**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VS – 10/06/2014**
**GABARITO**

PROFESSOR MARCO

**Exercício 1.** Use o critério da integral para dizer se a seguinte série é divergente ou convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

**Solução**: As hypotesis do critério da integral são satisfeitas. Temos

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} dx = -\int_2^{+\infty} \log x \, d\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{t \to +\infty} \left( \left[ \frac{\log x}{x} \right]_2^t + \int_2^t \frac{1}{x^2} dx \right) =$$

$$= -\lim_{t \to +\infty} \left( \frac{\log t}{t} - \frac{\log 2}{2} - \left[ \frac{1}{x} \right]_2^t \right) = -\lim_{t \to +\infty} \left( -\frac{\log 2}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2},$$

e portanto a série dada é convergente.

**Exercício 2.** Considere a equação diferencial

$$x(x-1)y'' + 6x^2 y' + (2 + x^2) y = 0$$

onde $y = y(x)$. Determine a equação indicial e as suas raizes em pelo menos um ponto singular regular da equação.

**Solução**: Os pontos singulares são os ponto $x = 0$ e $x = 1$. Estes são pontos singulares regulares, pois

$$\lim_{x \to 0} \left( x \cdot \frac{6x^2}{x(x-1)} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \left( x^2 \cdot \frac{2 + x^2}{x(x-1)} \right) = 0.$$

$$\lim_{x \to 1} \left( (x-1) \cdot \frac{6x^2}{x(x-1)} \right) = 6 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1} \left( (x-1)^2 \cdot \frac{2 + x^2}{x(x-1)} \right) = 0.$$

Consideramos o ponto singular regular $x_0$, onde $x_0 = 0, 1$. Para encontrar a equação indicial e as suas raizes vamos substituir na equação a série

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}, \text{ onde } a_0 \neq 0 \text{ e } r \in \mathbb{R}.$$

Temos

$$y' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r)(x - x_0)^{n+r-1} \text{ e } y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r)(n+r-1)(x - x_0)^{n+r-2}.$$

Para $x_0 = 0$ temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} +$$

$$+6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(r+n)x^{n+r+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r+2} = 0.$$

A equação indicial é obtida considerando o coeficiente do termo em $x^{r-1}$ desta soma de séries. Logo equação indicial é $r(r-1) = 0$, e as suas raizes são $r = 0$ e $r = 1$.

**Exercício 3.** Resolva o seguinte PVI através da transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x' = y + \cos t \\ y' = x + 3\text{sen}t \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**Solução**: Aplicando a transformada de Laplace, com $X = \mathcal{L}(x)$ e $Y = \mathcal{L}(y)$, e usando as condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} sX = Y + \frac{s}{1+s^2} \\ sY = X + \frac{3}{1+s^2} \end{cases}$$

Logo $Y = sX - \frac{s}{1+s^2}$ e $s(sX - \frac{s}{1+s^2}) = X + \frac{3}{1+s^2}$ e $X(s^2-1) = \frac{s^2}{1+s^2} + \frac{3}{1+s^2} = \frac{s^2+3}{1+s^2}$, que fornece

$$\begin{cases} X = \frac{s^2+3}{(s^2-1)(1+s^2)} \\ Y = \frac{4s}{(s^2-1)(1+s^2)} \end{cases}$$

Escrevendo $X$ e $Y$ em frações parciais obtemos $X = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{1+s^2}$ e $Y = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{1+s^2}$ e portanto

$$\begin{cases} x = \mathcal{L}^{-1}(X) = -e^{-t} + e^t - \text{sen}t \\ y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-t} + e^t + \frac{1}{6}\text{sen}t \end{cases}$$

**Exercício 4.** Ache a solução geral do seguinte sistema sistemas de equações diferenciais usando a álgebra linear:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

**Solução**: O polinómio carateristico da matriz do sistema é

$$p(c) = \det \begin{bmatrix} 1-c & 1 & 0 \\ -1 & -1-c & 1 \\ 1 & 1 & -c \end{bmatrix} = c(1+c)(1-c)+1-(1-c)-c = c(1+c)(1-c).$$

Logo os autovalores da matriz são $c = 0, -1, 1$. Vamos achar 3 autovetores linearmente independentes. Os autovetores relativos ao autovetor $c = 0$ são dados pelo sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que fornece as equações $a+b = 0$ e $a+b-c = 0$. Logo todos os autovetores relativos a $c = 0$ são do tipo $\lambda v_1$, onde $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Os autovetores relativos ao autovetor

$c = -1$ são dados pelo sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que fornece as equações $2a + b = 0$, $-a + c = 0$ e $a + b + c = 0$. Logo todos os autovetores relativos a $c = 0$ são do tipo $\lambda v_2$, onde $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Os autovetores relativos ao autovetor $c = 1$ são dados pelo sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que fornece as equações $b = 0$, $-a - 2b + c = 0$ e $a + b - c = 0$. Logo todos os autovetores relativos a $c = 0$ são do tipo $\lambda v_3$, onde $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Os três autovetores $v_1, v_2, v_3$ são independentes, logo a solução geral do nosso sistema é dada por

$$\lambda_1 e^{0t} v_1 + \lambda_2 e^{-t} v_2 + \lambda_3 e^t v_3 = \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$