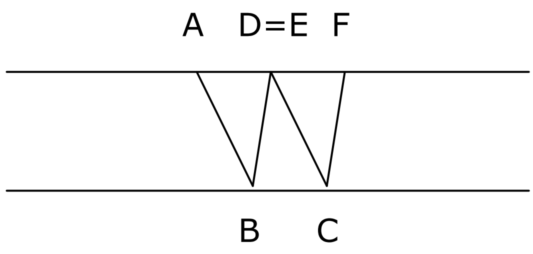
De fato, existem 3 casos a serem considerados:

O primeiro demonstrado acima.

O segundo:



O terceiro:



Euclides como sempre só demonstra um caso, deixando os outros a cargo do leitor.

A partir deste resultado mostramos a

Proposição 36: Paralelogramos que têm bases iguais, e situados entre paralelas, são iguais.

Nas duas proposições acima, Euclides utiliza pela primeira vez a noção de igualdade entre figuras significando igualdade de área e não de congruência, como usada em I.4, I.8, I.26, os critérios de congruência de triângulos. Como consequência das proposições 35 e 36 temos:

Proposição 37: Os triângulos que estão sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais.

Proposição 38: Os triângulos que estão sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas, as iguais.

Proposição 47 (Teorema de Pitágoras)

[utilizando equivalência de áreas]

Enunciado (protasis em grego) - da proposição

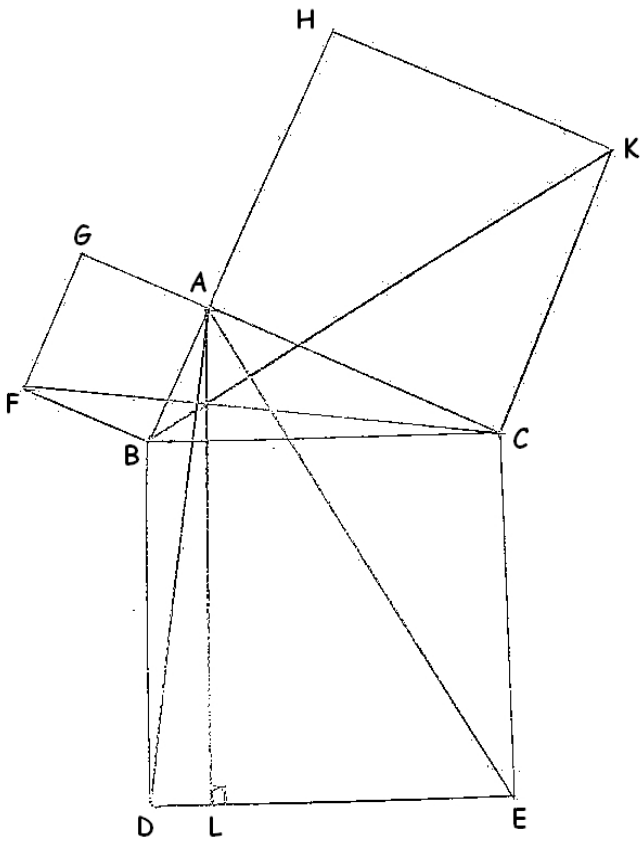
Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que formam o mesmo ângulo reto.

Exposição (ectésis em grego) - instanciação do dado, identificado por letras

Seja o triângulo retângulo ABC tendo o ângulo BAC reto.

Determinação (diorismos em grego) - instanciação do objeto de pesquisa

<u>Eu digo que</u>(*) o quadrado sobre BC é igual aos quadrados sobre BA, AC.



<u>Figura</u> (<u>esquema</u> ← <u>diagrama</u>) As letras da exposição e da determinação são inscritas, bem como as linhas ou os pontos <u>requisitados pela construção</u>. A figura é um todo destinado à <u>contemplação</u>.

<u>Construção</u> (<u>catasqueuê</u>): a construção utiliza as proposições 31 e 46, e o postulado 1.

Com efeito, construa sobre BC o quadrado BDEC, e sobre BA, AC, os quadrados GB, HC (Proposição 46) e que, pelo ponto A seja traçado AL, paralela a BD ou CE (Proposição 31). E trace também AD e FC (Postulado 1)

(*)A fórmula "eu digo que" (<u>lego óti</u> em grego) é uma herança do "diálogo" entre professor e aluno que se pode conceber da seguinte maneira: o professor enuncia primeiramente a proposição a demonstrar (no problema a resolver, ela é substituída pela fórmula "é preciso então") pelo aluno ao qual se dirige. Esse é o momento, o único, onde o professor toma a palavra em seu próprio nome: é, com efeito, o único momento da demonstração onde é dita uma verdade que não se impõe por si mesma e que, portanto, não poderia ser dita. O professor, neste momento da demonstração, <u>sabe</u> e é o único a já poder sabê-lo. Assim, no caráter quase mecânico do processo (que irá se completar através das outras etapas que virão a seguir) que conduz à verdade universal manifestada em uma forma tão impessoal quanto possível, o <u>diorismos</u> é então uma exceção significativa a essa <u>gramática impessoal do texto</u> (de uma maneira mais geral os objetos matemáticos são frequentemente os sujeitos dos verbos → <u>o matemático</u> se anula como sujeito)

Elemento determinante da demonstração, AL não é apresentado como altura, mas como paralelas aos lados verticais do quadrado sobre a hipotenusa.

Postulado1: Pede-se (→demanda), como coisa possível, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha reta.

Proposição 31: De um ponto dado conduzir uma linha reta paralela a outra linha reta dada (problema)

Proposição 46: Sobre uma linha reta dada descrever um quadrado (problema).

Demonstração (apódeixis em grego):

1ªparte: Igualdade de triângulos. A demonstração é levada entre as partes esquerda e direita da figura em relação a AL.

Proposição 14: Se em um ponto de uma linha reta qualquer concorrerem de partes opostas duas retas, fazendo com a primeira reta os ângulos adjacentes iguais a dois retos, as retas que concorrem para o dito ponto, estarão alinhadas uma a outra.

Então, como cada um dos ângulos BAC, BAG são retos, segue-se que as duas retas AC, AG que não estão no mesmo lado da reta BA, formam com BA, em A, ângulos adjacentes iguais a dois ângulos retos; portanto CA está alinhada com AG (Proposição 14). Pela mesma razão BA está alinhada com AH.

Postulado 4: E que todos os ângulos retos sejam iguais entre eles.

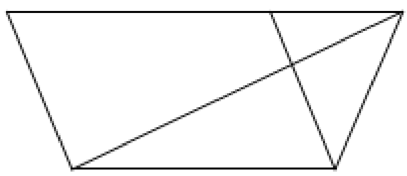
Os ângulos DBC, FBA, por serem retos, são iguais (Postulado 4). Adicione a cada um o mesmo ângulo ABC; logo, o total DBA será igual ao total FBC (Axioma 2).

E como DB é igual a BC e FB a BA, os dois lados AB e BD são iguais aos dois lados FB e BC cada um a cada um e o ângulo DBA é igual ao ângulo FBC. A base AD é então igual à base FC, e o triângulo ADB é igual ao triângulo FBC (Proposição 4).

2ª parte: Igualdade de áreas:

Para um retângulo, Euclides utiliza a expressão de figura oblonga (→ pitagóricos).

Proposição 41: Se um paralelogramo e um triângulo estiverem sobre a mesma base e entre as mesma paralelas, o paralelogramo será o dobro do triângulo.



O paralelogramo BL é o dobro do triângulo ABD, porque tem a mesma base BD, e estão entre as mesmas paralelas BD, AL(*) (Proposição 41). E o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC, porque tem a base comum FB e estão entre as mesmas paralelas FB e GC. Oras os dobros de quantidades iguais são iguais. Logo, o paralelogramo BL(de lados BD e DL) é igual ao quadrado GB (de lado AB) (Ax.1).

3ª parte: Argumento de "simetria" no raciocínio (isso que se passa à esquerda é análogo a isso que se passa à direita).

Do mesmo modo, traçadas as retas AE e BK, se demonstra que o paralelogramo CL (de lados EC e El) é igual ao quadrado HC.

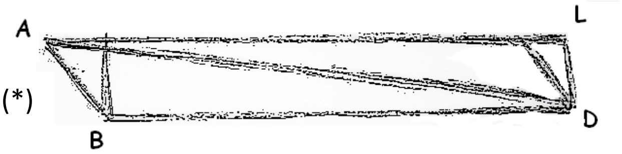
4ª parte: Recapitulação da demonstração.

Logo o quadrado inteiro BDEC é igual aos dois quadrados GB e HC, e de uma parte BDEC é o quadrado descrito sobre BC, de outra parte GB e HC são os quadrados sobre BA, AC. Logo o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os quadrados BA, AC.

Conclusão (simperasma em grego): Retorna à proposição sem especificação literal. É uma confirmação.

Então, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que formam o mesmo ângulo reto. É isso que se devia demonstrar.

(*)



Proclo de Lícia distingue seis etapas <u>no desenvolvimento</u> de uma proposição (problema ou teorema):

1) A proposição (protasis) (propriamente dita) consiste em enunciar o problema ou o teorema sob sua forma mais geral, não instanciada;
2) A exposição (ectésis) é uma instanciação dos dados;
3) A determinação (diorismos) é uma instanciação do objeto procurado;
4) A construção (catasqueuê);
   [a figura (esquema ou diagrama) contém as letras da exposição e da determinação, bem como <u>as linhas ou pontos requisitados pela construção</u>]
5) A demonstração (apodeixis) propriamente dita: trata-se de deduzir o resultado;
6) A conclusão (simperasma) retorna à proposição (sem especificação literal) como sendo o resultado da demonstração, com toda a generalidade, possível. Se acrescenta as fórmulas: "É isso que se devia demonstrar" para um teorema, ou "É isso que se devia construir" para um problema:

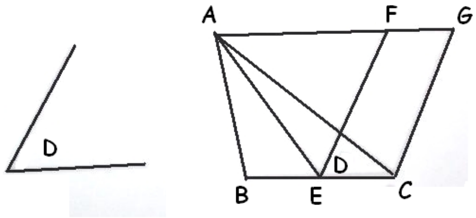
<u>Proposição 48</u>: (recíproca do teorema de Pitágoras): Se o quadrado sobre um lado de um triângulo for igual aos quadrados sobre os outros dois lados, o ângulo compreendido por estes dois lados será reto. (Estude como exercício a demonstração de Euclides)

- <u>Aplicação de áreas com igualdade</u>

Na terminologia matemática grega, aplicar um paralelogramo com um ângulo dado a um segmento de reta dado <u>igual</u> a um polígono figura retilínea) dado, chama-se <u>aplicação parabólica</u>.

<u>Proposição 42</u> (problema): Construir um paralelogramo, que seja igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro ângulo dado.

(Construção)



Seja dado o triângulo ABC, e o ângulo D. Deve-se construir um paralelogramo igual ao triângulo ABC, e com um ângulo igual ao ângulo D.

Divida a base BC em duas partes iguais em E (Proposição 10) e trace AE, e com a reta EC no ponto E construa o ângulo CEF igual ao ângulo D (Proposição 23).

Pelo ponto A trace AG paralela a EC, e pelo ponto C a reta CG paralela a EF (Proposição 31). Então FECG é um paralelogramo. E como as retas BE e EC são iguais, o triângulo ABE será igual ao triângulo AEC, por estarem ambos sobre as bases iguais, BE e EC e entre as mesmas paralelas BC e AG (Proposição 38). Logo, o triângulo ABC é o dobro do mesmo triângulo AEC. Mas também o paralelogramo ECG é o dobro do mesmo triângulo AEC, que se acha sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas do paralelogramo (Proposição 41). Logo, o paralelogramo FECG é igual ao triângulo ABC e o ângulo CEF é igual ao ângulo dado D. É isso que se devia construir.

<u>Proposição 10</u> (problema): Dividir em duas partes iguais uma linha reta limitada.

<u>Proposição 23</u> (problema): Em um ponto de uma linha reta dada formar um ângulo igual a outro ângulo dado.

<u>Proposição 31</u> (problema): De um ponto dado desenhar uma linha reta paralela a outra linha reta dada.

A proposição abaixo impõe mais uma condição sobre a figura ser construída: que ela seja <u>aplicada a um segmento dado</u>, isto é, especifica um dos lados da figura.

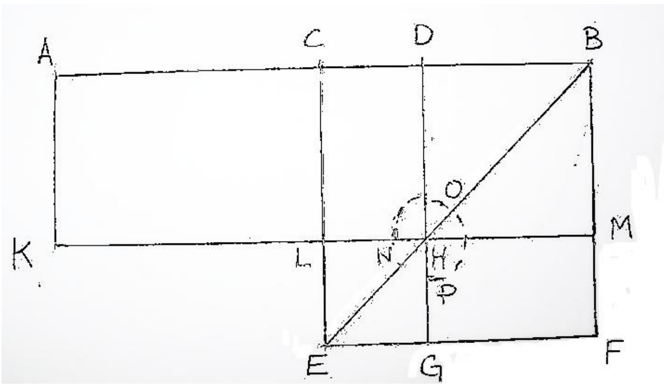
Proposição 44 (problema): Sobre um linha reta dada, construir um paralelogramo, igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro ângulo dado. (problema). (Estudar a construção de Euclides)

A partir de agora podemos “transformar” qualquer polígono em um paralelogramo, decompondo-o em triângulos e aplicando repetidamente as proposições 42 e 44.

Proposição 45 (problema): Construir um paralelogramo igual a uma figura retilínea qualquer dada, e com um ângulo igual a outro ângulo dado. (Estudar a construção de Euclides)

Em particular se o ângulo dado for reto, o que foi feito acima mostra como transformar qualquer polígono em um retângulo. Se se consegue transformar este retângulo em um quadrado, se terá resolvido o problema de fazer a quadratura de qualquer polígono. Para isso, necessitamos de três proposições que estão no **Livro II**:

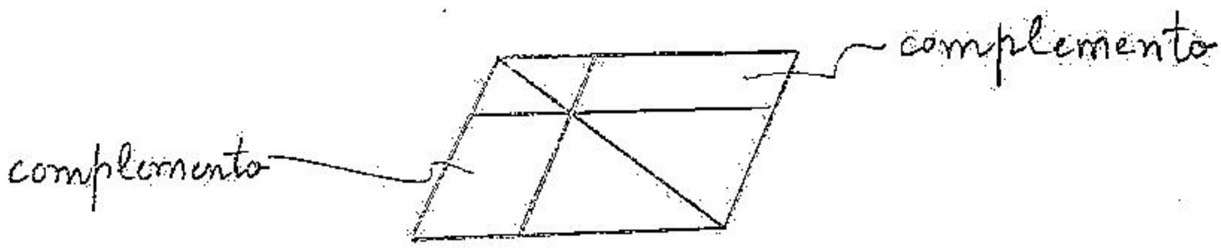
Proposição 5: Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais, e em outras desiguais, o retângulo compreendido pela partes desiguais, juntamente com o quadrado da parte entre as duas seções, será igual ao quadrado da metade da linha proposta.



Seja a reta AB dividida em partes iguais no ponto C, e em partes desiguais no ponto D. Eu digo que o retângulo das retas AD, DB juntamente com o quadrado de CD, é igual ao quadrado CB.

Com efeito, sobre CB construa o quadrado CEFB (Prop.46.I), e tirada a reta E, pelo ponto D tire-se DG paralela (Prop.31.I) a CE ou BF, e elo ponto H a reta KM paralela a CB, ou EF, e pelo ponto A a reta AK paralela a Cl, ou BM. Sendo s complementos CH (CLHD), HF(HGFM) iguais (Prop.43.I). A cada um destes complementos adicione o quadrado DM(DHMB). Então CM(CLMB) é igual a DF(DGFB). Mas CM(CLMB) é igual a AL(AKLC) (Prop.36.I), pois AC é igual a CB. Assim AL é igual a DF. Adicione o mesmo CH a AL e DF. Então AH(AKHD) é igual ao gnomon NOP. Mas AH é o retângulo AD, DB, pois DH é igual a DB. Então o gnomon NOP é também igual ao retângulo AD,DB. Adicionando a ambos LG(LEGH), que é igual ao quadrado sobre CD, o gnomon NOP juntamente com LG é igual a retângulo de lados AD e DB, juntamente com o quadrado sobre CD, é igual ao quadrado de CB. É isso que se devia demonstrar.

Proposição 43 – Livro I: Em qualquer paralelogramo os complementos dos paralelogramos, que existem ao redor da diagonal são iguais entre si.



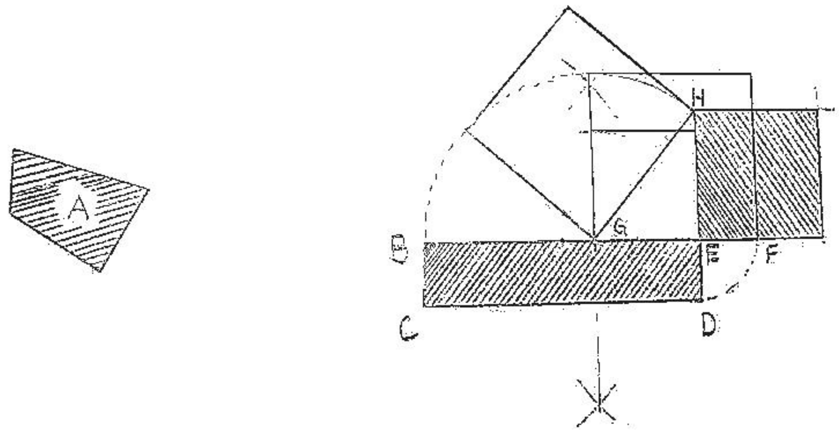
Obs.: Na proposição 5 acima, se fazemos m(AC)=a, m(CD)=b, temos:

$$(a+b)(a-b)+b^2=a^2 \leftrightarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Proposição 6: Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais e for prolongada, o retângulo compreendido pela reta toda e mais a adjunta e pela mesma adjunta, juntamente com o quadrado da metade da reta, será igual ao quadrado sobre a reta que se compõe da mesma metade e do prolongamento.

Proposição 14 (problema) (última proposição do Livro II): Construir um quadrado igual a uma figura retilínea dada (→a um polígono dado) [quadratura de um polígono qualquer].

(Construção)



Seja A um polígono dado.É preciso então construir um quadrado igual ao polígono A.

Construa o retângulo BCDE igual ao polígono dado. (Proposição 45 – Livro I)

Se os lados BE e ED forem iguais, o problema está resolvido. Se eles forem desiguais, marque F, sobre o prolongamento de BE, e tal que ED e EF sejam iguais. Divida BF em duas partes iguais pelo ponto G. Trace o semicírculo BHF e prolongue ED até H. Tire a reta GH. Como o segmento BF está dividido em duas partes iguais por G e em duas partes desiguais por E, então o retângulo de lados BE e EF, juntamente com o quadrado sobre GE é igual ao quadrado sobre GF (Proposição 5 – Livro II). Mas GF é igual a GH. Assim o retângulo de lados BE e EF juntamente com o quadrado sobre GE é igual ao quadrado sobre GH. Mas o quadrado sobre GH é igual aos quadrados sobre HE, EG (Prop47.I-Teorema de Pitágoras) Assim o retângulo de lados BE e EF, juntamente com quadrado sobre GE é igual aos quadrados sobre GE e sobre EH.

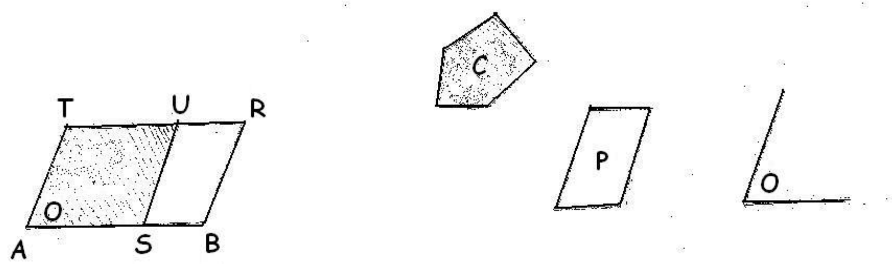
Retire o quadrado sobre GE, que é comum a ambos; portanto o retângulo de lados BE e EF é igual ao quadrado sobre EH. Mas o retângulo de lados BE e EF é o paralelogramo BD, pois EF é igual a ED. Mas BCDE é igual ao polígono dado.

Portanto o quadrado sobre EH é igual a polígono dado. É isso que se devia construir.

