EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VE2 – 02/07/2015
GABARITO

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. (a) (1 pt) Calcule a transformada de Laplace da seguinte função

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (t-1)e^{t-1} & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

b) (3 pts) Calcule as seguintes transformadas de Laplace inversas:

$$\mathcal{L}^{-1}(\ln(s^2+1)), \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$$

Solução A função é $f(t) = 1 + \mathcal{U}(t-1)(-1+(t-1)e^{t-1})$. Logo

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(\mathcal{U}(t-1)(-1+(t-1)e^{t-1}) = \frac{1}{s} + e^{-s}\mathcal{L}(-1+te^t) =$$

$$= \frac{1}{s} + e^{-s}\left(-\frac{1}{s} + \frac{d}{ds}\frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s} + e^{-s}\left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)^2}\right).$$

Devemos encontrar $f(t)$ tal que $\mathcal{L}(f(t)) = \ln(s^2+1)$. Temos

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t)) = \frac{d}{ds}\ln(s^2+1) = \frac{2s}{s^2+1}$$

logo

$$-tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t))\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+1}\right) = 2\text{cos}t$$

e portanto $f(t) = -2\text{cos}t/t$.

Vamos usar a convolução para calcular a transformada de Laplace inversa. Temos em geral

$$\mathcal{L}^{-1}(F(t)G(t)) = \mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G)$$

Logo

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \int_0^t \text{sen}(u)du = -[\cos(u)]_0^t = 1 - \cos(t))$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \int_0^t (1-\text{cos}u)\text{sen}(t-u)du =$$

$$= \int_0^t (\text{sen}t\text{cos}u - \text{sen}u\text{cos}t)(1-\text{cos}u))du =$$

$$[\text{sen}t\text{sen}u + \text{cos}u\text{cos}t]_0^t - \text{sen}t\int_0^t \text{cos}^2 u du + \text{cos}t\int_0^t \text{sen}u\text{cos}u du =$$

$$= 1 - \text{cos}t - \text{sen}t\left[\frac{1}{2}u + \frac{\text{sen}(2u)}{4}\right]_0^t + \text{cos}t\left[\frac{\text{sen}^2 u}{2}\right]_0^t =$$

$$= 1 - \text{cos}t - \text{sen}t\left(\frac{t}{2} + \frac{\text{sen}(2t)}{4}\right) + \text{cos}t\frac{\text{sen}^2 t}{2} = 1 - \text{cos}t - \frac{t\text{sen}t}{2}$$

Exercício 2. (1.5 pts) Calcule a seguinte integral imprópria:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}\text{sen}t}{t}\,dt$$

Solução: Temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}\text{sen}t}{t}\,dt = \mathcal{L}\left(\frac{\text{sen}t}{t}\right)(3).$$

Como

$$\mathcal{L}\left(\frac{\text{sen}t}{t}\right)(s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}(\text{sen t})(\tau)d\tau = \int_s^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2}d\tau = [\text{arctg}\tau]_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}s$$

logo

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}\text{sen}t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}3.$$

Exercício 3.(2 pts) Resolver o seguinte problema de valores iniciais usando a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x' + 3x + y' = 1 \\ x' - x + y' - y = e^t \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Solução: Sejam $X = \mathcal{L}(x)$ e $Y = \mathcal{L}(y)$. Temos

$$\begin{cases} sX - x(0) + 3X + sY - y(0) = \frac{1}{s} \\ sX - x(0) - X + sY - y(0) - Y = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} (s+3)X + sY = \frac{1}{s} \\ X + Y = \frac{1}{(s-1)^2} \end{cases}$$

Calculando X e Y obtemos:

$$X = \frac{1}{3s} - \frac{s}{3(s-1)^2} \quad Y = -X + \frac{1}{(s-1)^2} = -\frac{1}{3s} + \frac{s+3}{3(s-1)^2}.$$

Portanto

$$x = \mathcal{L}^{-1}(X) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s-1)+1}{(s-1)^2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(e^t + te^t).$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{(s-1)^2}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(e^t + 4te^t\right).$$

Exercício 4. (2.5 pts) Ache a solução geral do seguinte sistema sistemas de equações diferenciais usando álgebra linear:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Solução: O polinómio caracteristico da matriz do sistema é $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10$. Portanto os autovalores da matriz são $\lambda_1 = 3+i$ e $\lambda_2 = 3-i$. Um autovalor associado a λ_1 é o vetor $u + iv$, onde

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

É claro que $P^{-1} = P$. Portanto duas soluções linearmente independentes do sistema são dadas por

$$e^{At} = Pe^{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}P^{-1} = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos t + \mathrm{sen} t & \mathrm{sen} t \\ -2\mathrm{sen} t & \cos t - \mathrm{sen} t \end{bmatrix}$$

Portanto a solução geral é

$$\alpha_1 e^{3t} \begin{bmatrix} \cos t + \mathrm{sen} t \\ -2\mathrm{sen} t \end{bmatrix} + \alpha_2 e^{3t} \begin{bmatrix} \mathrm{sen} t \\ \cos t - \mathrm{sen} t \end{bmatrix}$$