

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VS – 14/07/2015
GABARITO

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. (2pts) Diga se a seguinte série é divergente, convergente, ou absolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\log n}{n} \right)^2$$

Solução: Vamos usar a estimativa $\log n < n$. Temos

$$\log n = \log(\sqrt[4]{n})^4 = 4\log \sqrt[4]{n} < 4\sqrt[4]{n}$$

e portanto

$$\left(\frac{\log n}{n} \right)^2 < \left(4 \frac{\sqrt[4]{n}}{n} \right)^2 = 16 \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{16}{n^{3/2}}$$

e portanto a série é absolutamente convergente pois confrontamos com a série aritmética de expoente $3/2$, que é convergente.

Exercício 2. (3 pts) Considere a equação diferencial

$$2x^2 y'' - xy' + (x+1)y = 0.$$

- (a) Mostre que $x = 0$ é ponto singular regular.
- (b) Mostre que $r = 1$ é raiz da equação indicial em torno $x = 0$.
- (c) Escreva em série de potências em torno de $x = 0$ uma solução da equação diferencial que corresponde a raiz $r = 1$ da equação indicial.
- (d) Encontre o raio de convergência da série encontrada no item (c).

Solução: (a) O único ponto singular é $x = 0$, e é fácil ver que se trata de um ponto regular.

(b) Escreva a solução e suas derivadas como

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n}, \quad y' = \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}.$$

Substituindo na equação temos:

$$\begin{aligned} 0 = 2x^2 y'' - xy' + (1+x)y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{r+n} \end{aligned}$$

Temos $2a_0r(r-1) - ra_0 + a_0 = 0$, e $a_n(2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1) + a_{n-1} = 0$ para $n \geq 1$. Logo a equação indicial é $2r^2 - 3r + 1$ e $r = 1$ é uma sua raiz

(c) Encontramos uma solução dada pela raiz indicial $r = 1$. Temos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2 - 3(r+n) + 1} = -\frac{a_{n-1}}{(r+n-1)(2(r+n)-1)}$$

que para $r = 1$ fica $a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}$. Temos $a_1 = -\frac{a_0}{3}$, $a_2 = -\frac{a_1}{5 \cdot 2} = \frac{a_0}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1}$ e em geral $a_n = (-1)^n \frac{a_0}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)n!}$. Portanto uma solução é dada por

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n} = x \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)n!} \right).$$

(d) Considere

$$a_n = (-1)^n \frac{a_0}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)n!}$$

Para calcular o raio de convergência, vamos calcular o limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2(n+1)+1)(n+1)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)n!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+3)(n+1) = +\infty$$

e portanto o raio de convergência é $+\infty$.

Exercício 3. (2,5 pts) Resolva o seguinte PVI através da transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = \cos(2t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace, com $X = \mathcal{L}(x)$, e $\mathcal{L}(x') = sX - x(0)$ e $\mathcal{L}(x'') = s^2X - sx(0) - x'(0)$, obtemos

$$s^2X + 4X = \frac{s}{s^2 + 4} \Rightarrow X = \frac{s}{(s^2 + 4)^2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + 4)^2} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + 4} \frac{1}{s^2 + 4} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + 4} \right) * \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + 4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2u) \sin(2(t-u)) du = \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2u) (\sin(2t)\cos(2u) - \cos(2t)\sin(2u)) du = \\ &= \frac{1}{2} \sin(2t) \int_0^t \cos^2(2u) du - \frac{1}{2} \cos(2t) \int_0^t \cos(2u) \sin(2u) du = \\ &= \frac{1}{2} \sin(2t) \int_0^t \frac{1 + \cos(4u)}{2} du - \frac{1}{2} \cos(2t) \int_0^t \frac{\sin(4u)}{2} du = \\ &= \frac{1}{2} \sin(2t) \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(4u)}{8} \right]_0^t - \frac{1}{2} \cos(2t) \left[-\frac{\cos(4u)}{8} \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{2} \sin(2t) \cdot \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)\cos(2t)}{4} \right) - \frac{1}{2} \cos(2t) \cdot \frac{\sin^2(2t)}{4} = \frac{t \sin(2t)}{4}. \end{aligned}$$

Exercício 4. (2,5 pts) Calcule a exponencial da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Solução: O polinômio característico da matriz é $p(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^3 - 2\lambda + 5)$. Logo os autovalores da matriz são $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1 - 2i$, $\lambda_3 = 1 + 2i$. Um autovetor

de λ_1 é $[1, 0, 0]$. Um autovetor de λ_2 é $u + iv$, onde $u = [1, 1, 1]$ e $v = [1, 1, 2]$. Considere portanto a matriz P e sua inversa P^{-1} :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A exponencial da matriz é

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 0 & -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$