ÁLGEBRA II – VE1 — 24/04/2014

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. (2 pts) Lembre que um intéiro $n \in \mathbb{Z}$ é dito *irredutível* se toda vez que n é escrito como $n = a \cdot b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, logo a ou b são invertíveis em $\mathbb{Z}$ (isto é igualis a 1 ou -1). Prove que se um intéiro irredutível n divide um produto de intéiros $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$, logo n divide pelo menos um dos a_i's.

Exercício 2. (3 pts) Considere os seguintes polinómios em $\mathbb{Q}[x]$:

$$f(x) = x^4 + 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = 2x^3 - 2$$

(i) Encontre o $\mathrm{MDC}(f, g) \in \mathbb{Q}[x]$ usando o algoritmo euclidiano e ache polinómios $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ em $\mathbb{Q}[x]$ de forma que a seguinte identidade de Bézout seja satisfeita:

$$\alpha(x) \cdot f(x) + \beta(x) \cdot g(x) = \mathrm{MDC}(f, g).$$

(ii) Seja p um primo impar e considere $f(x)$ e $g(x)$ como polinómios no anel $\mathbb{Z}_p[x]$. Encontre o $\mathrm{MDC}(f, g) \in \mathbb{Z}_p[x]$.

Exercício 3. (3 pts) (i) Diga para quais valores de $a \in \mathbb{Z}$ o seguinte polinómio em $\mathbb{Z}[x]$ é irredutível sobre os racionais:

$$f(x) = 50x^7 - 7ax^4 + 14a^2x^2 + 28$$

(ii) Diga se os seguintes polinómios em $\mathbb{Z}_2[x]$ são irredutível sobre $\mathbb{Z}_2$

$$f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1$$
$$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Exercício 4. (2 pts) Responda as seguintes perguntas:

(i) Quais são os polinómios irredutíveis sobre $\mathbb{C}$? E sobre $\mathbb{R}$?

(ii) Qual é o enunciado do teorema de Gauss?

(iii) Prove ou disprove a seguinte afirmação, i.e. prove caso a afirmação seja verdadeira, ou encontre um contra-exemplo caso afirmação seja falsa:

Seja $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e seja p um primo. Se a redução módulo p de $f(x)$ é redutível sobre $\mathbb{Z}_p$, logo $f(x)$ é redutível sobre $\mathbb{Z}$.