- Aplicação de áreas com falta e com excesso

* Aplicação de áreas com falta (aplicação elíptica)

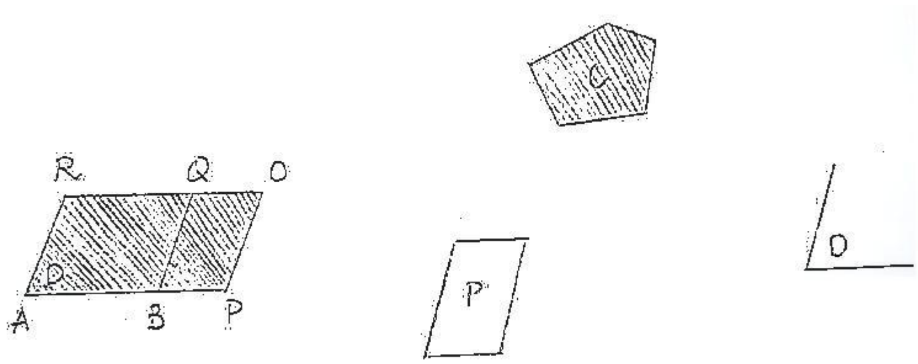
Aplicar a um segmento de reta AB, um paralelogramo, com um ângulo dado, igual a um polígono dado, e de tal maneira que "o que falta" para completar a figura a todo o segmento AB seja um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado.



O paralelogramo SBRU é o "que falta" para que o paralelogramo ASUT tenha AB como lado, isto é, esteja aplicado a AB.

* Aplicação de áreas com excesso (aplicação hiperbólica)

Aplicar a um segmento de reta AB, um paralelogramo, com um ângulo dado, igual a um polígono dado, e de tal maneira que ele "excede" o segmento AB por um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado.



O paralelogramo BPOQ é o "excesso" para que ABQR tenha AB como lado, isto é, esteja aplicado a AB.

Livro V

- Desde o início da geometria grega está presente a noção de semelhança e, portanto, a ideia de relação de grandezas. Os pitagóricos acreditavam que com os números (inteiros positivos) e as relações ente eles poderiam descrever todos os fenômenos, medir todas as coisas. O descobrimento pelos próprios pitagóricos da existência de quantidades incomensuráveis com a unidade deixou sem fundamento a teoria das semelhanças, ou seja, a teoria das proporções.

- Era preciso dar novo fundamento a esta teoria. Eudoxo de Cnido ((408 à 355 aC) (membro da Academia de Platão e fundador da Escola de Císico)) introduz formalmente a noção de grandeza (geométrica) (contínua) (os comprimentos, as áreas, os volumes (e também os ângulos e os arcos de círculo)) e a noção de relação entre duas grandezas homogêneas não precisando para isso que elas sejam comensuráveis.

- Ele define a igualdade de duas relações chamada proporção através de uma noção de ordem sobre as relações de grandezas, independentemente de toda a consideração numérica.

- Vejamos como Eudoxo através de Euclides estabeleceu essa formalização:

Livro V
(as seis primeiras definições)

DEFINIÇÕES

I. Uma grandeza se diz parte de outra grandeza, a menor da maior, quando a menor mede a maior.

II. A grandeza maior se diz múltipla da menor quando a menor mede a maior.

III. ~~A razão~~[1] entre duas grandezas, que são do mesmo gênero, é uma relação recíproca onde uma é maior, ou menor do que a outra, ou igual a ela (*isto é, a relação entre duas grandezas do mesmo gênero é uma relação entre o tamanho dessas duas grandezas*).

IV. As grandezas tem entre si ~~razão~~[1], quando a grandeza menor, tomada certo número de vezes, pode vencer a grandeza maior (*grandezas ditas arquimedianas*)

V. As grandezas têm entre si a mesma razão, a primeira para a segunda, e a terceira para a quarta, quando umas grandezas, quaisquer que sejam, eqüimúltiplas da primeira e da terceira a respeito de outras, quaisquer que sejam, equimúltiplas da segunda e da quarta, são ou juntamente maiores, ou juntamente iguais, ou juntamente menores.

VI. As grandezas que tem entre si a mesma razão, se chamam proporcionais.

As grandezas que tem o mesmo lógos são ditas em proporção.

[...]

Def.III: [1]. Um lógos

Def.IV: [1].Uma relação

Em linguagem atual, dadas duas grandezas de mesmo gênero A e B, existe uma relação de A para B sempre que houver números inteiros positivos m e n tais que: nA>B e mB>A.

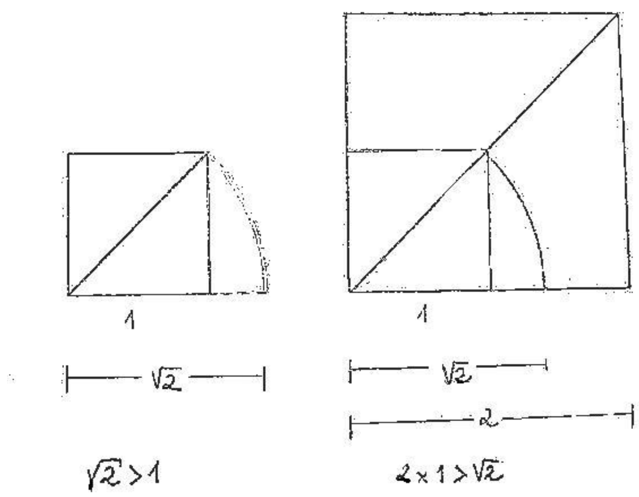
O passo seguinte foi comparar as relações existentes entre os pares e grandezas A,B e C,D (o gênero comum do par A,B e o gênero comum do par C,D não precisam ser os mesmos. Por exemplo: A,B podem ser duas áreas e C, D podem ser dois comprimentos)

Def.V: "As grandezas tem entre si o mesmo lógos, a primeira para a segunda, e a terceira para a quarta, quando quaisquer que sejam os equimúltiplos (iguais múltiplos) da primeira e da terceira (nA e nC) ou simultaneamente ultrapassam, ou são simultaneamente iguais, ou simultâneamente inferiores a quaisquer que sejam os equimúltiplos da segunda e da quarta (mB e mD), cada um a cada um, e tomados na mesma ordem".

Obs.: 1) Como a relação entre duas grandezas incomensuráveis não podia ser associada à razão de duas medidas, Eudoxo introduziu a noção de relação de grandezas, onde o conceito de relação tem uma natureza puramente geométrica, isto é, não estabelece uma razão entre partes. Assim, uma relação entre grandezas não é idêntica a uma razão entre números, ainda que a primeira inclua a segunda como caso particular quando as grandezas forem comensuráveis.

2) Visualização para a definição IV.

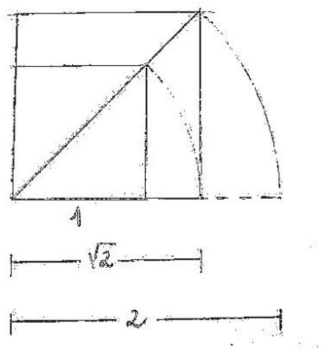
A diagonal do quadrado é maior do que seu lado e, por sua vez, é menor do que o dobro deste lado.



Assim, segundo a definição IV, o número 1 e $\sqrt{2}$ têm entre si uma relação.

3) Sobre a definição V.

Seja a figura abaixo:



Como estabelecer que as relações de 1 para $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{2}$ para 2 são as mesmas, isto é, que 1 está para $\sqrt{2}$ assim como $\sqrt{2}$ está para 2?

Resposta: *se para todo par de inteiros positivos m e n*

n1>m$\sqrt{2}$ e n$\sqrt{2}$ >m2 ou *n1<m*$\sqrt{2}$ e n$\sqrt{2}$ <m2

De fato, se n1>m$\sqrt{2}$, n1$\sqrt{2}$ >m$\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ =m2, e se n1<m$\sqrt{2}$, n1$\sqrt{2}$ <m$\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ =m2.

3^1) O segundo caso da definição V só é possível se A e B por um lado, e C e D por outro, forem comensuráveis.

3^2) A definição V também é apresentada da seguinte maneira:

A relação de A para B é igual a relação de C para D se, e somente, para todo par de inteiros positivos m e n,

nA>mB se, e somente se, nC>mD

e nA=mB se, e somente se, nC=mD

e nA<mB se, e somente se, nC<mD

- Compreensão da Definição V através do Teorema de Tales

Consideração (Def.1.X):

São ditas grandezas comensuráveis estas que são medidas por uma mesma medida (se possuem uma parte alíquota comum), e incomensuráveis, estas que não possuem medida comum.

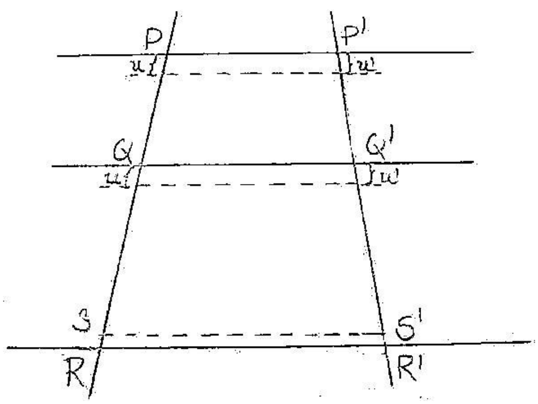
Em linguagem atual, sendo A, B grandezas de mesmo gênero, A e B são comensuráveis se possuem uma parte alíquota comum, isto é, se existe uma grandeza C do mesmo gênero que A e B tal que

$A=mC$ e $B=nC$ para m, n inteiros positivos.

Daí, podemos escrever $\frac{A}{B}=\frac{mC}{nC}=\frac{m}{n}$.

O que significa que se as grandezas A e B são comensuráveis, a relação A para B pode ser expressa mediante uma razão de números inteiros positivos.

Versão geral do Teorema de Tales(*): "Em um mesmo plano, um feixe de retas paralelas cortado por duas transversais forma sobre estas segmentos proporcionais".



(*) O nome "Teorema de Tales" aparece no final do século XIX no livro "Elementos de Geometria" de Rouché e Comberousse em 1883. Este nome é atribuído ao "teorema (geral) dos segmentos de reta proporcionais" ou "teorema das linhas proporcionais".

Se PQ e QR são comensuráveis, existe uma grandeza U tal que PQ=mU e QR=nU, m, n inteiros positivos, de modo que basta dividir PQ em m partes iguais e QR em n partes iguais e verificar que P'Q' e Q'R' também ficam divididos em m e n partes iguais, respectivamente. Assim,

$$\underbrace{\frac{PQ}{QR}}_{\substack{\text{PQ está}\\ \text{em relação}\\ \text{com QR}}} = \frac{P'Q'}{Q'R'} = \underbrace{\frac{m}{n}}_{\substack{\text{razão de}\\ \text{dois inteiros}\\ \text{positivos}}}, \text{isto é, } nPQ = mQR \ \rightarrow \ nP'Q' = mQ'R'$$

Para PQ e QR incomensuráveis

Dividimos PQ em m partes iguais a uma unidade de medida U de modo que PQ=mU(*). Ao longo de QR marcamos n segmentos U, perfazendo o segmento QS (QS=nU). Temos que:

$$\frac{PQ}{QS} = \frac{m}{n} \leftrightarrow nPQ = mQS$$

Pode ser que o ponto A esteja entre Q e R ou depois de R(**). Vamos supor a primeira destas hipóteses.

Daí, nPQ = mQS < mQR. Traçando a reta SS' paralela a reta PP', obtemos:

$$\frac{P'Q'}{Q'S'} = \frac{m}{n} \quad \leftrightarrow \quad nP'Q' = mQ'S'$$

Portanto,

$$nP'Q' = mQ'S' < mQ'R'$$

Fica provado que nPQ<mQR → nP'Q' < mQ'R'.

Da mesma maneira se demonstra que:

nPQ > mQR → nP'Q' > mQ'R' , para o ponto S depois de R.

Do que foi provado acima concluímos que:

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{P'Q'}{Q'R'}$$

(*) Ou seja, PQ é comensurável com a unidade U
(**) Ou seja, QR não é comensurável com a unidade U.

- Aspectos a serem ressaltados da teoria das proporções de Eudoxo:

- se a teoria eudoxiana das proporções se aplica a todas as grandezas, ela não permite, por ela mesma, de distinguir as grandezas incomensuráveis das outras.

- Eudoxo não trata a incomensurabilidade através da antifairese. Com isso, ele não pode analisar a estrutura das incomensuráveis.

- De fato, a Definição 5 não tenta determinar os incomensuráveis mas sim, dar os meios de se estabelecer, através de múltiplos, matematicamente, isto é, rigorosamente, a igualdade das relações que os envolve. Assim, para estudar os diferentes tipos de incomensurabilidade, a teoria eudoxiana não é adequada.

- Em um certo sentido, a teoria das proporções de Eudoxo "mascara' a ideia, mais ampla, de número real. De fato, a teoria das proporções de Eudoxo mostra a qual ponto os gregos compreenderam de maneira notável a dificuldade de definir o "contínuo". Esta teoria só será percebida, retomada e modificada, no século XIX por Dedekind, quando ele definirá de forma rigorosa o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ a partir do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$.

- Weierstrass e Dedekind – A construção dos números reais

* Reforma da Análise:

- origem nos trabalhos de Bernard Bolzano (tcheco – 1781 à 1848) e de Augustin-Louis Cauchy (francês – 1789 à 1857)[(*)].

- entretanto não existia uma teoria dos números reais até a segunda metade do século XIX.

[(*)] A transição do Cálculo para a Análise[(1)] ocorreu no século XVIII. Aplicado à solução de vários problemas em Ciências Naturais, o Cálculo, por volta de 1700, ainda era essencialmente orientado para a geometria. Tratava de problemas de curvas, empregava símbolos algébricos, mas as quantidades de que se utilizava eram principalmente tratadas como elementos e figuras geométricos. Durante a primeira metade deste século diminuiu-se o tratamento geométrico dos problemas, e os matemáticos passaram a se interessar mais pelos símbolos e pelas fórmulas do que pelas figuras. Com isso, a Análise passou a ser o estudo e a manipulação de fórmulas. Esta mudança estava ligada ao surgimento do conceito de "função". Entretanto, a questão dos fundamentos permanecia. Os matemáticos achavam que ela seria resolvida por meio de um argumento essencial a partir do qual se poderia continuar a estabelecer as construções e as demonstrações como antes, com a certeza de que tudo estava em ordem. Mas essa questão era mais delicada e só poderia ser resolvida com uma enfoque que mostrasse a consciência da necessidade de rigor em toda Análise não somente ao serem definidos os conceitos básicos, mas também nas demonstrações apresentadas.

Cauchy foi o responsável por essa mudança de atitude na Análise (ideias semelhantes foram desenvolvidas ao mesmo tempo por Bolzano, mas que não tiveram influência na época devido a seu isolamento em Praga).

[(1)]nome atribuído, em torno de 1800, especialmente depois de Euler, ao conjunto de disciplinas da Matemática que tratavam de processos infinitos(isto é, limites, séries, diferenciação e integração).

(continua na próxima página)

(continuação da nota extra da página anterior)

Cauchy apresentou seu novo enfoque sobre a Análise em se livro "Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique" (em Paris)(1821). Neste livro ele forneceu uma fundamentação completa dos conceitos do Cálculo e incluiu muitos exemplos de um novo tipo de raciocínio, especialmente em relação a problemas de convergência de sequências e séries. De fato, ele não conseguiu tornar rigorosos os princípios do Cálculo completamente. Outros matemáticos iriam dar continuidade a esse trabalho.

Cauchy formulou o principal objetivo de seu curso da seguinte maneira:

"Meu principal objetivo é reconciliar o rigor, que foi o princípio-guia de meu curso de análise (Cours d'analyse em francês) com a simplicidade a ser alcançada ao considerarmos diretamente as quantidades infinitamente pequenas".

As variáveis e seus limites são apresentados da seguinte maneira:

"Chamamos de quantidade variável aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente (...) Por outro lado, chamamos quantidade constante aquela que assume um valor fixo e determinado (...) Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado o limite de todos os outros (...) Indicaremos o limite para o qual converge determinada variável, pela abreviação "lim" escrita antes da variável em questão".

Aqui, Cauchy combina o conceito de limite com o conceito de função através de uma importante interpretação do termo "infinitamente pequeno", o que o capacitou de formular uma definição precisa de "continuidade". Eis sua interpretação de uma quantidade infinitamente pequena:

"Quando os valores numéricos sucessivos de uma variável diminuem indefinidamente de modo a tornarem-se menores que qualquer número dado, dizemos que a variável se tora "infinitamente pequena" ou uma quantidade infinitamente pequena. O limite de tal variável é zero" (identificando-a pela letra "i", tem-se lim i = 0). Vê-se por esta interpretação que uma quantidade infinitamente pequena não é zero, nem é uma quantidade constante menor do que qualquer quantidade finita, mas é uma variável que se aproxima de zero. A seguir, a partir da definição de quantidade infinitamente pequena dada acima, Cauchy define continuidade de uma função:

(continua na próxima página)

(continuação da nota extra da página anterior)

"Suponhamos que a função f(x) seja equivalente e finita para todos os valores de x entre dois limites dados (isto e, x varia em um intervalo aberto); então, se a diferença f(x+i)-f(x) for sempre infinitamente pequena entre esses limites, dizemos que f(x) é uma função contínua da variável x entre os limites em questão".

Exercício: Escreva a definição de continuidade acima em termos de limite.

Juntamente com Bolzano, Cauchy foi o primeiro a compreender que o conceito de continuidade necessitava de uma definição precisa. Com esta definição estabelecida, ele irá poder definir a função derivada como limite:

"Se a função y=f(x) for contínua entre dois limites dados da variável x, então, para qualquer valor de x dentro dos limites, um aumento infinitamente pequeno da própria função. Portanto, se dissermos que $\Delta x = i$, os dois termos da razão das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

serão quantidades infinitamente pequenas. Mas, enquanto que esses dois termos se aproximarão indefinidamente de zero, sua razão pode convergir para algum outro limite positivo ou negativo.

Esse limite quando existe, tem um valor definido para casa valor específico de x, mas varia com x. (...) Isso será verdadeiro em geral, mas a forma de nova função que serve como limite da razão $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá da forma da função inicial y=f(x). Indicamos essa dependência chamando a nova função de "função derivada", designando-a pelo uso de um apóstrofe na notação y' ou f'(x)" (devida a Langrage)

A continuidade de uma função está vinculada ao fato de que os matemáticos do século XVIII supunham que as funções fossem "bem comportadas", isto é, eles supunham que as variáveis eram contínuas em seus domínios. O que significava que eles supunham que as funções que estudavam eram sempre contínuas e , também, diferenciáveis (isto é, para funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, possuíam sempre derivadas). Essas noções vagas correntes levaram a ideias de que as funções continuas são diferenciáveis exceto possivelmente em uma quantidade finita de pontos. No século XIX descobriu-se que isso não era verdade; havia funções contínuas e não diferenciáveis. Isso, por sua vez, levou a um novo exame do conceito de função e ao estudo de funções descontínuas.

(continua na próxima página)

(continuação da nota extra da página anterior)

Cauchy desenvolveu um novo enfoque de rigor na Análise não somente pela definição dos conceitos fundamentais, mas também pelos detalhes nas demonstrações. Mas o problema básico a respeito do rigor, que precisava ser resolvido estava relacionado ao conceito de quantidade. No século XVIII ele ainda é essencialmente geométrico: a quantidade era exemplificada pelo "comprimento". O problema foi resolvido ao tirar-se do conceito de quantidade todas suas conotações geométricas e a definir quantidade como número real por sua vez, construído sobre os números inteiros e os números racionais. Essa definição completou um processo iniciado a partir o século XVII e que terminou no século XIX, através dos trabalhos de Weirstrass e Dedekind, com a separação da análise de qualquer base geométrica.

(fim das notas extras)

* Karl Weierstrass (alemão – 1815 à 1897)

- vai levar mais além o esforço de rigor iniciado por Bolzano e Cauchy.

- construir a Análise sobre a Aritmética → a chamada "aritmetização da Análise" (um programa).

- a expressão "uma variável se aproxima indefinidamente de um valor fixo" sugere tempo e movimento. Ela deve ser traduzida em desigualdades aritméticas: definição em termos de δ e ε da variação infinitamente pequena da variável e da função.

- "Se é possível determinar um raio δ tal que para todo valor de h menor em valor absoluto do que δ, $f(x+h)-f(x)$ seja menor do que uma quantidade ε, tão pequena quanto se queira, então se dirá que se faz corresponder a uma variação infinitamente pequena da variável uma variação infinitamente pequena da função" (→daqui saem as definições modernas de limite e continuidade)

- preconisa a introdução de um formalismo aritmético dado a Análise a forma que ela tem hoje.

Portanto, Weierstrass percebe a ausência de fundamentos lógicos na Aritmética quando tenta colocar a Análise sobre bases rigorosas.

* Richard Dedekind:

- princípios da análise infinitesimal estabelecidos através de um fundamento puramente aritmético e perfeitamente rigoroso.

- "Diz-se sempre que o Cálculo Diferencial se ocupa das grandezas contínuas e, no entanto, em nenhuma parte é dada uma explicação dessa continuidade". Demonstrações sobre a continuidade fazem uso de representações geométricas → não são demonstrações puramente aritméticas.

- ele toma o conjunto dos racionais como ponto de partida: "Eu suponho como base, a aritmética dos números racionais, suposta bem fundada e nada mais; e mostro que, sem a introdução de coisas estranhas, pode-se constatar no domínio dos números racionais um fenômeno que pode ser empregado para "completar" esse domínio".

