ÁLGEBRA II – VE2 – 03/06/2014
GABARITO

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. Prove ou disprove as seguintes afirmações:
(i) O conjunto
$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$$
é um grupo com respeito a seguinte operação
$$(x,y) \cdot (z,w) = (xz, yz + w).$$
(ii) O subconjunto $S := 8\mathbb{Z} \cup 12\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ é um subgrupo do grupo $(\mathbb{Z}, +)$.
(iii) O subconjunto $S := 8\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ é um subgrupo do grupo $(\mathbb{Z}, +)$.

Solução: Verdadeiro. Primeiramente notamos que a operação é bem definida, pois se $(x,y),(w,z) \in G$, logo $x \neq 0$ e $w \neq 0$, e portanto $(xw, yw + z) \in G$. A operação é asociativa, pois
$$((x,y)\cdot(z,w))\cdot(u,v) = (xz, yz+w)\cdot(u,v) = (xzu, (yz+w)u+v)$$
$$(x,y)\cdot((z,w)\cdot(u,v)) = (x,y)\cdot(zu, wu+v) = (xzu, yzu+(wu+v))$$
logo $((x,y)\cdot(z,w))\cdot(u,v) = (x,y)\cdot((z,w)\cdot(u,v))$.

O elemento neutro deve ser um par (z,w) tal que
$$(x,y)\cdot(z,w) = (xz, yz+w) = (x,y) = (zx, wx+y) = (z,w)\cdot(x,y)$$
logo equivalentemente temos $xz = x$ e $yz + w = y = wx + y$. Como $x \neq 0$, a primeira implica $z = 1$ e a segunda $w = 0$. Logo a identidade é $(1,0)$.

Enfim, o inverso de um elemento (x,y) é (z,w) tal que
$$(x,y)\cdot(z,w) = (z,w)\cdot(x,y) = (1,0)$$
logo equivalentemente $xz = zx = 1$ e $yz+w = wx+y = 0$. Como $x \neq 0$, a primeira implica $z = 1/x$ e a segunda implica $w = -y/x$. Portanto o inverso de (x,y) é o elemento de G dado por $(1/x, -y/x)$.

(ii) Falso. Se $a = 8$ e $b = 12$, logo $a \in S$, $b \in S$, porém $a + b = 20$ não é multiplo nem de 8 nem de 12, logo $a + b \notin S$.

(iii) Verdadeiro. Sejam $a, b \in S$. Temos $a = 8h = 12k$ e $b = 8h' = 12k'$, para $h, k, h', k' \in \mathbb{Z}$. Logo $a - b = 8(h - h') = 12(k - k')$ e portanto $a - b \in S$.

Exercício 2. Prove que os seguintes grupos não são ciclicos:
$$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, (+,+)), \quad (\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4, (+,+)), \quad (S_n, \circ), \quad (\mathbb{Q}, +).$$

Solução:
Suponha por absurdo que $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} =< (a,b) >$ com $a, b \in \mathbb{Z}$. Logo $(1,0) = n\cdot(a,b)$ para algum intéiro $n \neq 0$. Portanto teríamos $na = 1$ e $nb = 0$. A primeira equação implica $a = n = \pm 1$ e a segunda $b = 0$. Mas também deveria ser $(0,1) = m\cdot(a,b) = m\cdot(\pm 1, 0)$ para algum inteiro $m \neq 0$, que implicaria $1 = m \cdot 0 = 0$, contradição.

Note que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ tem ordem 8. Este grupo não é cicilico, senão possuiria um elemento de ordem 8, em quanto as ordens dos elementos de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ são $1, 2, 4$.

Lembre que todo grupo ciclico é abeliano. Logo o grupo S_n não pode ser ciclico em quanto ele não é abeliano.

Suponha por absurdo que $\mathbb{Q} =< a >$, com $0 \neq a \in \mathbb{Q}$. A contradição vem do fato que $a/2 \in \mathbb{Q}$ mas $a/2 \neq n \cdot a$ para todo inteiro n, logo $a/2 \notin < a >$.

Exercício 3. Considere a seguinte permutação de S_5:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Escreva σ como produto de ciclos disjuntos e encontre σ^{-1}.
(ii) Calcule a ordem de σ. Calcule σ^{10}.
(iii) Diga se σ é uma permutação par ou impar.
Solução:
(i) Temos $\sigma = (134) \cdot (25)$ e

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) A ordem de σ é o minimo multiplicador comum dos comprimentos dos seus ciclos disjuntos, logo é igual a 6. Logo

$$\sigma^{10} = \sigma^6 \cdot \sigma^4 = \sigma^4 = (134)^4 \cdot (25)^4 = (134) \cdot (134)^3 \cdot (25)^2 \cdot (25)^2 = (134)$$

onde na última igualdade usamos que um r ciclo tem ordem r.

(iii) Temos $(134) = (14) \cdot (13)$ logo $(134) \cdot (25) = (14) \cdot (13) \cdot (25)$, então σ é impar.

Exercício 4. Seja D_n o grupo diedral das transformações de um poligono regular com n lados em si mesmo.

(i) Seja $n = 4$. Encontre um subgrupo de D_4 isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ e três subgrupos de D_4 isomorfos a $(\mathbb{Z}_2, +)$.

(ii) É possivel encontrar um subgrupo de D_n de ordem $n + 1$?

Solução: (i) Seja r a rotação antihorária de ángulo $\pi/2$ e s umas das reflexões de D_4. Temos que r tem ordem 4, logo

$$< r >= \{id, r, r^2, r^3\}$$

é um subgrupo de ordem 4 e um isomorfismo ψ de $< r >$ com $\mathbb{Z}_4$ é dado pondo $\psi(r^k) = k$ para $k = 0, 1, 2, 3$.

Temos que r^2 e s possuem claramente ordem 2. Também sr^2 possue ordem 2, pois se identificamos s com a permutação $(12)(34)$ e r^2 com a permutação $(13)(24)$, logo sr^2 é identificada com a permutação $(13)(24)(12)(34) = (14)(23)$, que tem ordem 2. Assim temos

$$< s >= \{id, s\}, \quad < r^2 >= \{id, r^2\}, \quad < sr^2 >= \{id, sr^2\},$$

que são todos subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_2$ pondo $\psi(id) = 0$ e, respetivamente $\psi(s) = 1$, $\psi(r^2) = 1$, $\psi(sr^2) = 1$ (lembre que necessáriamente estes subgrupos devem ser isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, pois *todo* grupo de ordem 2 é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$).

(ii) Pelo teorema de Lagrange, a ordem de um subgrupo de um grupo finito divide a ordem do grupo. Como $|D_n| = 2n$, logo $n + 1$ não pode dividir a ordem de D_n e portanto D_n não possui subgrupos de ordem $n + 1$.