ÁLGEBRA – VE3 – 02/12/2014
GABARITO

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. Seja F um corpo de caracteristica 2. Seja K/F uma extensão de grau 2, onde $K = F(\alpha)$ e α que satisfaz o polinómio $t^2 + bt + c \in F[t]$. Encontre uma condição necessária e suficiente para que K/F seja de Galois.

Solução: Temos que se α é raiz de t^2+bt+c, logo $t^2+bt+c = (t-\alpha)(t+\alpha+b)$. Note que K/F é normal, pois K é corpo de fatoração de $t^2 + bt + c$. Logo K/F é de Galois se e somente se K/F é separavel. Por um teorema visto na sala de aula, isto equivale a dizer que α é separavel, i.e. que $min(F, \alpha) = t^2 + bt + c$ é separavel. Isto acontece quando $-\alpha \neq \alpha + b$, ou seja, como $carF = 2$, quando $b \neq 0$.

Exercício 2. Seja $f(x) = x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Determine:
(i) o corpo de fatoração K de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$;
(ii) $[K : \mathbb{Q}]$;
(iii) o grupo de Galois $Gal(K/\mathbb{Q})$;
(iv) todos os corpos intermediários de $K/\mathbb{Q}$.

Solução: (i) Temos que $K = \mathbb{Q}(\omega)$, onde $\omega = e^{2\pi i/5}$.

(ii) Temos $min(\mathbb{Q}, \omega) = x^4+x^3+x^2+x+1$. De fato este polinómio é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ pois fazendo a substituição $x = y + 1$ obtemos:

$$(y + 1)^4 + (y + 1)^3 + (y + 1)^2 + (y + 1) + 1 =$$
$$(y^2 + 2y + 1)^2 + (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (y + 1) + 1 =$$
$$(y^4 + 4y^2 + 1 + 4y^3 + 2y^2 + 4y) + y^3 + 4y^2 + 6y + 4 =$$
$$= y^4 + 5y^3 + 10y^2 + 10y + 5.$$

Como o polinómio em y é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ por Eisensten, logo $x^4+x^3+x^2+x+1$ é também irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Portanto $[K : \mathbb{Q}] = 4$.

(iii) O elemento $\sigma \in Gal(K/\mathbb{Q})$ tal que $\sigma(\omega) = \omega^2$ é de ordem 4, logo $Gal(K/\mathbb{Q})$ é ciclico de ordem 4 gerado por σ.

(iv) Existe um único subcorpo intermediário de $K/\mathbb{Q}$ diferente de K e de $\mathbb{Q}$, que é o corpo fixado pelo único subgrupo não trivial de $Gal(K/\mathbb{Q})$, que é $< \sigma^2 >$. Temos que $\sigma^2(\omega^2) = \sigma(\omega)^4 = \omega^8 = \omega^3$ e $\sigma^2(\omega^3) = \sigma(\omega)^6 = \omega^{12} = \sigma^2$. Portanto temos que $\mathbb{Q}(\omega^2 + \omega^3) \subseteq \mathcal{F}(< \sigma^2 >)$.

De outro lado, temos $[\mathcal{F}(< \sigma^2 >: \mathbb{Q}] = [Gal(K/\mathbb{Q}) :< \sigma^2 >] = 2$. Além disso, temos $\mathbb{Q}(\omega^2 + \omega^3) \neq \mathbb{Q}$, e portanto segue que

$$\mathbb{Q}(\omega^2 + \omega^3) = \mathcal{F}(< \sigma^2 >).$$

Exercício 3. Seja K/F uma extensão de corpos. Lembre que $a \in K$ é um elemento primitivo da extensão se $K = F(a)$. Mostre que se K/F é finita e de Galois, então $a \in K$ é um elemento primitivo da extensão se e somente se $\sigma(a) \neq a$ para todo $id \neq \sigma \in Gal(K/F)$.

Solução: Temos que $a \in K$ é um elemento primitivo da extensão se e somente se $K = F(a)$. Pelo teorema de correspondência de Galois, isto acontece se e somente se $Gal(K/F(a)) = \{id\}$, que equivale a dizer que $\sigma(a) \neq a$ para todo $id \neq a \in Gal(K/F)$.

Exercício 4. Seja $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinómio irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Suponha que $f(x)$ tem raizes reais e não reais. Seja K o corpo de fatoração de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.

(i) Mostre que se $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é a conjugação complexa, logo $id \neq \sigma|_K \in Gal(K/\mathbb{Q})$.

(ii) Mostre que $Gal(K/\mathbb{Q})$ não é abeliano.

(iii) Se $f(x)$ não é irredutível, é verdade que $Gal(K/\mathbb{Q})$ é sempre não é abeliano?

(iv) Se $f(x) = x^n - a$, $a \neq 0$, e $F = \mathbb{Q}(\omega)$, onde $\omega = e^{2\pi i/n}$, logo mostre K é uma extensão de F e que $Gal(K/F)$ é abeliano.

Solução: (i) É claro que se $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é a conjugação complexa, temos que $\sigma|_K \in Gal(K/\mathbb{Q})$, pois K é gerado pelas raizes de $f(x)$ e pois a conjugada de uma raiz de $f(x)$ é ainda raiz de $f(x)$. Como existem raizes não reais de $f(x)$, logo $\sigma|_K \neq id$.

(ii) Sejam a e b raizes de $f(x)$, respectivamente real e não real. Como $f(x)$ é irredutível, logo $f(x)$ é o polinómio minimo de a e b, e portanto pelo teorema de extensão do isomorfismo existe um elemento $\tau \in Gal(K/\mathbb{Q})$ tal que $\tau(a) = b$. Mas então temos $\sigma|_K\tau(a) = \sigma|_K(b) = \overline{b}$, enquanto $\tau\sigma|_K(a) = \tau(a) = b$. Logo $\sigma|_K\tau \neq \tau\sigma|_K$ e $Gal(K/\mathbb{Q})$ não é abeliano.

(iii) Não: seja $f(x) = (x^2+1)(x^2-2)$. Logo o corpo de fatoração de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ é $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Temos $Gal(K/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que é abeliano.

(iv) É claro que K é uma extensão de F, pois $K = \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[n]{a}) = F(\sqrt[n]{a})$.

Um elemento $\sigma \in Gal(K/F)$ é determinado por $\sigma(\sqrt[n]{a})$. Mas $\sigma(\sqrt[n]{a})$ é raiz de $min(F, \sqrt[n]{a})$, que claramente divide $x^n - a$. Logo temos que $\sigma(\sqrt[n]{a})$ é uma raiz de $x^n - a$, i.e. $\sigma(\sqrt[n]{a}) \in \{\omega^i \sqrt[n]{a}\}_{i=0,\dots,n-1}$. Sejam agora $\sigma, \tau \in Gal(K/F)$ tais que $\sigma(\sqrt[n]{a}) = \omega^i \sqrt[n]{a}$ e $\tau(\sqrt[n]{a}) = \omega^j \sqrt[n]{a}$. Temos

$$\sigma\tau(\sqrt[n]{a}) = \sigma(\omega^j \sqrt[n]{a}) = \omega^{i+j} \sqrt[n]{a}$$
$$\tau\sigma(\sqrt[n]{a}) = \tau(\omega^i \sqrt[n]{a}) = \omega^{i+j} \sqrt[n]{a}$$

e portanto $Gal(K/F)$ é abeliano.