- comparação dos números racionais com os pontos da reta (geométrica): sobre a reta se escolhe um ponto O origem, ou ponto zero e uma certa unidade de comprimento para medir as distancias. Com a ajuda dessa unidade, pode-se construir todos os números racionais com um comprimento correspondente e determinar um ponto correspondente.

- problema: existe sobre a reta uma infinidade de pontos não correspondendo a nenhum número racional → comprimentos incomensuráveis com a unidade.

- assim a comparação entre o domínio dos racionais e a reta levou a reconhecer que o primeiro é lacunar, é descontínuo, enquanto que a segunda é contínua. Em que consiste, pois, esta continuidade?

- fato físico: todo ponto da reta opera uma divisão desta em duas partes tais que todo ponto da primeira está à esquerda de todo ponto da segunda.

- Dedekind: a essência da continuidade a partir do fato acima.

Princípio:

"Se todos os pontos de uma reta a reparte em duas classes tais que todo ponto da primeira classe é situado à esquerda de todo ponto da segunda, esta partição em duas classes é operada por um e um só ponto."

↓

"criação" de novos entes pontuais

↓

"criação" dos números irracionais

↓

Dedekind introduz os cortes (em alemão: schnitt – corte)

- Fato: um número real corresponde a um corte feito no domínio dos racionais (segundo algum critério)

- Corte de Dedekind (Livro: "Continuidade e números irracionais" (1872))

Definição:

Um corte de Dedekind (ou simplesmente um corte) é um par ordenado (A_1, A_2) de conjuntos de números racionais tendo as seguintes propriedades:

i) $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$

ii) $A_1 \neq \emptyset$ e $A_2 \neq \emptyset$

iii) Todo número racional em A_1 é menor do que todo número racional de A_2

iv) A_2 não possui um menor número racional

Um corte pode ser descrito como uma partição do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ em subconjuntos A_1 e A_2 satisfazendo as condições de (i) à (iv). O conjunto A_1 é chamado classe esquerda e o conjunto A_2 é chamado classe direita do corte (A_1, A_2).

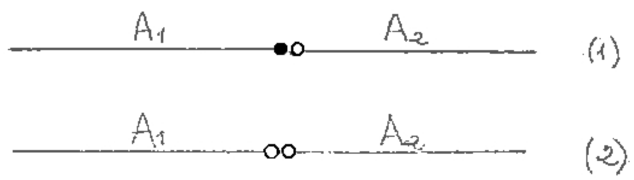
Em um corte existem duas possibilidades:

1) Existe em A_1 um racional maior do que todos os demais da classe.

2) Não existe em A_1 um racional máximo.

Na possibilidade (1) o corte é operado por um número racional. Na possibilidade (2) em que o corte não é operado por um número racional consiste o caráter incompleto do domínio dos números racionais. Diz Dedekind: "Cada vez que nós somos em presença de um tal corte, não produzido por um número racional, nós criamos um número novo irracional".

Visualmente:



Dedekind chama número real todo número associado a um corte, seja ele racional ou irracional. Ele define então o conjunto dos números reais como o conjunto dos cortes.

Nota: 1) A propriedade (i) assegura que nenhum número racional escapa à classificação.

2) A propriedade (ii) assegura que os números racionais não estão todos no mesmo conjunto.

3) A propriedade (iii) mostra que nenhum número racional pode estar em ambos os conjuntos.

4) A propriedade (iv) diz que por definição A_2 não possui mínimo.

* A teoria das proporções de Eudoxo e a teoria dos cortes de Dedekind

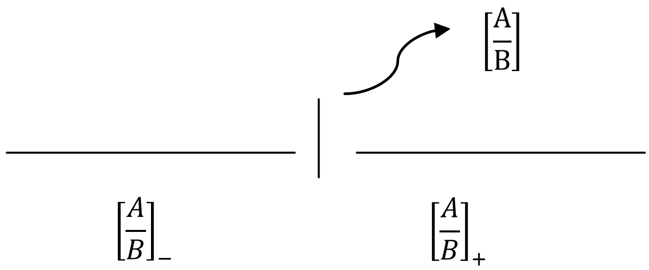
- Dedekind elaborou a teoria dos cortes (→ teoria dos números reais) inspirado na Definição 5 do Livro V dos Elementos de Euclides.

- "(...) e se interpretamos número real como relação (→ razão) de duas grandezas, há de se convir que tal interpretação já aparece de maneira bem clara na célebre definição dada por Euclides sobre igualdade de razões (Definição 5- Livro V dos Elementos). Aí reside a origem de minha teoria".

- Vamos entender esta afirmação de Dedekind. A semelhança entre as teorias de Eudoxo e de Dedekind é clara.

De fato, pois no contexto da Definição 5 do Livro V temos:

Se A e B são grandezas homogêneas, a relação $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ produz uma partição no conjunto dos números racionais positivos (das frações $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ com m, n inteiros positivos). Assim,



onde $\mathrm{A}_1 = \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right]_- \cup \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right]$ e $\mathrm{A}_2 = \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right]_+$

com $\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right]_- = \left\{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}; \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} < \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right\}$ (as frações $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ deste conjunto são aproximações por falta).

$\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right] = \left\{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}; \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right\}$ (se aqui A e B são incomensuráveis, este conjunto é vazio)

$\left[\frac{A}{B}\right]_+ = \left\{\frac{m}{n}; \frac{m}{n} > \frac{A}{B}\right\}$ (as frações $\frac{m}{n}$ deste conjunto são aproximações por excesso)

Se A e B são comensuráveis, então $\left[\frac{A}{B}\right] \neq \emptyset$ e A_1 tem máximo, que é $\frac{m}{n} = \frac{A}{B}$ (possibilidade 1).

Se A e B são incomensuráveis, então $\left[\frac{A}{B}\right] = \emptyset$ e A_1 não tem máximo (possibilidade 2).

Ou seja, a definição 5 de Eudoxo exige que consideremos todas as frações $\frac{m}{n}$ e com elas façamos "testes" para saber se $\mathrm{n}A > mB \; ou \; nA = mB \; ou \; nA < mB$. Isto leva a uma separação das frações em duas classes: a classe A_1 das frações $\frac{m}{n}$ tais que $\mathrm{nA} \geq \mathrm{mB}$ e a classe A_2 das frações $\frac{m}{n}$ tais que $\mathrm{n}A < mB$. Podemos fazer outra separação das frações, agora com as grandezas homogêneas C e D. Assim, igualmente, teremos duas outras classes: A'_1 das frações $\frac{m}{n}$ tais que $\mathrm{mC} \geq \mathrm{mD}$ e A'_2 das frações $\frac{m}{n}$ tais que $\mathrm{n}C < mD$. Dedekind percebeu que na definição a igualdade das relações $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ dada por Eudoxo correspondia a coincidência das classes A_1 e A'_1 e das classes A_2 e A'_2. Ou seja, no fundo a definição de Eudoxo associa a cada relação $\frac{A}{B}$ um par de classes de frações (A_1, A_2) que Dedekind chama de <u>corte</u> e utiliza para definir número real.

<u>Exemplo</u>: O corte que define o número real irracional $\sqrt{2}$ é o par de classes $A_1 = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+; \left(\frac{m}{n}\right)^2 < 2\right\}$ (→as raízes quadradas de 2 por falta) e $A_2 = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+; \left(\frac{m}{n}\right)^2 > 2\right\}$ (as raízes quadradas de 2 por excesso).

De fato:

Propriedade (i): vimos que não existe numero racional cujo quadrado é igual a 2. Assim A_2 contém todos os números racionais que não estão em A_1. Daí, cada número racional está em A_1 ou em A_2;

Propriedade (ii): como A_1 contém todos os números racionais negativos, por exemplo, $A_1 \neq \emptyset$. Como, por exemplo, $5 \in \mathbb{Q}$ e $5^2 = 25 > 2$, $5 \in A_2$ e, então $A_2 \neq \emptyset$.

Propriedade (iii): desde que A_2 contém somente números racionais positivos cujo quadrado é maior do que 2 e A_1 contém todos os números racionais não-positivos com os números racionais positivos cujos quadrados são menores do que 2, segue que todo elemento de A_1 é menor do que todo elemento de A_2.

Propriedade (iv): seja $x \in A_2$. Daí, $x^2 > 2$. Defina $y = x - \frac{x^2-2}{2x}$ $\left(= \frac{x^2-2}{2x} > 0\right)$.Então $0 < y < x$ e $y^2 = x^2 - 2x\frac{(x^2-2)}{2x} + \left(\frac{x^2-2}{2x}\right)^2 = x^2 - x^2 + 2 + \left(\frac{x^2-2}{2x}\right)^2 = 2 + \left(\frac{x^2-2}{2x}\right)^2 > 2,\ pois\ \left(\frac{x^2-2}{2x}\right)^2 > 0$. Logo, $0 < y < x\ e\ y^2 > 2$. Consequentemente, A_2 não tem mínimo. Além disso, seja agora $x \in A_1$, x positivo $(x \in \mathbb{Q}_+)$. Daí, $x^2 < 2$. Defina $y = \frac{2(1+x)}{2+x}$.

Então $0 < x < y$, pois $y - x = \frac{2(1+x)}{2+x} - x = \frac{2-x^2}{2+x} > 0 \leftrightarrow y > x\ e\ y^2 < 2$, pois $2 - y^2 =$

$$= 2 - \frac{4(1+x)^2}{(2+x)^2} = \frac{2(2+x)^2-4(1+x)^2}{(2+x)^2} = \frac{8+8x+2x^2-4-8x-4x^2}{(2+x)^2} = \frac{2(2-x^2)}{(2+x)^2} > 0 \leftrightarrow 2 - y^2 > 0 \leftrightarrow$$

$2 > y^2$.

Consequentemente, A_1 não tem máximo, isto é, não existe em A_1 um racional maior do que todos os demais racionais da classe.

É importante ressaltar que, se é próprio da Álgebra colocar em evidência e utilizar estruturas, o trabalho de Eudoxo ao assegurar as propriedades algébricas das proporções, respeitando uma relação de ordem, se coloca dentro do pensamento algébrico. Com isso, o fato de que Dedekind ao criar os "cortes" encontre equivalente na teoria das proporções de Eudoxo, não é por acaso. Eles procuravam resolver a mesma questão. Independentemente do formalismo utilizado, a matéria matemática foi a mesma.

* Outra consequência das definições de relação e de proporção no Livro V, de grande importância para <u>excluir o infinito do raciocínio geométrico</u>, é a Proposição 1 d Livro X, com a qual se pode estabelecer uma conexão entre a Teoria das Proporções e o Método de "Exaustão" também de Eudoxo:

<u>Proposição 1</u>: Duas grandezas desiguais sendo propostas, se da maior se retira mais que sua metade, e do que restou uma grandeza maior do que suas metade, e continuando sempre assim, (então) restará uma grandeza menor do que a grandeza menor dada.

- Desta proposição "intuitivamente evidente", podemos destacar dois aspectos interessantes:

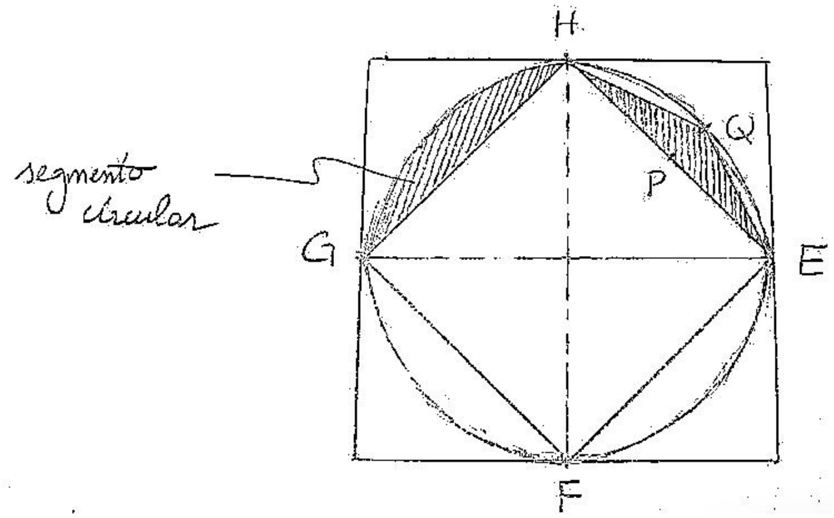
1- neste resultado está subentendido a formulação da ideia de limite <u>sem fazer uso do infinito</u>, o que permitirá se trabalhar geometricamente sobre os círculos e segmentos de curvas sem ter que considerá-los como "polígonos de infinitos lados".

2- esta proposição reafirma a abrangência da matemática grega, pois apesar dela parecer evidente, os gregos viram que <u>não só era possível como necessária uma demonstração</u>, mostrando assim uma desconfiança em todo conhecimento obtido por meio dos sentidos.

Vamos, antes de demonstrá-la, ilustrar seu significado.

Consideremos o seguinte caso:

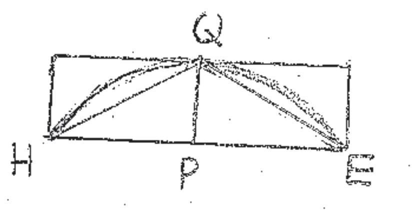
Seja C um círculo onde está inscrito um quadrado.



É fácil ver que a área do quadrado é maior do que a metade da área do círculo:

$$\text{Área}\ (\Diamond) = \tfrac{1}{2}\ \text{área}\ (\square) > \tfrac{1}{2}\ \text{área}\ (\bigcirc)$$

Consideremos agora a grandeza diferença entre o círculo e o quadrado HEFG formada por quatro segmentos circulares. Se em cada um destes segmentos inscrevemos um triângulo como na figura abaixo, temos:



$$\text{Área}(\triangle) = \tfrac{1}{2}\ \text{área}\ (\square) > \tfrac{1}{2}\ \text{área}\ (\frown)$$

Formamos assim um octógono regular inscrito no círculo. Se repetirmos este processo obteremos um polígono de 16 lados, de 32 lado e assim sucessivamente, de maneira que em cada passo o que é "ocupado" da grandeza inicial é uma quantidade maior do que a metade dessa grandeza, e que pela proposição acima a diferença entre o círculo e os sucessivos polígonos se pode fazer menor do que qualquer grandeza dada. Isto nos permite tratar o círculo por meio dos polígonos inscritos sem a necessidade de considerá-lo como um polígono de infinitos lados, pois que a diferença entre o círculo e o polígono se pode fazer tão pequena quanto se queira, conferindo assim o rigor necessário ao raciocínio geométrico ao excluir o uso do infinito.

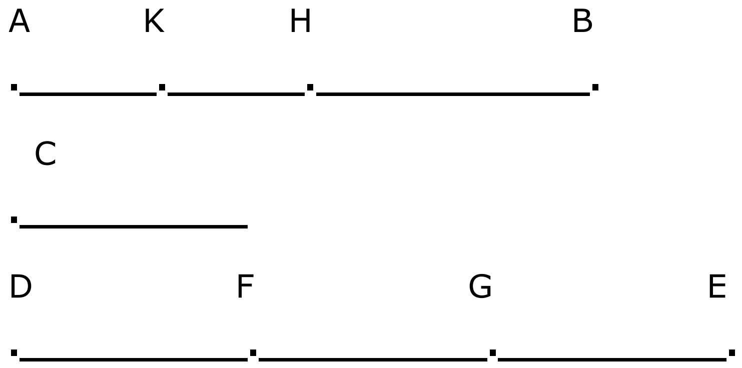
- Um resultado importante decorrente:

Seja X uma figura qualquer e C um círculo tais que $X < C$. Consideremos a grandeza $C - X$. Podemos inscrever no círculo polígonos com 2^m lados, $m \geq 2$, com um número cada vez maior de lados de modo que a diferença entre o polígono e o círculo seja menor do que $C - X$, isto é, $C - P(2^m) < C - X \leftrightarrow X < P(2^m)$.

Daí, $X < P(2^m) < C$.

Assim, dadas duas grandezas homogêneas C e X, podemos encontrar uma outra grandeza $P(2^m)$ compreendida entre ambas. O que dá uma ideia "aproximada" da noção de continuidade das grandezas. Este resultado tem uma importância especial nas demonstrações pelo método dito de "exaustão".

<u>Demonstração da Proposição 1</u>:



Sejam duas grandezas desiguais AB, C; onde AB é a maior; eu digo que, se de AB é retirada uma grandeza maior do que sua metade, e depois do resto uma grandeza maior do que sua metade, e que isto seja sempre perseguido, uma certa grandeza restará, a qual será menor do que a grandeza C.

Com efeito, C sendo multiplicada será a um certo momento maior do que AB (Definição V.4). Que ela seja multiplicada e seja DE o múltiplo de C maior do que AB, e que DE seja dividida em grandezas DF, FG, GE iguais a C, e de uma parte que de AB seja retirada BH, maior do que sua metade, de outra parte de AH, HK, maior que sua metade, e que isto seja sempre perseguido até que as divisões em AB sejam iguais em quantidade as divisões de DE.

Sejam então as divisões AK, KH, HB iguais em quantidade e as divisões DF, FG, GE. E, pois que DE é maior do que AB, e que de uma parte de DE é retirada EG menor do que sua metade, de outra parte de AB, BH maior do que sua metade, o resto GD é então maior do que o resto HA. E, pois que GD é maior do que HA e que de uma parte de GD é retirada a metade GF, de outra parte de HA, HK maior do que sua metade o resto DF é então maior do que sua metade, o resto DF é então maior do que o resto AK. Ora DF é igual a C; então C é maior do que AK; AK é então menor do que C.

Da grandeza AB resta então finalmente a grandeza AK, menor do que a menor grandeza proposta C. É isso que se devia demonstrar.

- <u>O raciocínio por "exaustão" e a teoria das proporções </u>(Livro XII)

<u>Proposição 2</u>: Os círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros. (demonstração, em linguagem atual, por duplo raciocínio por absurdo)

Euclides deseja estabelecer que $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}'} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}'^2} \left(\leftrightarrow \frac{\text{área}(\mathrm{C})}{\text{área}(\mathrm{C}')} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}'^2}\right)$. Ele supõe que isto não acontece. Dois casos são então possíveis:

1º - Seja $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}'^2}$ com $S < C'$ (C′ − S é uma grandeza)

(existe uma grandeza S → existência de uma quarta proporcional)

Podemos, pela Proposição 1 do Livro X, inscrever no círculo C′ um polígono P′ com 2^m lados, $\mathrm{m} \geq 2$, tal que

$$\mathrm{C}' - \mathrm{P}'(2^{\mathrm{m}}) < \mathrm{C}' - \mathrm{S} \leftrightarrow \mathrm{P}'(2^{\mathrm{m}}) > S.$$

Consideremos, alem disso, um polígono $\mathrm{P}(2^{\mathrm{m}})$, $\mathrm{m} \geq 2$, semelhante inscrito no círculo C.Logo, como $\mathrm{P}(2^{\mathrm{m}})$ e $\mathrm{P}'(2^{\mathrm{m}})$ são semelhantes, $\frac{\mathrm{P}(2^{\mathrm{m}})}{\mathrm{P}'(2^{\mathrm{m}})} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}'^2}$.

Daí, $\frac{\mathrm{P}(2^{\mathrm{m}})}{\mathrm{P}'(2^{\mathrm{m}})} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}}$ ou $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{P}(2^{\mathrm{m}})} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{P}'(2^{\mathrm{m}})}$. Mas $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{P}(2^{\mathrm{m}})} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{P}'(2^{\mathrm{m}})}$ com $\mathrm{C} > \mathrm{P}(2^{\mathrm{m}})$, implica que $\mathrm{S} > \mathrm{P}'(2^{\mathrm{m}})$.

De onde a contradição. Consequentemente, $\mathrm{S} \nless \mathrm{C}'$.

2º - Seja $\frac{C}{S} = \frac{d^2}{d'^2}$ com $S > C'$ (S – C' é uma grandeza). Com raciocínio equivalente, demonstramos que $S \ngtr C'$. Finalmente, S=C'.

<u>Obs.</u>: 1) O método de exaustão, pelo seu duplo raciocínio por absurdo, evita toda consideração infinita/infinitesimal. Entretanto, ele apresenta um problema; ele não é generalizável. De fato, o método de exaustão não é uma técnica de cálculo, mas sim um <u>procedimento de verificação</u> a partir de um valor dado, quase sempre obtido de maneira <u>heurística</u>(*)(do grego <u>eurisco</u> – encontrar) por tentativas sucessivas Por isso, os geômetras gregos repetiam a mesma forma de demonstração em cada caso particular e ignoravam a analogia entre eles.

2) O método de exaustão permitiu aos geômetras gregos resolver os problemas de quadratura que levaram no século XVII ao Cálculo Infinitesimal/Integral.

3) O método de exaustão é fundado sobre o "axioma de Arquimedes".

(*) um termo de caráter didático que significa <u>a arte de inventar, de fazer descobertas.</u>

Livro X

Este livro trata da distinção entre dois tipos de grandezas: as exprimíveis e as irracionais em termos de incomensurabilidade com uma reta considerada como elemento de referência.

