ÁLGEBRA – VE1 – 22/09/2014
GABARITO

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. Considere o grupo $G = (\mathbb{R}^2, +)$.
(i) Prove que o conjunto

$$H = \{(x, 5x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq G$$

é um subgrupo normal de G.
(ii) Prove que G/H é isomorfo ao grupo $(\mathbb{R}, +)$.

Solução: (i) Claramente H é subgrupo de G pois 'e não vazio e vale a relačao $(x, 5x) - (y, 5y) = (x - y, 5(x - y)) \in H$. Além disso, H é normal em G pois G é abeliano.

(ii) Considere o homorfismo $G \to (\mathbb{R}, +)$ que envia (x, y) em $y - 5x$. Tal homomorfismo é surjetivo com nucleo H, logo pelo teorema de homomorfismo temos que G/H é isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.

Exercício 2. Seja G um grupo de ordem p^2q^2, com p e q primos tais que $p < q$.
(i) Prove que se G não possui um q-Sylow normal, então G tem ordem 36.
(ii) Prove que G possui um subgrupo normal de ordem diferente de 1 e p^2q^2.

Solução:

(i) Se $n_q \neq 1$, logo como n_q divide p^2, deve ser ou $n_q = p$ ou $n_q = p^2$. Se $n_q = p$, logo como $n_q \equiv 1 \text{mod} q$ temos que q divide $p - 1$, o que é absurdo pois $p < q$. Portanto $n_q = p^2$.

Mas $n_q \equiv 1 \text{mod} q$, então $p^2 \equiv 1 \text{mod} q$, ou seja $p^2 - 1 = qh$ para algum intéiro h. Isto implica que q divide o produto $(p - 1)(p + 1)$, e, como q é primo, q divide um dos fatores $p - 1$ ou $p + 1$. Sendo $p < q$, deve ser que q divide $p + 1$, e obtemos assim $p < q \leq p + 1$. A única possibilidade é $q = p + 1$ e um entre p e q é par e primo. Portanto segue que $p = 2$ e $q = 3$, i.e. $|G| = 36$.

(ii) Por quanto visto em (i), ou G possui um subgrupo normal de ordem diferente de 1 e p^2q^2, ou $|G| = 36$. No segundo caso, temos $n_3 = 4$. Sejam H_1, H_2, H_3, H_4 os 3-Sylows e identifique o grupo simetrico S^4 como o grupo das permutações de $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$. Considere o homomorfismo $\varphi\colon G \to S^4$ tal que $\varphi(g)$ é a permutação que envia H_i em H_i^g. Como $|G| = 36$ e $|S^4| = 24$ temos que $|Ker\varphi| \neq 1$. Além disso, temos $Ker\varphi \neq G$, pois os 3-Sylow não são normais. Concluimos que $Ker\varphi$ é um subgrupo normal de G de ordem diferente de 1 e p^2q^2.

Exercício 3. Mostre que um grupo G possui um p-Sylow, para p primo, seguindo os seguintes passos:

(i) se p não divide o índice de algum subgrupo próprio de G, logo o resultado segue usando indução;

(ii) se p divide o índice de todo subgrupo próprio de G, aplique a equação das classes para deduzir q que p divide a ordem do centro de G;

(iii) na hypotesi de (ii), mostre que existe um subgrupo H de ordem p do centro de G, e aplique a indução a G/H.

Solução: Seja $|G| = p^n m$, com p que não divide m. Se p não divide o índice de algum subgrupo próprio H de G, logo p^n divide $|H|$, e por indução H possui um p-Sylow, que é também um p-Sylow de G.

Se p divide o índice de todo subgrupo próprio de G, a equação das classes

$$|G| = |C(G)| + \sum \frac{|G|}{|C(x)|}$$

diz que p divide cada adendo do somatório. Como p divide $|G|$, deduzimos que p divide $|C(G)|$.

Enfim, na hypotesi de (ii), existe pelo teorema de Cauchy um subgrupo H de ordem p de $C(G)$. Como H é contido no centro de G, segue que H é normal em G, e podemos tomar o quociente G/H. Temos $|G/H| = p^{n-1}m$, e por indução existe um p-Sylow de G/H, i.e. um subgrupo S de G/H de ordem p^{n-1}. Um tal p-Sylow S é imagem de um subgrupo S' de G contendo H via a projeção canônica $\pi : G \to G/H$, i.e. $S = S'/H$. Temos $|S| = |S'|/|H|$, logo $|S'| = |S| \cdot p = p^n$, então S' é um p-Sylow de G.

Exercício 4. Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G.

(i) Mostre que um p-Sylow de H é sempre dado como interseção de um p-Sylow de G com H.

(ii) Mostre que se H é normal em G, então toda interseção de um p-Sylow de G com H é um p-Sylow de H.

Solução: (i) Se P' é um p-Sylow de H, logo como P' é um p-subgrupo de G, pelo teorema de Sylow existe um p-Sylow P de G tal que $P' \subseteq P$. Portanto $P' \subseteq P \cap H$. Mas $P \cap H$ tem ordem uma potência de p, pois é subgrupo do p-Sylow P. Como $P \cap H$ é subgrupo de H, então $P' = P \cap H$ pois P' é um p-Sylow de H.

(ii) Suponha que P é um p-Sylow de G. Como existe um p-Sylow de H, logo pelo (i) temos que existe um p-Sylow P' de G tal que $P' \cap H$ é p-Sylow de H. Mas pelo teorema de Sylow temos $P' = P^g$ para algum g em G. Como H é normal em G, temos

$$H \cap P' = H \cap P^g = H^g \cap P^g = (H \cap P)^g$$

Então $H \cap P$ tem cardinalidade de um p-Sylow de H e é conteudo em H, portanto $H \cap P$ é um p-Sylow de H.