EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VR – 07/07/2015
GABARITO

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. Diga se a seguinte série é divergente, convergente, convergente absolutamente:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n \cdot \log(n) \cdot \log(\log(n))}$$

Solução: Vamos ver se a série é abs. convergente, aplicando o critério da integral. Seja

$$f(x) := \frac{1}{x \cdot \log(x) \cdot \log(\log(x))}$$

Temos que $f(x)$ é positiva para todo $x \geq 3$. Além disso:

$$f'(x) = \frac{\log(x) \cdot \log(\log(x)) + \log(\log(x)) + 1}{(x\log(x) \cdot \log(\log(x))^2}$$

logo $f'(x) < 0$ para $x \geq 3$ e portanto a $f(x)$ é decrescente em $(3, +\infty)$. Vamos calcular a integral imprópria. Temos

$$\lim_{t\to+\infty} \int_3^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \log(x) \cdot \log(\log(x))} dx = \lim_{t\to+\infty} \log(\log(\log(x))) - \log(\log(\log(3))) = +\infty.$$

Portanto a série não é absolutamente convergente. Considere

$$a_n := \frac{1}{n \cdot \log(n) \cdot \log(\log(n))}$$

Como a_n é crescente, logo $1/a_n$ é decrescente. Como $1/a_n$ é também positiva e

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

logo pelo critério das séries alternadas temos que a série dada é convergente.

Exercício 2. Considere a equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (x + 1)y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é ponto singular regular.
(b) Mostre que $r = 1/2$ é raiz da equação indicial em torno $x = 0$.
(c) Escreva em série de potências em torno de $x = 0$ uma solução da equação diferencial que corresponde a raiz $r = 1/2$ da equação indicial.

Solução: (a) O único ponto singular é $x = 0$, e é facil ver que se trata de um ponto regular.

(b) Escreve a solção e suas derivadas como

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n}, \quad y' = \sum_{n=0}^{+\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{+\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}.$$

Substituendo na equação temos:

$$0 = 2x^2y'' - xy' + (1+x)y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n}$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{r+n}$$

Temos $2a_0r(r-1) - ra_0 + a_0 = 0$, e $a_n(2(r+n)(r+n-1) - (r+n)+1) + a_{n-1} = 0$ para $n \geq 1$. Logo a equação indicial é $2r^2 - 3r + 1$ e $r = 1/2$ é uma sua raiz

(c) Encontramos uma solução dada pela raiz indicial $r = 1/2$. Temos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2 - 3(r+n) + 1}$$

que para $r = 1$ fica $a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}$. Temos $a_1 = -\frac{a_0}{1\cdot 1}$, $a_2 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} = \frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 3}$ e em geral $a_n = (-1)^n \frac{a_0}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)n!}$. Portanto uma solução é dada por

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n} = x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)n!}\right).$$

Exercício 3. (2.5 pts) Cosidere a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} y'' + y = g(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

onde $g(t)$ é uma função contínua, tal que $|g(t)| \leq e^t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Diga, justificando cuidadosamente a sua resposta, se a solução da equação é dada pela fórmula:

$$y = \int_0^t \operatorname{sen}(u)\cdot g(t-u)du.$$

Solução: Sim, a solução é do tipo indicado. De fato, aplicando a transformada de Laplace, e pondo $Y = \mathcal{L}(y)$, temos:

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = \mathcal{L}(g(t)) \;\Rightarrow\; Y = \frac{1}{s^2+1}\cdot\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(\operatorname{sen} t)\cdot\mathcal{L}(g(t))$$

onde $\mathcal{L}(g(t))$ existe pois $g(t)$ é uma função contínua, tal que $|g(t)| \leq e^t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Portanto

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(\operatorname{sen} t)\cdot\mathcal{L}(g(t))\right) = \operatorname{sen} t * g(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(u)\cdot g(t-u)du$$

Exercício 4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule a exponencial de A.

(b) Encontre a solução do sistema de equações diferenciais $x'(t) = A\cdot x(t)$ tal que $x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, onde $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

Solução: (a) Temos que $A^2 = 0$, logo a exponencial de A é dada por

$$e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1+t & t & t \\ t & 1+t & t \\ -2t & -2t & -2t+1 \end{bmatrix}$$

(c) A solução geral é dada por

$$x(t) = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1+t \\ t \\ -2t \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ -2t \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} t \\ t \\ -2t+1 \end{bmatrix}$$

Impondo que $x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ obtemos $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ -2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{bmatrix}$ resolvendo o sistema encontramos $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$ e $\alpha_3 = -11$, logo a solução procurada é

$$\begin{bmatrix} -3t+3 \\ -3t+5 \\ 6t-11 \end{bmatrix}$$