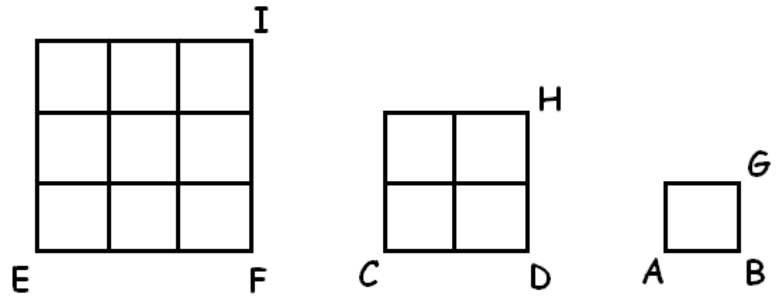
O incomensurável (com uma dada qualquer grandeza-padrão) tinha para Platão uma importância excepcional. Era uma grandeza não calculável e no entanto real (a relação entre a diagonal e o lado do quadrado); algo que só se compreende por sua noção inteligível; algo que, pela experiência sensível, não pode ser dado e sem o qual a ideia de número não seria compreendida em sua plenitude. Euclides, platônico, foi cuidadoso na execução do considerado, nos comentários antigos, mais bonito livro dos Elementos. Cuidado esse fundamental para que ele pudesse atingir seu propósito: escrever o Livro XIII que trata da construção dos poliedros regulares. Euclides vai dar um novo entendimento a este problema identificando categorias para a comensurabilidade e a incomensurabilidade. Inicialmente, ele estabelece as seguintes definições:

Definição 1: Grandezas comensuráveis (em grego simmetroi) são essas que são medidas por uma mesma medida (em grego simmetron - comensurável).

Definição 1’: E as grandezas incomensuráveis (em grego assimetroi) são essas que não tem nenhuma medida comum (em grego assimetron – incomensurável)

Definição 2: As linhas retas (segmentos de retas) são comensuráveis em potência (em grego dinámei), quando os quadrados (descritos) sobre elas são medidos por uma mesma área.

Explicação:



Os segmentos AB e CD são comensuráveis em potência, pois seus quadrados AG e CH podem ser medidos por uma mesma área AG. Igualmente os segmentos CD e EF são comensuráveis em potência, pois seus quadrados CH e EI podem ser medidos pela mesma área AG.

Numericamente, um segmento de 3 unidades de comprimento e um outro de 6 unidades de comprimento, serão comensuráveis em potência pois 9 e 36 podem ser medidos por uma mesma área. Também um segmento tendo 2 unidades de comprimento e um outro valendo $\sqrt{8}$ serão comensuráveis em potência, pois seus quadrados 4 e 8 são medidos por uma mesma área. Além disso, um segmento com $\sqrt{\sqrt{20}}$ de comprimento, e um outro com $\sqrt{\sqrt{125}}$ de comprimento serão também comensuráveis em potência, porque seus quadrados $\sqrt{20}$ e $\sqrt{125}$ são medidos por uma mesma área $\sqrt{5}$, pois ela está duas vezes em $\sqrt{20}$ $\left(2\sqrt{5} = \sqrt{4\text{x}5} = \sqrt{20}\right)$ e cinco vezes em $\sqrt{125}$ $(5\sqrt{5} = \sqrt{25\text{x}5} = \sqrt{125})$.

Notando por $\mathfrak{C}$ a relação "ser comensurável", escreve-se, para A e B grandezas, A$\mathfrak{C}$B quando as grandezas A e B são comensuráveis uma com a outra, e A$\not\mathfrak{C}$B caso contrário.

Para dois segmentos A e B comensuráveis <u>em comprimento</u>, temos A$\mathfrak{C}$B. Eles são comensuráveis <u>em potência</u>, quando $A^2\mathfrak{C}\,B^2$.

Obs.: 1) $A^2 \mathfrak{C} B^2$ não implica $A \mathfrak{C} B$, ou seja, podemos ter $A^2 \mathfrak{C} B^2$ e $A \not\mathfrak{C} B$

2) $A \mathfrak{C} B$ implica $A^2 \mathfrak{C} B^2$

Definição 2’: Os segmentos de reta incomensuráveis em potência, são esses dos quais seus quadrados não tem alguma área comum que os possa medir.

Explicação:

Um segmento de reta de 2 unidades de comprimento e um outro com $\sqrt{\sqrt{6}}$ de comprimento, não são comensuráveis em potência, pois não existe uma área que meça os quadrados 4 e $\sqrt{6}$. Do mesmo modo, dois segmentos de comprimento $\sqrt{8}$ e $\sqrt{\sqrt{12}}$ serão também incomensuráveis em potencia, pois nenhuma área mede os quadrados 8 e $\sqrt{12}$.

Definição 3: Com essas hipóteses, é evidente que a todo segmento de reta proposto, existem segmentos de reta, ilimitados em quantidade, comensuráveis ou incomensuráveis (com ele), uns em comprimento somente, outros também em potência. De uma parte então que o segmento de reta proposto seja chamado exprimível (em grego rêton) e, esses que são comensuráveis com ela, seja em comprimento e em potência, seja em potência somente, exprimíveis (em grego retaí); de outra parte que esses que são incomensuráveis com ele sejam chamados irracionais (em grego álogoi). (em grego arreton – inexprimível e alogon – irracional)

Definição 4: E que de uma parte seja chamado exprimível o quadrado descrito sobre o segmento de reta proposto e exprimíveis as áreas comensuráveis com este, irracionais de outra parte essas que são incomensuráveis com este e irracionais os segmentos de reta podendo os produzir: se se trata de quadrado, os lados eles mesmos, se se trata de certas outras figuras retilíneas, essas que descrevem os quadrados que são iguais a elas.

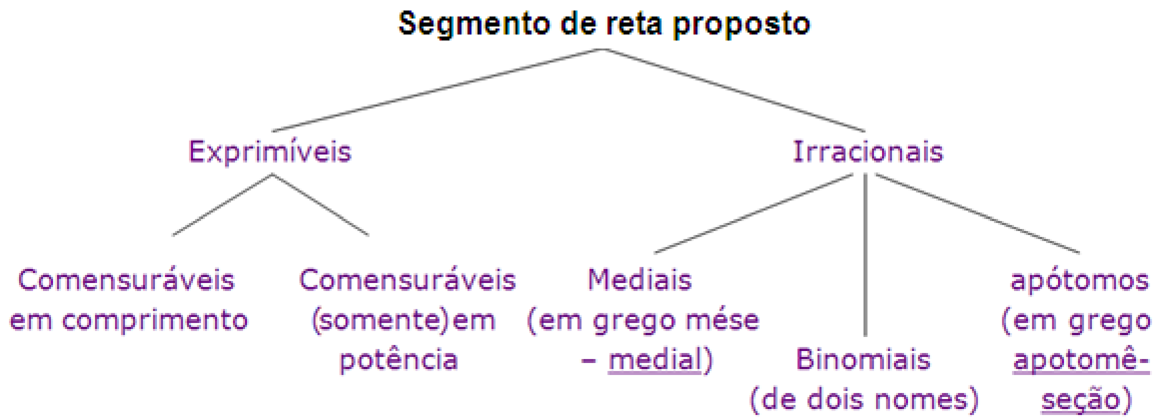
A partir destas definições, pelas proposições, Euclides estabelece uma classificação rigorosa de 13 espécies de segmentos de reta irracionais. A irracionalidade é definida em termos de incomensurabilidade com um segmento de reta considerado como elemento de referência. Assim, depois da Proposição 111, recapitulando, Euclides afirma: "(...) existe ao todo 13 irracionais quanto a ordem: medial binomial, primeiro bimedial, segundo medial, maior, segmento de reta podendo produzir um exprimível e um medial, segmento de reta podendo produzir dois mediais, apótomo, primeira apótomo de um medial, segundo apótomo de um medial, menor, segmento de reta produzindo com uma área exprimível um todo medial, segmento de reta produzindo com um medial um todo medial".

Vamos inicialmente definir, através de proposições, as três principais espécies.

Nota:

1) Pelas definições 3 e 4 observa-se que a teoria das quantidades irracionais de Euclides é muito diferente da visão geral de número estabelecida através da teoria dos números reais(*).

2) Quadro da primeira classificação dos segmentos de reta



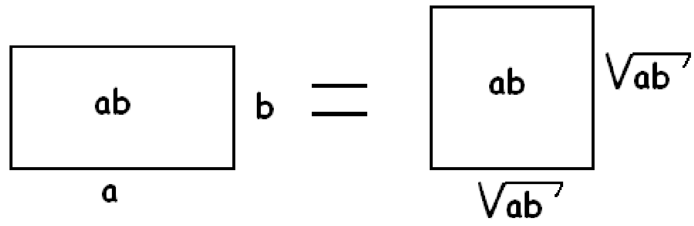
Por este quadro vê-se que a irracionalidade só começa se a incomensurabilidade subsiste após o critério da comensurabilidade em potência (→ grandezas elevadas ao quadrado).

<u>Proposição 21</u>: O retângulo compreendido sob dois segmentos de reta exprimíveis, comensuráveis em potência somente, é irracional e o segmento de reta cuja potência igual a esse retângulo será irracional; este segmento de reta será chamado <u>medial</u>.

(*) Assim, embora a palavra <u>rêton</u> possa também ser traduzida como <u>racional</u>, o sentido aqui não tem nada a ver com a ideia de número racional. Por isso alguns historiadores preferem como tradução a palavra <u>exprimível</u>.

Explicação:

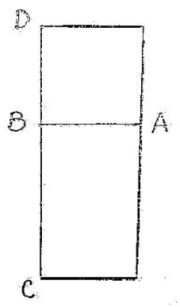
Sejam a e b os lados do retângulo, incomensuráveis em comprimento, mas comensuráveis em potência, isto é, $a \not{\mathcal{C}} b$ e $a^2 \mathcal{C} b^2$



ab é irracional pois
$ab \not{\mathcal{C}} a^2$ e $ab \not{\mathcal{C}} b^2$

$\sqrt{ab}$ é irracional pois $\sqrt{ab} \not{\mathcal{C}} a$ e $\sqrt{ab} \not{\mathcal{C}} b$.
O segmento de reta $\sqrt{ab}$ é chamado medial hoje é chamado média geométrica de a e b)

Assim, o comprimento chamado medial é por definição o lado de um quadrado cuja área é igual a área de um retângulo cujos dois lados são comensuráveis em potência somente.



Seja o retângulo AC, compreendido sob dois segmentos de reta exprimíveis AB e BC comensuráveis em potência somente. Eu digo que AC é irracional, e o lado do quadrado igual ao retângulo é irracional, e seja este lado chamado medial.

Pois se, sobre o exprimível AB, se define o quadrado AD, ele será exprimível. E, como AB é incomensurável em comprimento com BC, pois pela hipótese eles são comensuráveis em potência somente, como AB é igual a BD, BD é incomensurável em comprimento com BC. E como BD está para BC, AD está para AC, pois

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BDxAB}{BCxAB} = \frac{AD}{AC}$$

Então, AD é incomensurável com AC. Mas AD é exprimível, então AC é irracional, e o lado do quadrado igual a AC é também irracional. E seja esse lado chamado medial. É o que se devia demonstrar.

Proposição 36: Se se junta dois segmentos de reta comensuráveis em potência somente, sua soma será irracional e será chamada binomial.

Proposição 73: Se um segmento de reta exprimível for subtraído de um segmento de reta exprimível, comensurável com o todo em potência somente, o resto é irracional e será chamado um apótomo.

Essas três espécies são oriundas das ideias de Teeteto que distinguiu os irracionais mediais binomiais e apótomos tomando em consideração a construção das três médias "antigas". Assim,

- o irracional medial está relacionado à média geométrica.

- o irracional binomial está relacionado à média aritmética.

(pois $2\frac{x+y}{2} = x + y$)

- o irracional apótomo está relacionado à média harmônica

(pois $\frac{2xy}{x^2-y^2}(x - y) = \frac{2xy}{x+y}$)

A partir destas três espécies, Euclides classifica de forma sistemática os irracionais(*), cobrindo todo o domínio explorado até então.

Com a Proposição 36, inicia a exposição de 12 das 13 espécies de segmentos de reta irracionais, cada um dos quais soma ou diferença de dois segmentos e reta incomensuráveis em comprimento. O primeiro conjunto dos componentes irracionais são as raízes positivas de equações da forma $x^4 \pm 2\alpha r^2 x^2 \pm \beta r^4 = 0$, onde r é um segmento de reta exprimível e α, β são coeficientes. Essas raízes são:

$$x_1{}^2 = r^2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta})$$

$$x_{1*}{}^2 = r^2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta})$$

$$(x^4 - 2\alpha r^2 x^2 + \beta r^4 = 0)$$

$$x_2{}^2 = r^2(\sqrt{\alpha^2 - \beta} + \alpha) \qquad (x^4 - 2\alpha r^2 x^2 - \beta r^4 = 0)$$

$$x_{2*}{}^2 = r^2(\sqrt{\alpha^2 - \beta} - \alpha) \qquad (x^4 + 2\alpha r^2 x^2 - \beta r^4 = 0)$$

(*) Esta classificação se tornou necessária devido à quantidade crescente de grandezas incomensuráveis que forneciam as construções geométricas. Por isso, os historiadores da matemática acreditam que seu intuito maior seria o estudo das figuras regulares no plano e no espaço.

Hieronymous Zeuthen (dinamarquês – 1839 à 1920) propôs que os matemáticos gregos não associando valores numéricos a essa grandezas, mas as utilizavam como eles as tinham obtidos, sob a forma de segmentos de reta construídos geometricamente. Como esses segmentos se distinguem dificilmente, uma classificação se impunha.

Considerando, por exemplo, a equação $x^4 - 2\alpha r^2 x^2 + \beta r^4 = 0$, tem-se $x^2 = r^2\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right)$. Como x é um componente irracional que deve ser expresso como a soma ou a diferença de dois termos, $\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}}$ deve ser também expresso como a soma ou a diferença de dois termos. Chamando esses dois termos de a e b, deve-se encontrar a+b e a-b.(*)

Supondo que $a^2 + b^2 = \alpha$ e $2ab = \sqrt{\alpha^2 - \beta} \leftrightarrow 4a^2b^2 = \alpha^2 - \beta$.

Daí, como $(a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$, $(a^2 - b^2)^2 = \alpha^2 - (\alpha^2 - \beta) = \beta$ e $a^2 - -b^2 = \sqrt{\beta}$.

Considerando agora o sistema $\begin{cases} a^2 + b^2 = \alpha \\ a^2 - b^2 = \sqrt{\beta} \end{cases}$,

obtêm-se $a^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha + +\sqrt{\beta}\right)$ e $b^2 = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\beta})$.

Consequentemente, $x = a \pm b = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\beta}\right)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\beta}\right)}$. Logo:

$$x^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\beta}\right)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\beta}\right)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\beta}\right) \pm 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\beta}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\beta}\right)} = \alpha \pm 2\sqrt{\frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta)} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

que é, a menos de r^2, x_1^2 ou x_{1*}^2.

O segundo conjunto de componentes irracionais são as raízes positivas de equações da forma $x^4 \pm 2\alpha r^2 x^2 \pm \beta r^4 = 0$, onde r é um segmento de reta exprimível e α, β são coeficientes. Essas raízes são:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = r(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}) \\[2ex] x_{1*} = r(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}) \end{array}\right\rangle \quad (x^2 - 2\alpha r x + \beta r^2 = 0)$$

(*)Assim, x deve ser expresso como a+b ou a-b, isto é, x= a $\pm$ b

$x_2 = r(\sqrt{\alpha^2 - \beta} + \alpha)$ $\qquad (x^2 - 2\alpha rx - \beta r^2 = 0)$

$x_{2*} = r(\sqrt{\alpha^2 - \beta} - \alpha)$ $\qquad (x^2 + 2\alpha rx - \beta r^2 = 0)$

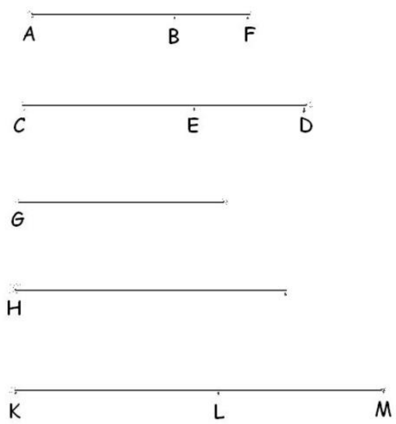
Todos estes resultados correspondem as proposições que vão da 36 à 111, como já foi dito. As proposições de 112 à 115 são equivalentes a critérios de "racionalização" de denominadores de frações do tipo $\frac{k}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ *ou* $\frac{k}{a\pm\sqrt{b}}$ *, com* $k \in \mathbb{Q}_+$. Vamos estudar a:

<u>Proposição 114</u>: "Se uma área é contida por um apótomo e um binomial cujos termos designados são ao mesmo tempo comensuráveis com os termos do apótomo e na mesma relação, o segmento de reta podendo produzir essa área é exprimível".

Sua demonstração é a seguinte:

Com efeito, que uma área, o retângulo contido por AB, CD seja contido pelo apótomo AB e o binomial CD cujo maior termo seja CE e que os termos CE, ED sejam, ao mesmo tempo, comensuráveis com os termos AF e FB do apótomo e na mesma relação, e que o segmento de reta podendo produzir o retângulo contido por AB, CD seja G (proposições 13 e 17 do Livro VI). Eu digo que G é exprimível.

Com efeito que seja proposto um segmento de reta exprimível H e que sobre CD seja aplicada uma área igual ao quadrado sobre H, produzindo KL, como largura, KL é então um apótomo; e que seus termos comensuráveis com os termos do binomial CE, ED e na mesma relação, sejam KM, ML.



Mas CE, ED são também comensuráveis com AF, FB e na mesma relação; então como AF é relativamente a FB, assim é KM relativamente a ML.

De maneira alterna então (Proposição 16 – Livro V) como AF é relativamente a KM, assim é BF relativamente a LM; e então o resto AB é comensurável com KL como AF relativamente a KM (Proposição 19 – Livro V).

Ora AF é comensurável com KM; então AB é também comensurável com KL. E como AB é relativamente a KL, assim é o retângulo contido por CD, AB relativamente a esse contido por CD, KL (Proposição 1 – Livro VI); então o retângulo contido por CD, AB é também comensurável com esse contido por CD e KL. Oras esse contido por CD, KL é igual ao quadrado sobre H; então o retângulo contido por CD, AB é comensurável com o quadrado H. Mas esse contido por CD, AB é igual ao quadrado sobre G; então o quadrado sobre G é comensurável sobre H; e o quadrado sobre H é exprimível, então o quadrado sobre G é exprimível; G é então exprimível. E ele pode produzir o retângulo contido por CD, AB. Então se uma área é contida por um apótomo e um binomial cujos termos designados são comensuráveis com os termos do apótomo e na mesma relação, o segmento de reta podendo produzir esta área é exprimível.

Os historiadores da matemática interpretam esta proposição como um critério de “racionalização” do tipo:

$$\left(\sqrt{\mathrm{a}}+\sqrt{\mathrm{b}}\right)\mathrm{k}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=k(\underbrace{a-b}_{=\left(\sqrt{\mathrm{a}}\right)^2-(\sqrt{\mathrm{b}})^2}),\quad com\ k\in\mathbb{Q}_+,$$

que corresponde na forma geométrica à igualdade:

$$\boxed{}(\underbrace{CE+ED}_{=CD},\ k(\underbrace{AF-BF}_{=AB}))=k(\underbrace{Q(CE)}_{\text{quadrado descrito sobre o segmento de reta CE}}-Q(ED))$$

$$=k\ \square\ (G),\quad G\text{ é exprimível}$$

Livro V

Proposição 16: Se quatro grandezas são proporcionais, elas serão também proporcionais alternativamente.

Proposição 19: Se uma grandeza for para outra grandeza, como uma parte daquela para outra parte desta, será o resto da primeira grandeza para o resto da segunda, como a primeira grandeza para segunda.

Livro VI

Proposição 1: Triângulos e paralelogramos que têm a mesma altura, estão um para o outro como suas bases.

Assim, o Livro X pode ser considerado como a coleção dos resultados que servem à solução de certos tipos de equações biquadráticas e quadráticas redutíveis que apareceram nos problemas até Euclides. Por outro lado, essa coleção concebida geometricamente e do ponto de vista geométrico, identifica manifestadamente a concepção grega (pelo menos até Euclides) da matemática como ciência exata quando tratada somente através da geometria.

<u>Uma síntese do pensamento matemático dos Elementos</u>

(ou a Álgebra entre a Aritmética e a Geometria)

- A Matemática tem dois objetos: os números (inteiros positivos) e as grandezas; a Aritmética e a Geometria.

- Combinação entre a Aritmética e a Geometria:

"Construir um quadrado cuja área é o dobro da área de um quadrado dado".

