EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – VE1 – 30/04/2015
GABARITO

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. (2 pts) Diga se a seguintes séries são condicionalmente convergentes, absolutamente convergentes ou divergentes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2-n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}+e^{-n}\right)$$

Solução:
Temos

$$\left|\frac{(-1)^n \ln n}{n^2-n+1}\right| = \frac{\ln n}{n^2-n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2-n+1} < \frac{2}{\sqrt{n^3}}.$$

De fato a última desigualdade é verdadeira se e somente se $n^2 < 2n^2-2n+2$, isto é se e somente se $n^2-2n+2>0$, que é verdade pois $n^2-2n+2=(n-1)^2+1>0$. Como $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n^3}}$ converge (série armônica de exponente maior do que 1), logo a primeira série converge absolutamente.

Tome a sequência $a_n := 1/n+e^{-n}$. Note que $a_n > 1/n$, logo a terceira série não é absolutamente convergente pelo critério de comparação. Claramente $a_n > 0$. Além disso, $a_n > a_{n+1}$ se e somente se $1/n+e^{-n} > 1/(n+1)+e^{-n-1}$, que é verdade pois $e^{-n-1} < e^{-n}$ (de fato, e^{-n} é decrescente) e pois $1/(n+1) < 1/n$ (de fato $1/n$ é decrescente). Portanto a_n é decrescente. Enfim, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Logo concluimos que, pelo critêrio das séries alternadas, a segunda série é condicionalmente convergente.

Exercício 2. (2.5 pts) Considere a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$

onde

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } n \text{ é par} \\ 3^{-n} & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}.$$

(a) Diga se o critério da razão pode ser aplicado par dizer que a série é convergente ou divergente.

(b) Diga se a série é convergente e, neste caso, calcule a sua soma.

Solução: (a) Temos que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \frac{3^{-n-1}}{2^{-n}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2^{-n-1}}{3^{-n}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}.$$

Assim temos que, como $\lim_{n\to+\infty}(2/3)^n = 0$ e $\lim_{n\to+\infty}(3/2)^n = +\infty$, segue que não existe $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ e portanto o critério da razão não pode ser aplicado.

(b) Temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2n} + 3^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2n}.$$

As duas últimas séries são convergentes, pois (múltiplos de) séries geometrias com base respetivamente $1/4$ e $1/9$, portanto a série inicial converge. Temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{1-1/4} + \frac{1}{3(1-1/9)} = \frac{4}{3} + \frac{3}{8} = \frac{41}{24}$$

Exercício 3. (3 pts) Considere a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

(a) Encontre o domínio de $f(x)$.
(b) Mostre que, se $f'(x)$ é a derivada de $f(x)$, logo existe um polinómio $p(x)$ tal que $f'(x) = p(x)f(x)$.
(c) Usando o série de Mac Laurin de e^x, diga explicitamente que função é $f(x)$.

Solução: (a) Aplicamos o criterio da razão:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{x^{2n}}{2^n n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{2(n+1)} = \frac{x^2}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Logo a função é definida em todo $\mathbb{R}$. Alternativamente, se $y := x^2$, temos que a função é a série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{2^n n!}$$

cujo raio de convergência é

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{2^n n!} = 2 \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$$

e portanto a série é absolutamente convergente em todo $\mathbb{R}$.

(b) Temos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = xf(x).$$

logo o polinómio procurado é $p(x) = x$.

(c) Como

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é claro que $f(x) = e^{x^2/2}$.

Exercício 4. (2.5 pts) Considere a equação diferencial

$$2x^2 y'' + x^2 y' + \frac{y}{2} = 0$$

(i) Mostre que $x_0 = 0$ é um ponto singular regular da equação diferencial.

(ii) Encontre pelo menos uma solução $y(x)$ da equação diferencial em torno do ponto $x_0 = 0$, determinando pelo menos os primeiros três termos diferentes de zero da sua expansão em série de Mac Laurin.

Solução: (i) O ponto $x_0 = 0$ é singular regular, pois o polinómio $2x^2$ se anula sobre x_0, e além disso os seguintes limites são finitos:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{x^2}{2x^2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\frac{1}{4x^2}\right) = \frac{1}{4}.$$

(ii) Vamos usar o método de Frobenius (em torno do ponto $x_0 = 0$). Procuramos uma solução do tipo

$$y = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r}, \text{ onde } a_0 \neq 0.$$

Temos

$$y' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \quad \text{e} \quad y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}.$$

Substituindo na equação obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r) x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2} x^{n+r} = 0$$

logo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} (n-1+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2} x^{n+r} = 0.$$

Tomando o termo de grau menor, temos $2a_0 r(r-1) + a_0/2 = 0$, logo a equação indicial é

$$2r(r-1) + \frac{1}{2} = 0,$$

e a sua única solução é $r = 1/2$. Tomando os outros termos para $r = 1/2$, obtemos, para $n \geq 1$:

$$2a_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) + a_{n-1}\left(n-\frac{1}{2}\right) + \frac{a_n}{2} = 0$$

isto é

$$a_n = \frac{1-2n}{4n^2+1} a_{n-1}.$$

Assim obtemos $a_1 = -a_0/5$, $a_2 = -3a_1/17 = 3a_0/85$. Logo uma solução é

$$y = 1 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{85}x^2 \ldots$$