A Geometria garante a existência de um segmento, o lado de um quadrado dobro de um outro dado; a Aritmética permite mostrar que a relação entre os lados dos dois quadrados não é uma relação entre números inteiros positivos. Estes dois fatos indicam que não se pode tratar grandezas geométricas como grandezas aritméticas, mas também que essas duas grandezas possuem coisas em comum: pode-se combinar aritmética e geometria em uma mesma demonstração.

- <u>Aritmética e Geometria</u>

- Teoria comum à grandeza e ao número: <u>a teoria da medida</u>. Ela aparece quase a mesma nos Livros V e VII. A diferença básica é que no Livro V tem-se o Axioma de Arquimedes, e no Livro VII, a unidade.

- <u>Para as grandezas</u> (geométricas):

Definição da relação de medida: "uma grandeza é uma parte de uma outra, a menor da maior, quando a menor <u>mede</u> a maior."

"Grandezas têm uma <u>relação</u> entre elas, quando a menor repetida um certo número de vezes excede a maior" (Axioma de Arquimedes).

Para os números:

Definição da relação de medida: "Um número é uma parte de um número, o menor do maior, quando o menor mede o maior" (ser parte significa aqui ser divisor).

Aqui não existe o Axioma de Arquimedes. Entretanto, fala de unidade: um número é uma quantidade composta de unidades.

A comensurabilidade dos números é devida ao fato de que eles são compostos de unidades.

- Caracterização dessa teoria da medida que atravessa a divisão Aritmética/Geometria.

Inicialmente, para que se tenha uma medida, é necessário:

i) a adição;

ii) uma estrutura de ordem total compatível com a adição;

iii) o Axioma de Arquimedes.

Ou seja, modernamente, a partir daí, é necessário um semigrupo comutativo totalmente ordenado arquimediano.

Obs.: 1) Entes matemáticos mensuráveis podem ser muito diferentes um dos outros: inteiros positivos, comprimentos, áreas, volumes,... Mas todos têm em comum a estrutura algébrica acima.

Exemplo: Para que serve o Teorema de Pitágoras?

Serve para definir uma adição de áreas.

2) Em Euclides, o Axioma de Arquimedes permite definir a medida de uma grandeza g, a menos de uma unidade, por falta, quando uma grandeza significando a unidade (u) é escolhida: essa medida é dada pelo maior inteiro positivo n tal que $n.u \leq g$.

Ponto importante: a unidade é dada na Aritmética e é escolhida na Geometria.

3) A partir do fato de que tem-se a estrutura algébrica acima, demonstra-se que existe um único homomorfismo estritamente crescente h, $h:(G,+)\to(\mathbb{R},+)$, que associa uma grandeza qualquer u à 1,e que $\forall g \in G$, o valor de g por h, $h(g) \in \mathbb{R}$, será chamado <u>medida de g relativa à grandeza-unidade u</u>. Além disso, como este homomorfismo é estritamente crescente, se $g_1<g_2$, então $h(g_1) < h(g_2)$, equivalendo a dizer que g_1 e g_2 têm medidas diferentes em $\mathbb{R}$. Este teorema de "representação" é chamado <u>Teorema de Hölder</u> (Otto <u>Hölder</u>: alemão – 1859 à 1937).

O que dizer este teorema?

1. Uma vez fixada a grandeza-unidade, só se pode associar números reais de uma única maneira a todas as outras grandezas.

2. Sobre G: é possível medir qualquer elemento $g \in \mathbb{R}$, lhe associar de uma única maneira um número real, tal que as grandezas maiores terão medidas maiores e a soma de duas grandezas terá por medida a soma das medidas das grandezas, uma vez escolhida a grandeza-unidade (h é um homomorfismo: $h(g_1+g_2) = h(g_1) + h(g_2)$).

3. Sobre $\mathbb{R}$: <u>para medir as grandezas</u> (os elementos de G), tem-se necessidade de $\mathbb{R}$, e não somente de $\mathbb{Q}$ e de suas extensões quadráticas.

Razão de ser $\mathbb{R}$: a medida de grandezas, e não justamente a resolução das equações.

4. Aspecto interessante: a estrutura "grandeza" é independente da questão do caráter <u>discreto</u> ou <u>contínuo</u> do conjunto ordenado.

<u>Exemplo</u>: $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ são semigrupos comutativos totalmente ordenados arquimedianos.

Euclides, entretanto, não faz isso. Ele descreve duas vezes a mesma teoria, que não é jamais destacada e estudada por ela mesma. É quase a mesma teoria no Livro V e no Livro VII, mas Euclides não percebe. Algumas vezes ele demonstra o mesmo teorema, uma vez para as grandezas (geométricas), outra vez para os números (inteiros positivos), sem afirmar que é o mesmo teorema (e a mesma demonstração). Esta situação se explica pelo problema dos incomensuráveis, que faz com que a Matemática seja dividida em dois domínios separados, e impedindo de se elaborar uma teoria unificadora para os objetos estudados.

Fato: os matemáticos estudam objetos, e a Matemática é definida pelos seus objetos. Se os objetos são distintos, então as teorias são distintas, mesmo se elas se parecem.

Não se enquadra com a perspectiva hilbertiana: mesma teoria serve para coisas diferentes.

- Sobre a Aritmética em Euclides

- Algoritmo de Euclides (ou antifairese): para encontrar a medida comum.

Por que ele funciona? Fazer a subtração entre dois números preserva seus fatores comuns: se c é o fator comum de a e b, então ele é fator do "resto" a-b.

- Sobre o algoritmo

1. Dá a ideia de que existe uma apreensão disso que singularisa a estrutura algébrica do anel $\mathbb{Z}_+$ em relação aos outros aneis. Existe uma tentativa de caracterizar os números inteiros positivos por sua propriedade de divisibilidade. Esta caracterização é sempre utilizada hoje: o anel principal denominado anel euclidiano.

2. O algoritmo tem um fim?

Euclides demonstra que todo o número composto não pode ser medido por ilimitados números, cada um menor do que o outro (Proposição 31 - Livro VII), isto é, não há "descida infinita" para os números inteiros positivos. Assim, o algoritmo termina, porque estes números têm uma estrutura particular.

Entretanto, o algoritmo não termina quando duas grandezas são incomensuráveis: os incomensuráveis são por si só ligados à questão da natureza do infinito.

- O papel do algoritmo

1. Permite demonstrar o teorema de Gauss: "Se um número primo p divide o produto ab de números inteiros positivos, então ele divide necessariamente a ou b" (← Proposição 30 – Livro VII: Caso dois números, sendo multiplicados entre si, façam algum, e algum número primo meça o produzido deles, medirá também um dos do princípio).

2. Permite de demonstrar o Teorema Fundamental da Aritmética (unidade da decomposição em fatores primos)

3. Permite de demonstrar o teorema sobre a infinidade dos números primos (Proposição 20 – Livro IX).

- Álgebra e Geometria

- Álgebra: conjunto dos métodos comuns à Aritmética e à Geometria.
- Livro II dos Elementos: teoria das equações quadráticas (→ "produtos notáveis"), que deve ser interpretada como uma teoria de áreas do quadrado e do retângulo.

Ideia Fundamental: adição ou produto de um segmento por um número é um segmento, mas o produto de segmentos é uma área.

Exemplo: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ é uma (certa) decomposição da área de um quadrado de lado a+b, e não uma propriedade das "operações" de + e de x.

Assim, a resolução da equação do 2º grau é, no panorama dessa teoria, também interpretada geometricamente. Ou seja, não existe uma teoria algébrica das equações do 2º grau.

Nota: É Descartes que vai romper com esta ideia.

- Nos Elementos, os métodos comuns que caracterizariam tanto a Aritmética como a Geometria são interpretados geometricamente. A ideia parece ser que, desde que se tenha quadrados, pode-se ter incomensuráveis, e o problema não é aritmético. Essa interpretação geométrica preexiste sempre à equação o conceito de equação não é colocado em evidência.

- O contínuo

- Problema dos incomensuráveis: articulação Aritmética-Geometria.
- É porque existem radicais irracionais que se é obrigado de adotar uma leitura geométrica para os problemas envolvendo o 2º grau, e que não se pode desenvolver uma teoria algébrica.
- Modernamente: tem-se a sequência $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

  Sabe-se, sem dificuldade, definir $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$:

$\mathbb{N}$: via Axiomática de Peano.

$\mathbb{Z}$: Seja $\mathbb{N}$ munido da adição. Em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se considera a relação binária $\sim$ tal que $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$, $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Esta relação assim definida é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Diz-se que (a,b) e (c,d) são equivalentes.

Um número inteiro relativo é a classe de equivalência de um elemento $(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Construção dessa classe: Inicialmente, considera-se que o par (a,b) corresponde ao inteiro relativo ingênuo a-b. Em seguida, se reagrupa os pares que correspondem ao mesmo inteiro relativo.

Exemplo: $(2,3) \in$ classe de equivalência do par (1,2) que modelisa (que caracteriza) o número inteiro relativo $1-2 = -1$.

O conjunto dos números inteiros relativos é o conjunto quociente $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$, notado por $\mathbb{Z}$ (do alemão zahlen que quer dizer números).

$\mathbb{Q}$: Seja $\mathbb{Z}$ munido da multiplicação. Se define sobre o conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ a relação binária $\sim$ tal que $(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$, $(a,b), (c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$.

Esta relação assim definida é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}\times Z^*$.

Um número racional é a classe de equivalência de um elemento $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, notado(a) $\frac{a}{b}$.

Obs.: $\frac{a}{b}$ é só uma notação para designar o número racional do qual um representante é o par (a,b).

O conjunto dos números racionais é o conjunto quociente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$, notado por $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$: Como definir $\mathbb{R}$? Ou melhor, como definir um número real[(1)]?

Define-se $\mathbb{R}$ como um corpo comutativo totalmente ordenado arquimediano completo[(2)]. Pode-se dizer que um número real é um elemento deste corpo. Mas como definir um número real determinado, $\sqrt{3}$ por exemplo?

Essencialmente, através de dois métodos:

1) As frações contínuas

- Este método, embora não seja grego, e que será desenvolvido pelos árabes, ele se inscreve na aritmética euclidiana.
- O liame entre os incomensuráveis e o algoritmo de Euclides

Exemplos: 1. Aplicar o algoritmo à $\sqrt{2}$ e 1.

Tem-se: $\sqrt{2},1;\, 1,\sqrt{2}-1;\, 1-(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1, \ldots$

[(1)] O adjetivo "real" é utilizado para qualificar os números de um modo geral, desde o século XVII, a partir de matemáticos franceses, mas ele só é explicitamente definido por oposição aos números imaginários no fim do século XIX.

[(2)] Toda sequência de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$.

Como, após duas etapas, $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, se recai em um retângulo <u>semelhante</u> ao primeiro retângulo de lados $\sqrt{2}$ e 1: mesma relação entre os lados. De onde a <u>possibilidade de recomeçar ao infinito</u> (→ Proposição 2 - Livro X).

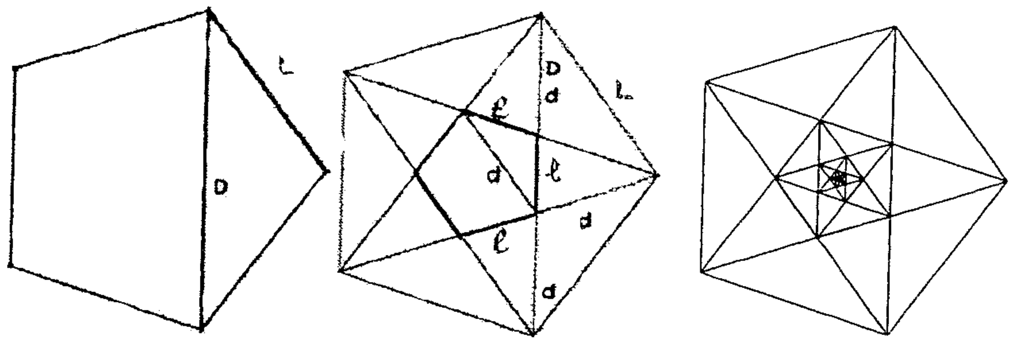
<u>Fato importante</u>: a ligação entre a teoria da semelhança e os incomensuráveis.

2. Aplicar o algoritmo à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e 1.

Tem-se: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 1; 1, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;...

Como, após somente uma etapa, $\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, se recai em um retângulo semelhante ao retângulo do qual se partiu.

<u>Observação especial sobre esse exemplo</u>: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a relação da diagonal com o lado do pentágono regular (rever páginas 133 e 141). Certamente, uma das primeiras manifestações da incomensurabilidade. Aqui, a incomensurabilidade se lê no agenciamento dos segmentos do pentágono.



Com D e L combinações lineares do lado l e da diagonal d do pequeno pentágono, isto é, D=2d+l e L=l+d, tem-se que d=D-L e l=2L-D. Por outro lado, como

$$\frac{D}{L} = \frac{d}{l}, \frac{D}{L} = \frac{D-L}{2L-D} \Leftrightarrow DL - D^2 = -L^2 \overset{\left(\times\frac{1}{L^2}\right)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{D}{L}\right)^2 - \frac{D}{L} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{D}{L} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{d}{l}.$$

Assim, vê-se uma repetição infinita das operações do algoritmo euclidiano, na figura sagrada dos pitagóricos. Esta repetição aparece como uma possibilidade de se repetir indefinidamente, sem parar, as operações prescritas pelo algoritmo de Euclides <u>em diferentes escalas</u>: uma ligação intrínseca entre os comensuráveis e o infinito.

<u>Nota</u>: <u>Aristóteles e o infinito</u>

Na sua obra "Física" – Livro III, Aristóteles estabelece duas noções de infinito:

<u>Infinito em potência</u>: infinito como possibilidade de se repetir uma operação (por exemplo, sucessor nos inteiros positivos, operações do algoritmo).

<u>Infinito em ato</u>: um objeto infinito, um conjunto infinito.

Aristóteles: infinito em ato é uma contradição. Entretanto, o infinito em potência não é um objeto, e pode ser admitido.

- Dificuldade de pensar os irracionais: <u>obriga a pensar o infinito como um dado</u>.

<u>Exemplo</u>: $\sqrt{2}$ <u>é dada</u> <u>por todas as etapas</u> do algoritmo de Euclides que não termina.

- A <u>definição antifairética dos irracionais</u> não é uma definição dos Elementos. Ela está ligada ao desenvolvimento das chamadas <u>frações contínuas</u>. A ideia é de definir os números irracionais partindo do algoritmo de Euclides, identificando-os <u>aos quocientes sucessivos</u> obtidos no curso deste algoritmo.

Exemplos:

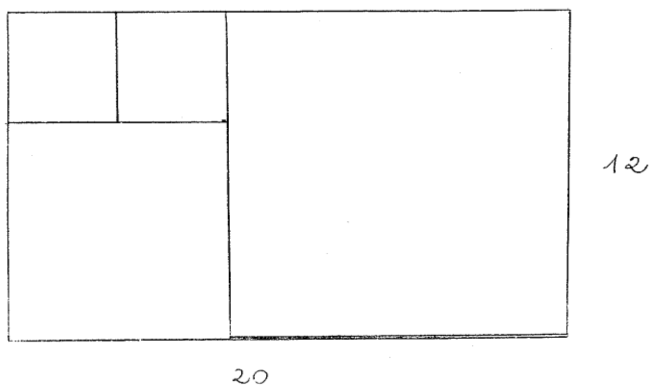
1. Para um número racional: $\frac{20}{12}$

$$\frac{20}{12}=1+\frac{8}{12}=1+\frac{1}{\frac{12}{8}}=1+\frac{1}{1+\frac{4}{8}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{8}{4}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

Notação: $\frac{20}{12}$=[1,1,2]

Interpretação geométrica:

Se pavimenta um retângulo de base 20 e de altura 12 por um quadrado de lado 12. Resta uma banda de altura 12 e de base 8. Em seguida, se percebe que é possível pavimentar esta banda restante com um quadrado de lado 8, e resta uma banda de base 8 e altura 4, pavimentada por dois quadrados de lado 4.



Neste caso, como a base e a altura do retângulo inicial são comensuráveis, a técnica de pavimentação conduz a uma fração contínua finita.

Fato importante: a inversão do resto, que o transforma em uma nova unidade.

No algoritmo de Euclides, se aproxima a grandeza por um número máximo de unidades nela contidas; existe um resto. Em seguida, se considera esse resto como a nova unidade, e se divide a antiga por ele; e se recomeça, até que se obtenha dois números divisíveis. Mesma ideia na notação em fração contínua: dividir a unidade pelo resto obtido, o que equivale a mudar de unidade, a extrair um sistema de unidades ligadas umas às outras.

Fato desestabilizante: o sistema de unidades não é escolhido a priori (base 10, base 2, etc).

Na notação de uma relação em fração contínua, as unidades utilizadas são adaptadas ao número a se exprimir, elas são produzidas pela aplicação do algoritmo. No exemplo de $\frac{20}{12}$:12, depois 8, depois 4.

2. Para um número irracional: $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1+1+\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\cdots}}$$

$\sqrt{2}$ = [1,2,2,...]

Interpretação geométrica:

Se constrói um retângulo de base a+b e altura b. O objetivo é de pavimentar o retângulo de quadrados de lado o maior possível. O maior lado possível para os primeiros quadrados é b, pois a altura é b. Como 2b<a+b<3b, pode-se construir dois quadrados de lado b. A banda restante é um retângulo de altura b e base a-b. Por sua vez, tem-se a proporção $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a-b}$ (*) que indica que o retângulo inicial e a banda são semelhantes.

(*) Se a é o comprimento da diagonal e b é o do lado de um quadrado, $a^2=b^2+b^2$ ($\Leftrightarrow a^2=2b^2$). Daí, $a^2-b^2=b^2 \Leftrightarrow (a+b).(a-b)=b.b$, isto é, a área de um quadrado de lado b(b^2) é igual a área de um retângulo cuja base e a soma da diagonal e do lado (a+b), e a altura a diferença da diagonal e do lado desse quadrado (a-b). Sob a forma de proporção, obtém: $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a-b}$.

Logo, pode-se pavimentar essa banda restante com exatamente dois quadrados de lado o maior possível, como precedentemente, e a nova banda restante é ainda um retângulo semelhante ao inicial. Finalmente, se obteve dois quadrados de lado b, depois dois quadrados de lado $\frac{a+b}{b}$ vezes mais pequenos que os precedentes, e a sequência não para jamais.

Definição de $\sqrt{2}$: É uma sequência infinita de inteiros positivos que são os restos dos quocientes parciais.

Quocientes parciais:

$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \longrightarrow$ resto 1

$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5} \longrightarrow$ resto 2

$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12} \longrightarrow$ resto 2

etc...

Interesse desta definição: mexe com a fronteira entre número e grandeza.

Consequência desta definição:

1. Admitir o infinito atual, e o tomar como ponto de partida da definição de um incomensurável;

2. Duas relações entre incomensuráveis são iguais se cada termo das sequências infinitas de inteiros positivos corespondentes são iguais.

2) A definição de Eudoxo no Livro V dos Elementos

- A possibilidade de uma grandeza poder ser múltipla de uma outra é fundamental para Euclides:

Definição 1: "Uma grandeza é uma parte de uma grandeza, a menor da maior, quando mede exatamente a maior."

Definição 2: "E a grandeza maior é um múltiplo da menor, quando for medida exatamente pelo menor."

- A partir daí, ele define o fato para duas grandezas, de ter uma relação uma com a outra:

Definição 4: "Grandezas são ditas ter uma relação uma relativamente a outra, quando elas são capazes, sendo multiplicadas, de exceder uma a outra" (hoje conhecida sob o de Axioma de Arquimedes).

Obs.: 1. Modernamente, define-se este axioma como:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}_+, \quad \exists n \in \mathbb{Z}_+, \quad na > b.$$

2. Esta definição corresponde a se poder colocar "em sequência", segmentos para se construir um segmento maior.

- Em seguida, Euclides enuncia a definição (de Eudoxo) relativa à identidade para a relação entre grandezas:

Definição 5: "Grandezas são ditas estar na mesma relação, uma primeira relativamente a uma segunda, e uma terceira relativamente a uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira, ou simultaneamente excedem, ou são simultaneamente iguais, ou simultaneamente inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tomados de maneira correspondente."

Obs.: O tamanho e a complexidade do enunciado, testemunham um esforço de clareza e de rigor de expressão que não é evidente de se formular na linguagem usual.

Tradução lógica:

$A:B = C:D$ se $\forall m, n \in \mathbb{Z}_+$, $[(nA > mB) \wedge (nC > mD)] \vee [(nA = mB) \wedge (nC < mD)] \vee [(nA < mB)] \wedge (nC < mD)]$.

- O grande valor desta definição é de dizer em quais condições uma relação entre duas grandezas é igual a uma outra, seja ou não essa relação incomensurável. Tal é a origem de sua complexidade, que identifica a igualdade de duas relações através de comparações a partir dos múltiplos das grandezas que compõem as relações.

- Intuitivamente, pode-se exprimir esta definição da seguinte maneira: duas relações são idênticas se, e somente se, elas são superiores (ou inferiores) à exatamente os mesmos racionais $\longrightarrow$ intuição subjacente à construção do corte de Dedekind (rever páginas 306 e 307).

Teorema do Valor Intermediário: o corte determina um número real.

- Antifairese X Eudoxo

1. Em Eudoxo, a definição não distingue entre relação racional e irracional. Ela se aplica a todas as relações.

2. Não existe infinito atual em Eudoxo:

i) se encontra somente a ideia que, se duas relações diferem, então existe um "lugar", a uma distância finita, onde se terá um desajuste nos múltiplos;

ii) se encontra uma "quantificação" sobre um conjunto infinito de elementos ($\mathbb{Z}_+$), mas esse infinito é potencial, na medida em que ele é dado por uma regra: um comprimento é produzido a partir de um comprimento original;

iii) ponto decisivo: Eudoxo procura cuidadosamente evitar a ideia do algoritmo de Euclides; sua abordagem é decididamente não aritmética: nem as grandezas e nem as relações entre grandezas são números;

iv) entretanto, recusando de empregar a antifairese, Eudoxo não pode explorar a estrutura dos incomensuráveis. Assim, para estudar a diferença entre os racionais e os incomensuráveis e para estudar os diferentes tipos de incomensurabilidade, a abordagem eudoxiana não é adequada.

- Dedekind X Euclides

1. Dedekind define a continuidade pelo caráter inesgotável do corpo engendrado (⟶ corpo dos números reais) $\mathbb{R}$ é máximo pela operação de corte de $\mathbb{Q}$.

2. Em Euclides, o contínuo não é uma criação do pensamento que define os números reais, mas um dado da natureza; é a natureza que se oferece como contínua.

Arquimedes de Siracusa (cidade de Sicília) (287 à 212 aC) e o círculo

- Vimos que a área do círculo é proporcional ao quadrado do raio, e o comprimento da circunferência do círculo é proporcional ao diâmetro. Daí,

  Área do círculo $(A_0)=k_1r^2$

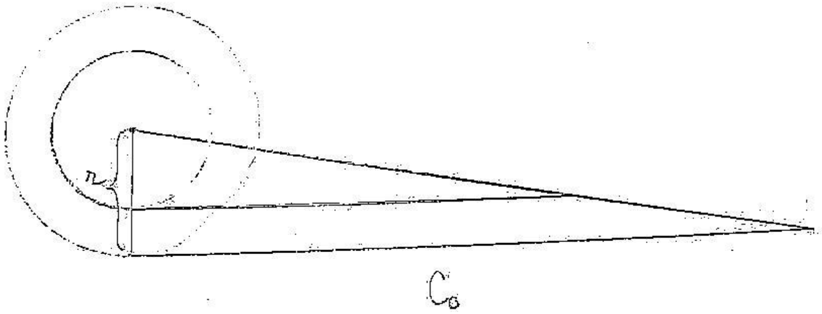
  Comprimento da circunferência do círculo $(C_0)=k_2 2r$, onde k_1 e k_2 são constantes.

  Entretanto não fica claro que $k_1=k_2$ ($=\pi$ usado como constante pela primeira vez por William Jones (inglês – 1675 à 1749) em 1706 no livro "A new introduction to the mathematics")

- Arquimedes: primeira caracterização rigorosa deste fato ao demonstrar que $A_0=\frac{1}{2}rC_0$ ($\rightarrow k_1=k_2$)

  [De fato, se $A_0 = \frac{1}{2}\, r\, C_0$, $k_1\, r^2 = \frac{1}{2} r\, k_2\, 2\, r \rightarrow k_1=k_2$]

Intuitivamente:

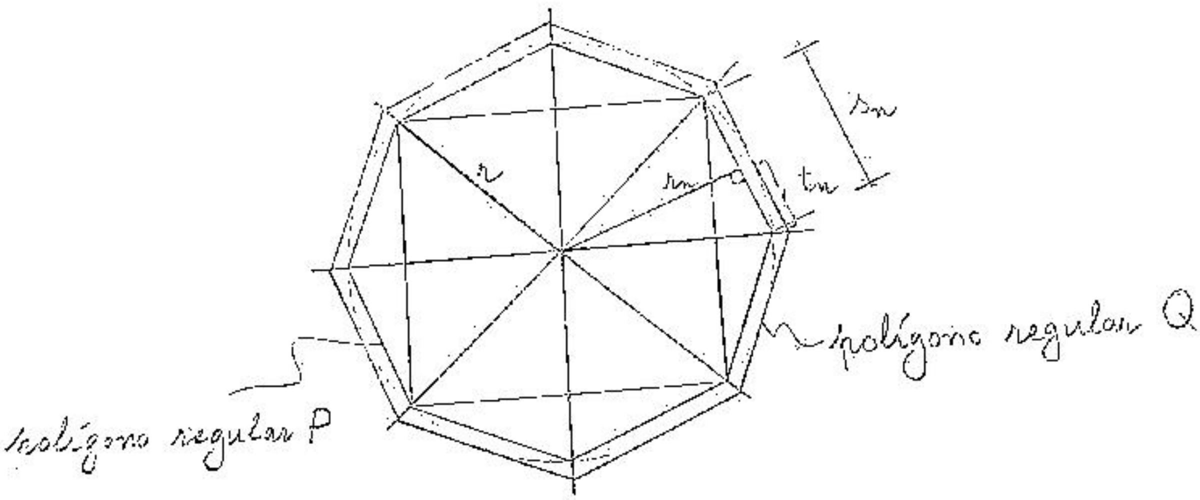


Posteriormente, demonstrar que $3 + \frac{10}{71} < constante\ (= \pi) < 3 + \frac{1}{7}$

Proposição 1 da obra "A medida do círculo":

Todo círculo é igual a um triângulo retângulo no qual um dos lados adjacente ao ângulo reto é igual ao raio do círculo e o outro (isto é, o outro lado do ângulo reto) à circunferência do círculo.

Demonstração (em linguagem atual por duplo raciocínio por absurdo):



P e Q possuem o mesmo número de lados.

Suponhamos por absurdo que $A_0 > \frac{1}{2}rC_0$. Seja $\varepsilon = A_0 - \frac{1}{2}rC_0$.

Daí, $A_0 - \varepsilon = \frac{1}{2}rC_0$. Vamos escolher um polígono regular P de n lados, $n \geq 4\ (n = 2^m, m \geq 2)$(a partir da bissecção dos arcos em duas partes iguais), inscrito no círculo tal que

$$\text{área}(P) > A_0 - \varepsilon = \frac{1}{2}rC_0.$$

Sendo s_n o lado de P, r_n uma perpendicular do centro à s_n, $r_n < r$ e $ns_n < C_0$,

$$\text{área}(P) = n\frac{1}{2}r_n s_n = \frac{1}{2}r_n(ns_n) < \frac{1}{2}rC_0.$$

O que contradiz a suposição. Consequentemente, $A_0 \ngtr \frac{1}{2}rC_0$.

Suponhamos, então, $A_0 < \frac{1}{2}rC_0$. Seja $\varepsilon = \frac{1}{2}rC_0 - A_0$. Daí, $A_0 + \varepsilon = \frac{1}{2}rC_0$. Vamos escolher um polígono regular Q de n lados, $n \geq 4\ (n = 2^m, m \geq 2)$, circunscrito ao círculo tal que

$$\text{área}(Q) < A_0 + \varepsilon = \frac{1}{2}rC_0.$$

Sendo $2t_n$ o lado de Q, r, o raio do círculo, uma perpendicular do centro à $2t_n$ e $n2t_n > C_0$,

$$\text{área}(Q) = n\frac{1}{2}r(2t_n) = \frac{1}{2}r(n2t_n) > \frac{1}{2}rC_0.$$

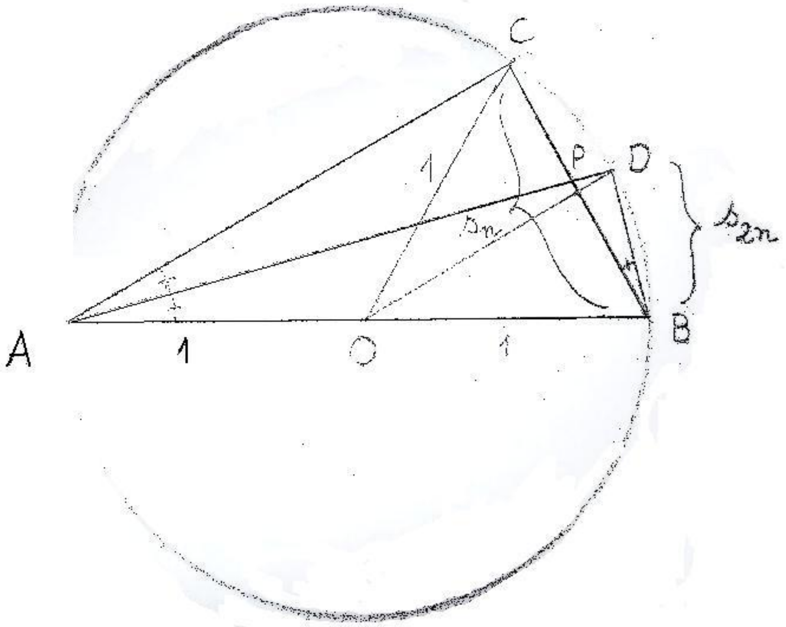
O que contradiz a suposição. Consequentemente, $A_0 \nless \frac{1}{2}rC_0$. Logo, o círculo equivale ao triangulo, isto é, $A_0 = \frac{1}{2}rC_0$.

Estimativa para π obtida por Arquimedes

(Proposição 3 da obra "A medida do círculo")

Para obter uma estimativa para π, Arquimedes inicia com o hexágono regular inscrito e circunscrito em relação ao círculo de raio 1, dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a 96 lados.

Consideremos inicialmente polígonos inscritos.



Como os triângulos ABD e BPD, e os triângulos ACP e ABD são semelhantes,

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BP}{BD} \qquad \frac{AC}{PC}=\frac{AD}{BD} \quad \leftrightarrow \quad \frac{AC}{AD}=\frac{PC}{BD}$$

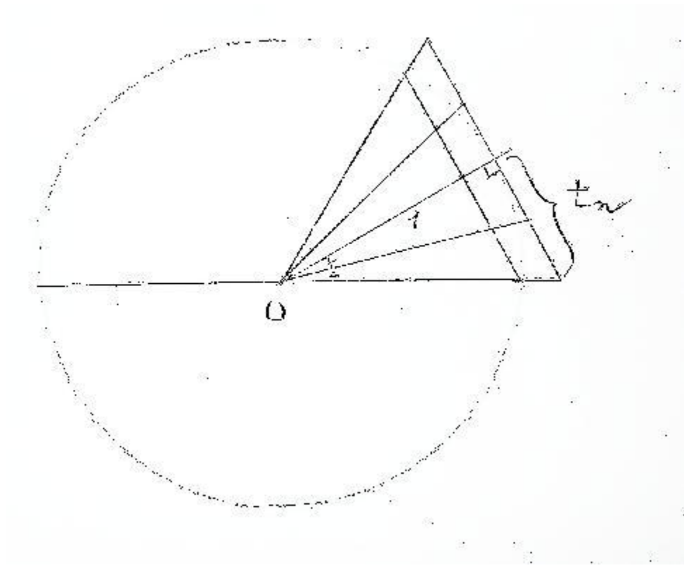
Da teoria das proporções,

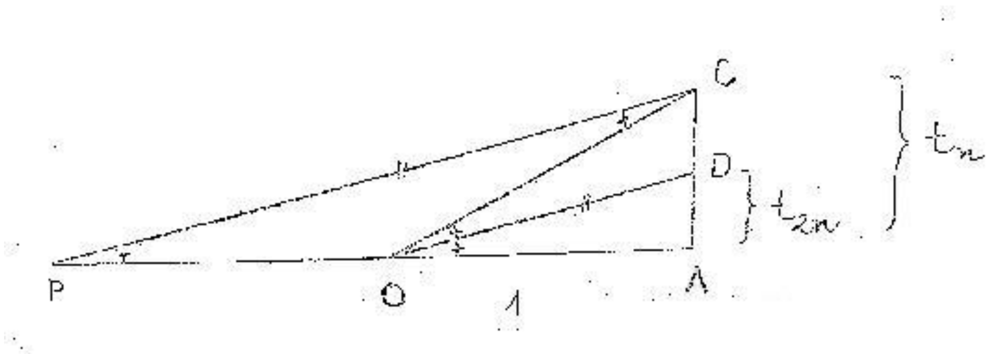
$$\frac{AB+AC}{AD}=\frac{BP+PC}{BD}=\frac{BC}{BD}$$

ou seja,

$$\frac{2+\sqrt{4-s_n^2}}{\sqrt{4-s_{2n}^2}}=\frac{s_n}{s_{2n}} \quad \leftrightarrow \quad s_{2n}^2=\frac{s_n^2}{2+\sqrt{4-s_n^2}} \quad \rightarrow \quad s_{2n}=\frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}}$$

Vamos considerar agora polígonos circunscritos.





Como os triângulos ADO e ACP são semelhantes,

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AO}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AO} + \mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AO} + \mathrm{OC}}$$

Ou seja,

$$\frac{t_{2n}}{1} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}} \quad \leftrightarrow \quad t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}}$$

Aplicando as fórmulas de s_{2n} e t_{2n} para calcular s_{96} e t_{96} recursivamente, sabendo que s_6=1 e t_6=$\frac{1}{\sqrt{3}}$ e que

$96s_{96} < 2.k.1 < 96.2.t_{96}$

$48s_{96} < k < 96t_{96}$ obtemos $3 + \frac{10}{71} < k < 3 + \frac{1}{7}$ $(k \equiv \pi)$

Obs.: Não se diz que um círculo é um polígono com um número ilimitado (→ infinito) de lados, expressão que era evitada por Euclides e Arquimedes, uma vez que inclui a ideia de ilimitado. O procedimento aqui adotado por Arquimedes é o de inscrever o círculo entre dois polígonos com um número finito de lados, efetuando refinamentos sucessivos pela ampliação(*) simultânea do número de lados de cada um destas figuras.

Apolônio de Perga (~262 à ~190 aC) **e as seções cônicas**

"Cônicas" (do grego cônos – cone) (8 livros), a única obra de Apolônio que subsiste, sistematiza e generaliza os conhecimentos de seus predecessores sobre as seções cônicas. É um tratado de leitura difícil tanto pela utilização de métodos razidos da "álgebra geométrica" como pela forma puramente retórica da exposição, isto é, sem nenhum simbolismo.

O estudo das seções cônicas, das cônicas, na Grécia remonta ao século IV AC. Menécmo, aluno de Eudoxo, contemporâneo de Platão, as teria descoberto nos seus estudos sobre a duplicação do cubo a partir do trabalho de Hipócrates vinculado o problema da procura de duas médias proporcionais x, y, tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Alguns historiadores da matemática pensam que Menécmo sabia que a seção de um cone de revolução por um plano perpendicular a sua geratriz fornecia curvas diferentes segundo o ângulo do vértice do cone, dado através da seção perpendicular passando pelo vértice, fosse agudo, reto ou obtuso. A terminologia utilizada nesses casos foi:

seção do cone de ângulo agudo – elipse

seção do cone de ângulo reto – parábola

seção do cone de ângulo obtuso – hipérbole (**)

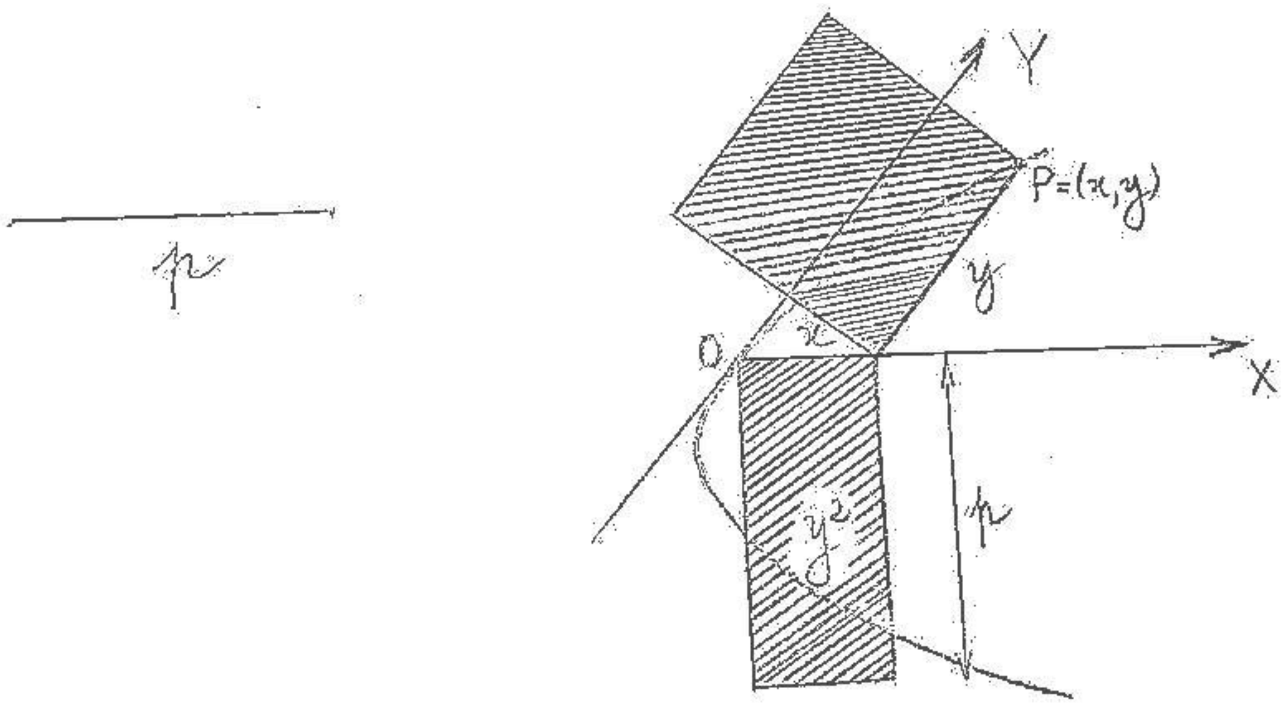
(*)através da duplicação

(**) "tríada de Menécmo"

Quanto ao conhecimento de Menécmo das propriedades destas curvas não existem documentos que o confirmem.

Apolônio inovou gerando as três seções cônicas ela interseção de uma <u>superfície cônica de revolução</u> por um plano variável. Assim, segundo o encontro do plano secante com todas as geratrizes de uma mesma porção da superfície, paralelo a uma das geratrizes ou encontra as duas porções da superfície, se está em presença da elipse, da parábola ou da hipérbole. Sua nova abordagem permite-lhe de construir as três curvas com a ajuda da técnica da aplicação de áreas. Por extensão, ele nomeia parábola a curva obtida aplicando ao segmento de reta p dado um retângulo de lado x e de área igual ao quadrado de lado y. Transcrita em notação algébrica, essa propriedade característica se exprime pela equação $y^2=px$.

Visualmente:

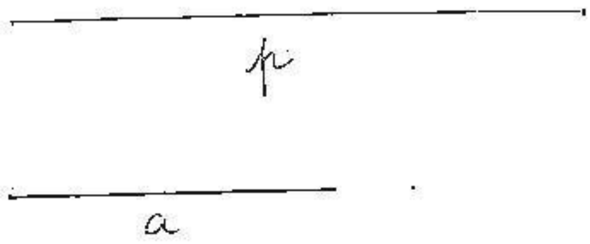


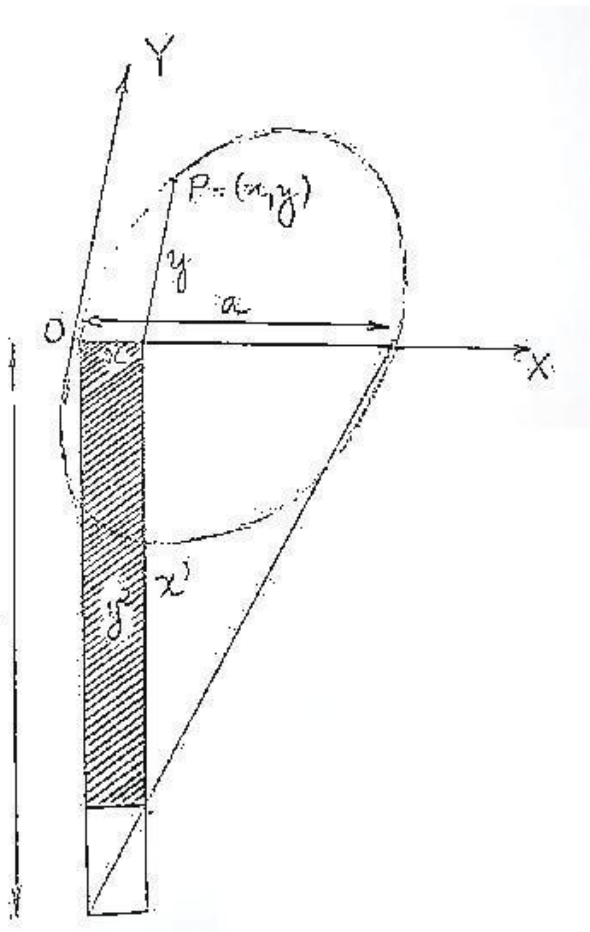
Se o retângulo de lado x e de área y² tem uma base mais curta do que o segmento de reta p dado de modo que deve ser completado por um retângulo, a curva será uma elipse. Transcrita em notação algébrica, essa propriedade característica se exprime pela equação

$$y^2 = x\left(p - \frac{p}{a}x\right)$$

onde a é o diâmetro da elipse dado.

Visualmente:





Do diagrama ao lado, P=(x,y) é determinado por:

$$y^2 = x.x' \ \text{ e } \ \frac{x'}{a-x} = \frac{p}{a},$$

isto é,

$$y^2 = x.x' \ \text{ e } \ x' = \frac{p(a-x)}{a}.$$

Daí,

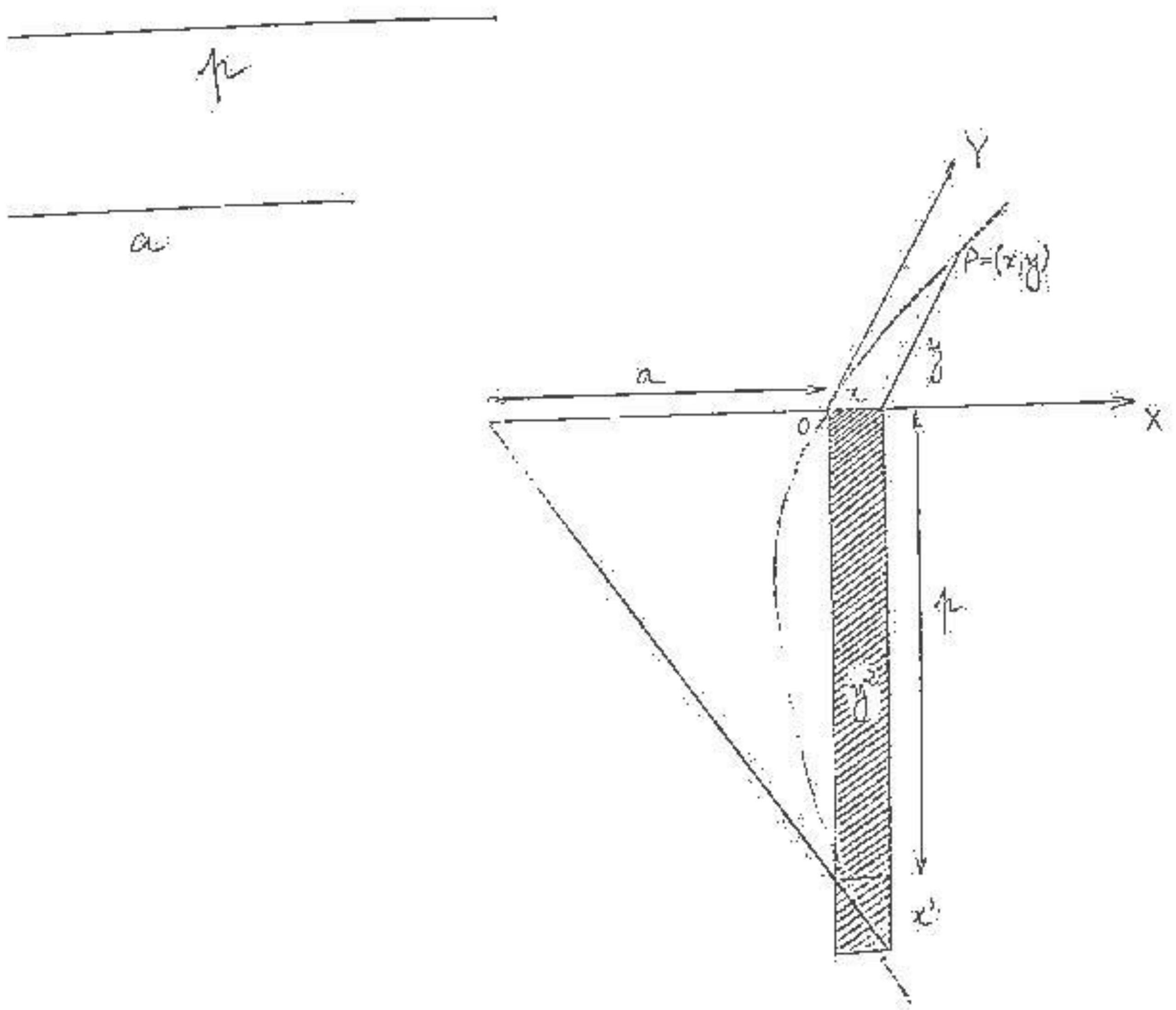
$$y^2 = x\frac{p(a-x)}{a} = x\left(p - \frac{p}{a}x\right)$$

E se a base do retângulo excede o segmento de reta dado p, a curva construída será uma hipérbole. Transcrita em notação algébrica, essa propriedade se exprime pela equação:

$$y^2 = x\left(p + \frac{p}{a}\right)x\,,$$

onde a é o diâmetro da hipérbole dado.

Visualmente:



<u>Exercício</u>:

1) Obtenha a equação acima da hipérbole, a partir do diagrama ao lado.
2) Escreva na forma canônica as equações acima da elipse e da hipérbole.

Dos oitos livros que constituem o tratado, sete nos são chegados. Após a definição e a construção das três cônicas, Apolônio estuda suas propriedades fundamentais (assíntotas, tangentes, focos, diâmetros conjugados, etc.).

Adendo: A noção de transformação como operação que consiste em fazer corresponder a uma figura qualquer dada uma outra figura segundo uma certa lei, noção esta estranha à geometria grega, germinou no *Quattrocento* italiano, com a criação dos métodos de desenho em perspectiva (do latim *perspicere* que quer dizer ver através).(*) Esses métodos permitiam engendrar de maneira regrada formas a partir de outras: um círculo dava uma elipse ou uma parábola ou hipérbole, por exemplo. Foi a partir daí que Girard Desargues (francês – 1591 à 1661) na sua obra "Esboço – projeto de uma esfera aos acontecimentos dos encontros do cone com um plano" (1639) elaborou uma ferramenta conceitual matemática que permitia "transportar" certas propriedades de uma configuração simples inicial (o círculo) a uma configuração mais complexa (obtida) (uma cônica). Ele criou o "método das transformações" que consistia em demonstrar uma propriedade sobre uma configuração complexa – uma cônica – demonstrando-a inicialmente sobre uma configuração simples – o círculo, e transportando-o do círculo à cônica por perspectiva ou, matematicamente falando, por projeção. Estas ideias se perderão no curso do século XVIII ao mesmo tempo que se perderá também a prática da geometria clássica: elas foram suplantadas por Descartes e sua "geometria das coordenadas",(**) e pelos métodos infinitesimais que eclodem no século XVII e culminam com o Cálculo Infinitesimal. Será necessário esperar o final do século XVIII para que a geometria arguesiana encontre interesse nos matemáticos, pela criação da Geometria Descritiva de Gaspard Monge (francês – 1746 à 1818) e pela obra de Lazare Carnot (francês – 1796 à 1832) "Da correlação das figuras em geometria" (1801).

(*) Na Idade Média perspectiva (em latim) designava a ciência ótica (optiquê em grego quer dizer visão).

(**) Descartes com sua "geometria das coordenadas" e Desargues com sua "geometria projetiva" vão pretender unificar e simplificar os métodos matemáticos. Um através das virtudes da álgebra, o outro através da potência da geometria.

Em 1822, pelo seu "Tratado das propriedades projetivas das figuras", Jean-Victor Poncelet (francês – 1788 à 1867) reintroduziu na geometria o "método das transformações" tal como imaginou Desargues, fazendo uma síntese das contribuições de outros matemáticos para a então chamada Geometria Projetiva. Esta síntese de Poncelet suscitou uma grande quantidade de trabalhos, tanto na França quanto na Alemanha, como por exemplo, através de Michel Charles (francês – 1793 à 1880) com estudo sistemático da dependência entre as formas geométricas, e da obra "Geometria da posição"(*) (1847) de Karl von Staudt (alemão – 1798 à 1867) que reconstrói sobre uma base axiomática isenta de qualquer métrica os trabalhos de Carnot.

A partir daí, as transformações, nos decênios 1860-1880, serão utilizados não somente para construir figuras ou para descobrir e estabelecer suas propriedades. Elas terão um papel especial:

- nas reconstruções da geometria que acompanharão as reflexões sobre a origem dos axiomas suscitadas pela difusão das "geometrias não-euclidianas", (**)
- na caracterização e na subordinação das várias geometrias, colocando em evidência suas ligações internas.

Através da noção de grupo de transformações, Klein vai estabelecer relações entre as diversas geometrias:

- seriando e classificando os diferentes tipos de propriedades geométricas (projetivas, métricas, etc.),
- extraindo a identidade estrutural das geometrias em aparência estranhas uma as outras para integrá-las,
- refundando a geometria euclidiana, pela noção de movimento e o papel fundamental da translação e da rotação.

(*) Por "geometria de posição", se exprime que o objeto é de estabelecer as propriedades concernentes às posições relativas entre os diferentes elementos de uma figura, por exemplo: pertinência de um ponto a um objeto: reta, triângulo ou seu interior, alinhamento, contato (→ problemas de tangência).

(**) Expressão cunhada por Gauss em 1813 para caracterizar as geometrias de Bolyai e Nicolai Lobatchevski (russo – 1792 à 1856).

O programa de Klein opera um deslocamento do interesse dado as transformações geométricas do instrumental para o estrutural que terá como efeito liberar a geometria de suas bases empíricas, de eliminar o intuitivo dos raciocínios e de liberar também os resultados produzidos da adequação a um certo tipo de experimental ou de observável como modo final de validação.

Nota: **A Geometria Projetiva – uma breve introdução**

Para os filósofos gregos, o infinito não existia verdadeiramente. Ele era considerado como potencial, acessível em “potência”. Neste contexto, a geometria euclidiana reconheceu e integrou o infinito potencial, mas sem se arriscar no infinito “atual”.

Um objeto elementar da geometria de Euclides, uma “linha reta”, ilustra as contradições que pode trazer a utilização do infinito. Isto que hoje se chama “reta”, ele define como a extensão “mais econômica” de um ponto a outro, que corresponde à noção de “segmento de reta”. Além disso, estabelece que essa linha é prolongável o quanto for preciso para as necessidades de uma construção ou de uma demonstração. Assim, a linha reta da geometria euclidiana, é finita, mas é prolongável à vontade, ou seja, ela não é concebida de início, como infinitamente extensa.

A partir daí, se iniciou um longo debate sobre o chamado quinto postulado que aparece no Livro I dos Elementos. Este postulado enuncia que se uma secante encontra duas outras retas fazendo ângulos internos situados de um mesmo lado da secante tais que sua soma é inferior à dois ângulos retos, as duas retas prolongadas indefinidamente (quer dizer o quanto for necessário) se encontram do lado onde estão os ângulos de soma inferior à dois ângulos retos. Um enunciado equivalente a este, dado por Playfair, diz que no plano, por um ponto exterior a uma reta dada, passa uma e só uma paralela a essa reta (rever pág. 268). As primeiras tentativas de demonstração deste enunciado repousavam sobre o prolongamento indefinido das retas, isto é, seu prolongamento potencialmente infinito com conservação de alinhamento. Sabe-se que essas tentativas foram vãs, pois o quinto postulado não pode ser demonstrado a partir dos outros postulados, dos axiomas e das proposições dos Elementos. A história das paralelas, começada com este postulado, conduziu à criação de três tipos de geometria. Uma dita euclidiana, admite este postulado como um axioma da teoria. As duas outras, ditas não-euclidianas, e concebidas no final do século XIX, põem como axioma uma das duas formas que pode ter a negação do postulado das paralelas. A geometria hiperbólica tem por princípio que por um ponto passa mais de uma paralela a uma reta dada (e, por consequência, se demonstra que passam uma infinidade). A geometria elíptica postula que por tal ponto não passa nenhuma paralela à uma reta dada. O que pouco se sabe, é que a emergência das geometrias não-euclidianas só se tornou possível após esta da geometria projetiva, que iria servir de quadro geral aos três modelos de geometria, e que esta geometria projetiva nasceu no século XVII, da conjunção da ciência da perspectiva e da teoria das cônicas de Apolônio.

A ciência da perspectiva

Quando se está em uma longa estrada em linha reta, suas margens são assumidas paralelas, mas a visão diz que elas concorrem em um "ponto muito longe", um "ponto no infinito", chamado "ponto de fuga". No "ponto de fuga" seus bordos, duas retas, estão se intersectando. Se existe uma outra estrada cruzando a primeira, ao se olhar em linha reta na direção desta outra, vê-se o mesmo fenômeno com outro "ponto de fuga". Este fenômeno captado pelos pintores do Renascimento italiano marca a compreensão para se representar a terceira dimensão no plano. Um momento crucial e fundador desta questão foi a invenção da perspectiva linear, central ou cônica (os dois últimos nomes dados pelos matemáticos). A perspectiva central consiste em projetar sobre o plano do quadro os raios retilíneos (e imaginários) que vão do objeto a se representar até o olho, suposto pontual, do pintor. Assim, considerando o olho como o centro dessa projeção, todos os raios luminosos passando por ele e provenientes dos pontos situados sobre o contorno do objeto formam então um cone com o vértice sendo esse vértice. Feito isso, pela definição de um ponto de concorrência de retas, na realidade paralelas, os artistas italianos[*] deram o primeiro exemplo de representação visual de um infinito atual: o "ponto de fuga" aparece no quadro, um ponto na realidade situado no infinito, lá onde as retas paralelas "se encontram". Deve-se, entretanto, ressaltar que esses artistas não tinham por projeto de colocar em evidência a possibilidade geométrica de pensar esse infinito atual, ou que eles tenham tido uma consciência de ter participado de sua invenção.

---

[*] Dois nomes aparecem, em destaque, como teóricos da perspectiva linear: Leon Battista Alberti (1404 à 1472) e Filippo Brunelleschi (1377 à 1446)

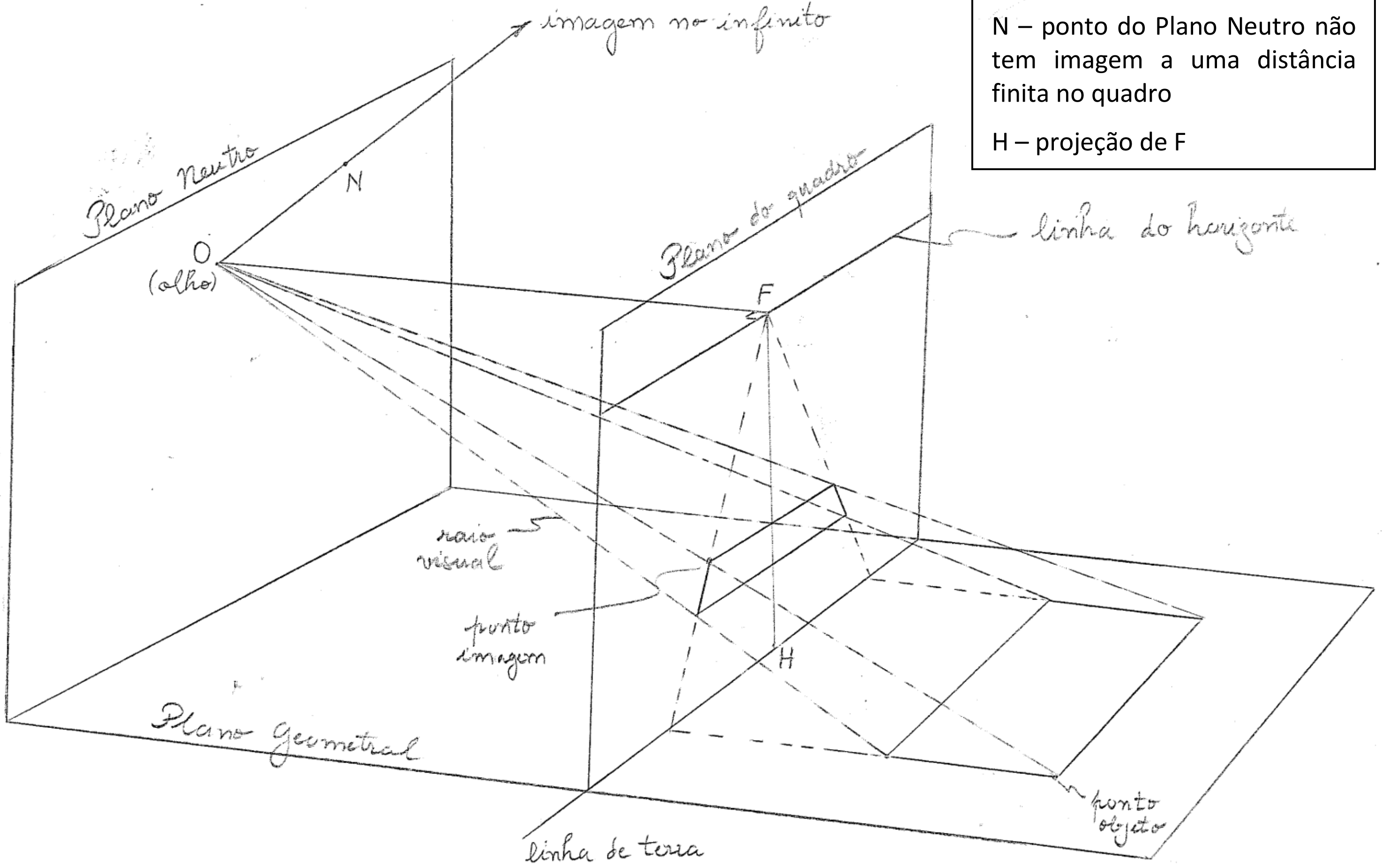
Geometricamente, o princípio da perspectiva central pode ser entendido pela figura a seguir:

O – centro de projeção

F – ponto de fuga

N – ponto do Plano Neutro não tem imagem a uma distância finita no quadro

H – projeção de F

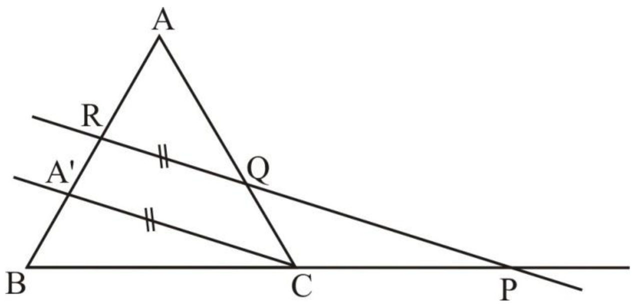


A Geometria Projetiva é, então, o domínio da Geometria que modela as noções intuitivas de <u>perspectiva</u> e de <u>horizonte</u>. Ela essencialmente estuda as propriedades das figuras que ficam <u>invariantes por projeção</u> (ou <u>perspectiva central</u>). Ignorando ângulos e comprimentos, seus teoremas fundadores são de <u>colinearidade de pontos</u> e de <u>concorrência de retas</u>. Assim, contrariamente à Geometria Euclidiana, a Geometria Projetiva é uma geometria não métrica em que o paralelismo não tem nenhuma relevância.

Esses teoremas aparecem pela primeira vez na matemática grega, através de dois matemáticos:

Menelau de Alexandria (~70 à ~130 d.C.)
Com ele se inicia a "teoria das transversais" (→ retas intersectando dois lados de um triângulo). Na sua obra que trata da geometria na esfera e de suas aplicações à astronomia, denominada "Esférica", ele apresenta a versão plana de um teorema que é chamado "Teorema de Menelau":
"Três pontos P, Q e R situados sobre as retas suportes dos lados BC, AC e AB (respectivamente) de um triângulo ABC, distintos dos vértices, estão alinhados se, e somente se,

$$PB \times QC \times RA = PC \times QA \times RB."$$



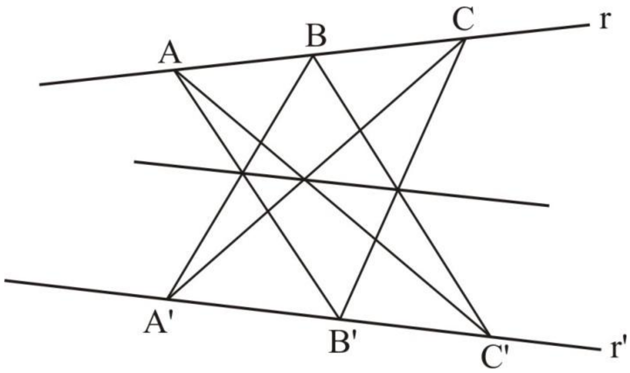
Demonstração: Pelo Teorema de Tales, aplicado aos triângulos RBP e AA'C, tem-se, respectivamente: $\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RA'}}$ e $\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{QA}} = \frac{\mathrm{RA'}}{\mathrm{RA}}$. Se deduz daí, $\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PC}\times\mathrm{RB}} = \frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{QC}\times\mathrm{RA}} = \frac{1}{\mathrm{RA'}}$, o que equivale a $\mathrm{PB} \times \mathrm{QC} \times \mathrm{RA} = \mathrm{PC} \times \mathrm{QA} \times \mathrm{RB}$.

Exercício: Faça a demonstração da recíproca deste teorema.

Nota: O Teorema de Tales aparece como um caso limite do Teorema de Menelau. Fazendo o ponto P, permanecendo sobre a reta BC, tender para o infinito deslizando no sentido de B para C, no limite, a reta RQ será paralela à reta BC e P será um "ponto no infinito". A relação $\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PC}}$ tenderá para 1, e a igualdade $\mathrm{PB} \times \mathrm{QC} \times \mathrm{RA} = \mathrm{PC} \times \mathrm{QA} \times \mathrm{RB}$ se tornará a relação de Tales $\frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{RB}} = \frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{QC}}$. Deste ponto de vista, o Teorema de Menelau e o Teorema de Tales se deduzem um do outro.

Papo de Alexandria (século IV d.C.)

Na sua obra "Coleção" (Matemática) (em grego "*Sinagoge*") (~340) aparece o que é considerado o segundo teorema seminal da Geometria Projetiva:



Teorema de Papo (Proposição 139 do Livro VII): "Sobre duas retas r e r′, colocar respectivamente e nessa ordem, os pontos A, B, C e os pontos A′, B′, C′. Traçar os segmentos AB′ e AC′, BA′ e BC′, CA′ e CB′. Os três pares de interseções $\mathrm{AB}' \cap \mathrm{A}'\mathrm{B}$, $\mathrm{AC}' \cap \mathrm{A}'\mathrm{C}$ e $\mathrm{BC}' \cap \mathrm{B}'\mathrm{C}$ são incidentes a uma terceira reta."

Natureza projetiva desta proposição: é um teorema de pura incidência, com nenhuma medida de ângulo ou de comprimento, como aliás o é o Teorema de Menelau.

Pelo fato destes teoremas serem provados usando-se métodos euclidianos, eles foram adicionados às proposições da Geometria Euclidiana. É claro, entretanto, que estes teoremas concernem somente às incidências de pontos e às interseções de retas, que são características bem diferentes das típicas proposições da Geometria Plana.

Dois matemáticos serão fundamentais para a criação e a formalização da Geometria Projetiva: Desargues e Poncelet.

- Desargues funda a Geometria Projetiva ao passar a representação empírica do real dos pintores renascentistas dada, pelos sentidos, através da Perspectiva, para uma elaboração de novos conceitos e espaços matemáticos.

- Poncelet retoma os princípios matemáticos introduzidos por Desargues, sistematizando-os.

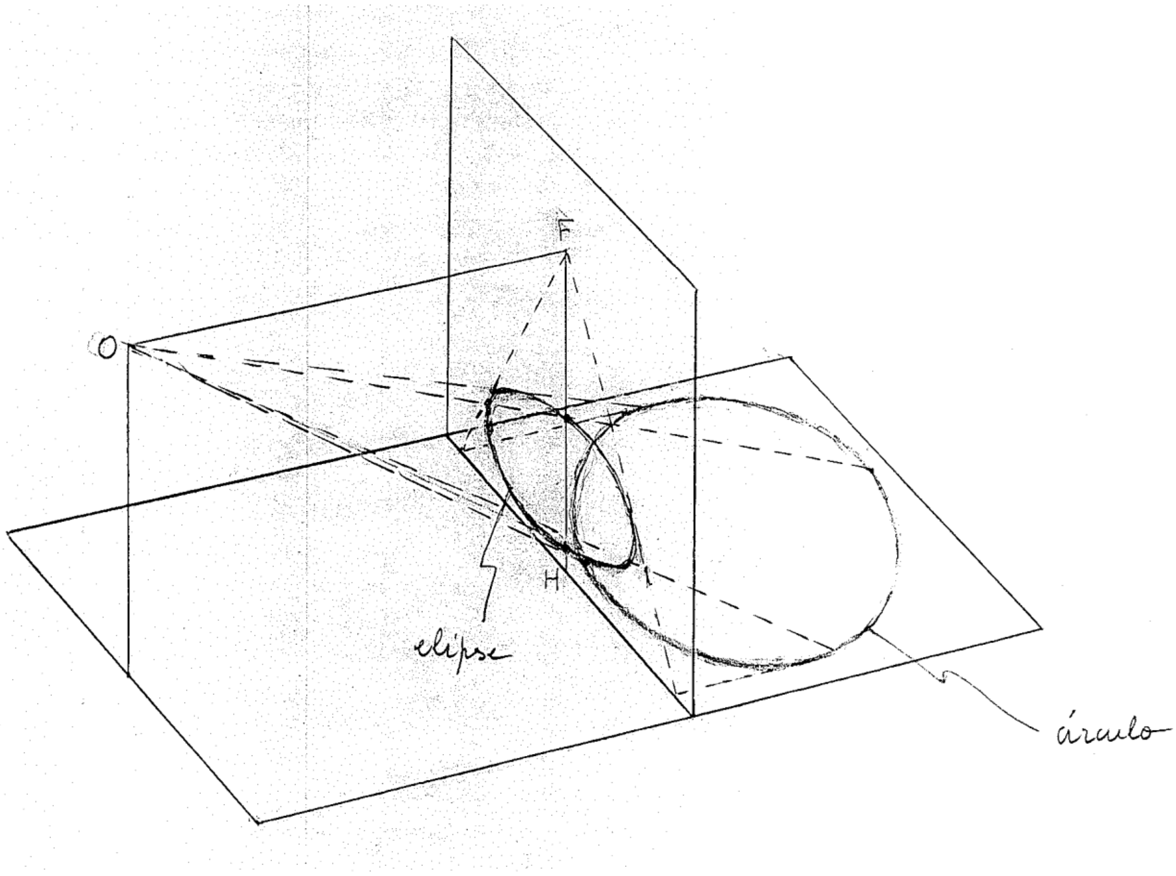
Girard Desargues (francês – 1591 à 1661)

Quase na metade do século XVII, na França, acontece uma revolução no campo conceitual da geometria. Desargues, um geômetra francês, vai teorizar isso que todo artista praticante da perspectiva central viu sem se dar conta: ele identifica a concorrência de retas ou de planos ao paralelismo destes objetos geométricos. Em outros termos, o paralelismo é a concorrência no infinito. Assim, por exemplo, as retas paralelas são retas que se "encontram" em um ponto situado no infinito. A partir daí, ele introduz um ponto novo em cada reta, o ponto no infinito, afim de fazer a correspondência entre os sistemas de retas paralelas e os de retas concorrentes, ou seja, retas concorrentes têm a mesma natureza que retas paralelas, salvo que o ponto de interseção das retas paralelas é no infinito. Esta ideia Desargues a declina na sua obra "Esboço-projeto de uma espera aos acontecimentos dos encontros do cone com um plano" (1639). Ela rompe com a concepção finitista, herdada dos gregos, que se fazia da linha reta, da superfície ou figura plana, ou do sólido.

Essencialmente, como Desargues pensou as cônicas?

Sejam os raios visuais que ligam o olho aos pontos de um círculo. Estes raios formam um cone de base circular cujo vértice é o olho. Como toda seção do cone por um plano produz uma cônica, Desargues vai concluir que uma cônica pode ser vista como uma perspectiva do círculo. A partir daí, ele percebeu que as cônicas deviam possuir certas propriedades em comum que igualmente pertencem ao círculo. Logo, seria suficiente, para as descobrir, de procurar entre as propriedades do círculo estas que se conservam por perspectiva.

Compreensão visual para a elipse



O "Esboço-projeto" foi redigido no estilo hipotético-dedutivo dos Elementos de Euclides. Este texto seminal da Geometria Projetiva se organiza da seguinte maneira:

- Um conjunto de definições de termos matemáticos identificados de um modo geral através de nomes botânicos. Esta característica, que dificultava enormemente a leitura do texto, se inscreve na estética barroca que expressava a agitação da vida através de metáforas vegetais. Ela vai testemunhar também a vontade de Desargues de renovar o vocabulário matemático afim de evitar a confusão e a ambiguidade inerentes com a utilização dos termos da linguagem corrente.

Exemplos:

rolo – sólido cilíndrico ou cônico

plano de corte do rolo – plano que corta um rolo, e não é a base

falta – elipse

igualação – parábola

excesso – hipérbole

marco – vértice de um quadrilátero

reta-marco – reta que passa por dois dos vértices

objetivo de uma ordenação de retas – ponto de interseção de um feixe de retas

tronco – reta

nós – pontos em uma reta, nos quais passam outras retas

ramo – cada uma dessas retas acima

árvore – reta na qual estão três pares de pontos A,A'; B,B' e C,C' tais que $OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC'$

cepo – o ponto O, comum aos seis segmentos

galhos – os segmentos OA, OA', OB, OB', OC, OC'

imposição de nome – definição

ponto quente – foco

Além disso, novos aspectos relativos aos objetos geométricos foram introduzidos por Desargues na sua teoria.

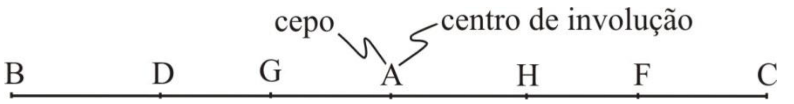
Exemplos:
reta – um círculo de raio infinito

cilindro de base circular – um cone de vértice no infinito (o que explica que uma seção do cilindro por um plano produz também cônicas)

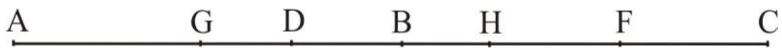
- A introdução e o estudo da involução de três pares de pontos de uma reta. Nessa parte figura a demonstração do Teorema da Ramagem (ramagem – feixe de seis retas passando por seis pontos em involução) que estabelece que a involução é uma propriedade projetiva, isto é, que se conserva por projeção cônica.

<u>Definição de involução</u>: Três pares de pontos B,H; C,G e D,F estão em <u>involução</u> se existe em ponto A tal que

AC.AG=AD.AF=AB.AH

Caso 1: 

O centro de involução está entre os pontos de cada par e, neste caso, os pares estão misturados.

Caso 2: 

O centro de involução está fora e então, os pares não estão misturados.

Os pontos C,G; D,F e B,H são chamados <u>pontos conjugados</u>. O conjugado de A é o ponto no infinito.

Desargues mostra que se pode também exprimir a involução sem a intervenção do ponto A. De AC.AG=AD.AF, tem-se AG:AF=AD:AC e daí AG:AF=GD:CF. Por outro lado, como AF:AC=AG:AD, AF:AC=GF:CD. Logo, com AG:AF=GD:CF e AF:AC=GF:CD, AG:AC=(GD:CF).(GF:CD). Daí, AG:AC=(GD.GF):(CF.CD). Desta igualdade e da igualdade semelhante obtida considerando o par B e H de pontos conjugados se tira a relação entre oito segmentos: (GB.GH):(CB.CH)=(GD.GF):(CF.CD)(*) ou uma das outras relações obtidas pela permutação dos pares:

(FC.FG):(DC.DG)=(FB.FH):(DB.DH)

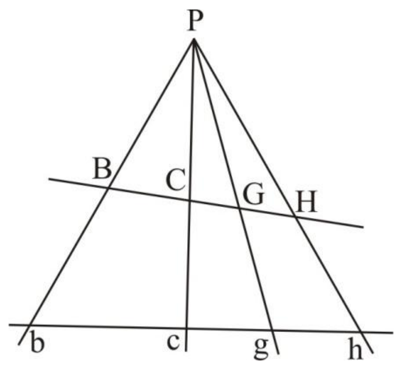
(FC.FG):(DC.DG)=(FB.FH):(DB.DH)

(*) Caracterizando que os três pares de pontos B e H, C e G, e D e F estão em involução.

<u>Teorema de Ramagem ou a involução é conservada por projeção</u>

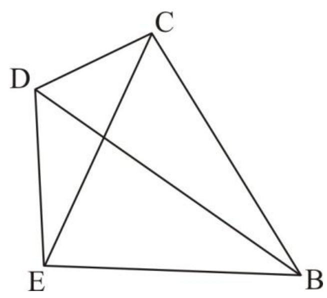
(versão simplicada)

Desargues utiliza o Teorema de Menelau para provar que se dois pares de pontos B e H, e C e G estão em involução e <u>eles são projetados por P nos pontos b e h, e c e pertencentes a outra reta</u>, então o segundo conjunto de dois pares de pontos também estão em involução.



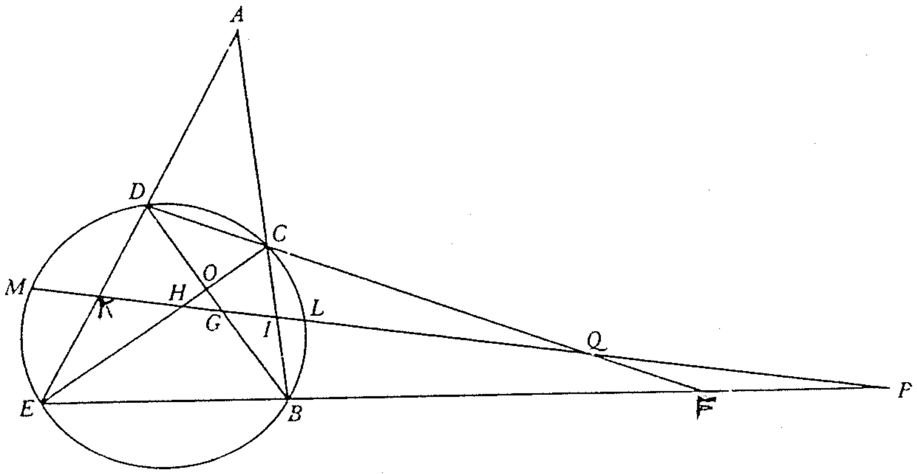
- A involução e as cônicas

A partir da noção da involução, Desargues vai demonstrar o teorema fundamental de sua obra. Para enunciá-lo precisa-se inicialmente definir o conceito de <u>quadrilátero completo</u>. Sejam B, C, D, E quatro pontos no plano, três a três não alinhados. Eles determinam seis maneiras possíveis de serem ligados por segmentos de reta; esses segmentos são os seis lados do quadrilátero completo. Os lados opostos deste quadrilátero são dois lados que não tem um dos quatro pontos em comum.



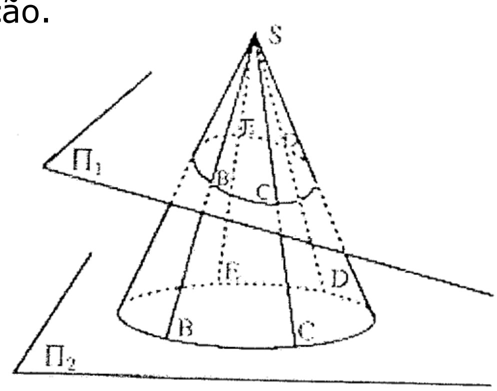
Por exemplo, CD e BE são lados opostos, como o são BD e CE.

<u>O chamado “Teorema de Desargues sobre a involução”</u> (onde Desargues utiliza a involução para o estudo das cônicas) (versão simplificada)



Considere uma transversal PM que corta o quadrilátero completo nos pares P,Q; I,K e G,H; e o círculo no par L,M. Então, L,M; P,Q e I,K estão em involução, assim como L,M; P,Q e G,H.

Esta propriedade verdadeira no círculo se transporta para as cônicas por projeção, pelo Teorema de Ramagem. Primeiro, suponha a figura inteira acima projetada de algum ponto fora do plano da figura. Uma seção é feita nesta projeção. O círculo se tornará uma cônica nesta seção e o quadrilátero completo no círculo se transformará em quadrilátero completo na cônica. Além disso, como uma projeção conserva a propriedade de um conjunto de pontos de estarem em involução, se um quadrilátero completo está inscrito em uma cônica, qualquer reta não passando por um vértice intersecta a cônica e os pares de pontos dos lados opostos do quadrilátero completo que caracterizarão quatro pares de pontos de involução.



Assim, Desargues, em seu texto, é criador por vários motivos:

- ele vê que a elipse, a hipérbole e a parábola, perspectivas do círculo, participam do círculo quanto às propriedades que as projeções (ou perspectivas) conservam;
- ele matematiza a deformação de uma configuração:
  - introduzindo a correspondência entre os pontos de dois planos. Correspondência hoje chamada projeção cônica;
  - tratando da mesma maneira os feixes de retas paralelas e os feixes de retas concorrentes, pela introdução da noção de ponto no infinito, tratando da mesma maneira cones e cilindros (vértices no infinito);
- ele cria um novo modo demonstrativo qualificado de "demonstração pelo relevo", quer dizer pela perspectiva, utilizando considerações de geometria espacial para estabelecer propriedades de geometria plana, o que está em ruptura com a tradição euclidiana;
- ele cria o "método das transformações" que consiste, como já se disse acima, em demonstrar uma propriedade sobre uma configuração complexa – uma cônica qualquer – demonstrando-a de início sobre uma configuração simples – o círculo – e transportando-a do círculo para a cônica pela perspectiva ou projeção.

Dois fatos importantes resumem o pensamento de Desargues:

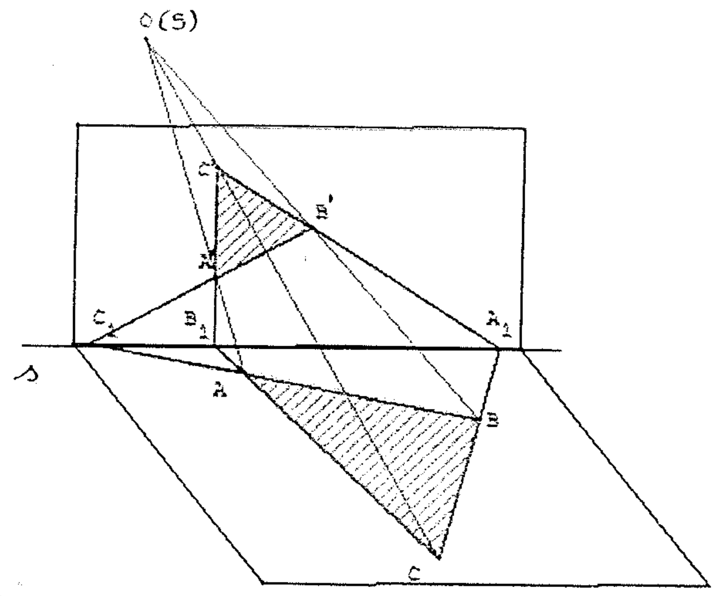
- os princípios dos quais saíram as técnicas do desenho em perspectiva, permitem não somente de engendrar uma forma a partir de outra, mas igualmente de transportar certas propriedades da configuração a essa obtida;
- toda cônica podendo, por esses princípios, ser obtida a partir de um círculo, possuirá todas as propriedades do círculo que se conservarão pela projeção cônica.

As ideias de Desargues serão reintroduzidas por Poncelet e serão a base de seu "Tratado das propriedades projetivas das figuras" que fundará a geometria sintética moderna e a Geometria Projetiva.

<u>Nota:</u> Um teorema importante de Desargues (tradicionalmente chamado de "Teorema de Desargues") que será a base da <u>teoria da homologia</u> de Poncelet, não apareceu no "Esboço-projeto"; ele foi publicado em 1648 por um amigo seu, Abraham <u>Mosse</u> (francês – ~1602 à 1676):

"Se dois triângulos ABC e A'B'C', em um mesmo plano, têm seus vértices correspondentes colocados sobre retas AA', BB' e CC' concorrentes em um mesmo ponto S (perspectividade por um ponto), seus lados AB,A'B'; BC,B'C' e AC,A'C' se encontram, dois a dois, em três pontos situados em uma mesma reta s (perspectividade por um eixo), e reciprocamente."

<u>Demonstração</u> ("pelo relevo" com uma perspectiva de centro O, à maneira de Desargues):



Nesta demonstração, Desargues transgride uma das regras de Euclides que é demonstrar uma propriedade da geometria plana somente no quadro da geometria plana. Ele pode ser considerado, por isso, como o inventor do método das transformações permitindo demonstrações por transferência de propriedades. Ele utiliza o espaço para a visualização de um problema plano.

Este resultado por sua vez é uma generalização da seguinte propriedade dos triângulos homotéticos desenhados no plano horizontal (plano geometral) da figura na folha:

"Se ABC e A'B'C' são dois triângulos no plano (afim), sem vértices comuns e tais que AB//A'B', CB//C'B' e AC//A'C', então as retas AA', BB' e CC' são concorrentes. Reciprocamente, se AB//A'B', CB//C'B' e AA', BB', CC' são paralelas ou concorrentes, então AC//A'C'." Vista em perspectiva central a partir do ponto O, esta configuração dá no plano vertical (plano do quadro) a seguinte configuração: as três paralelas se traduzem por um alinhamento dos três "pontos de fuga" sobre a "linha de horizonte" s.