ÁLGEBRA – VE1 – 22/09/2014

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. Considere o grupo $G = (\mathbb{R}^2, +)$.
(i) Prove que o conjunto

$$H = \{(x, 5x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq G$$

é um subgrupo normal de G.
(ii) Prove que G/H é isomorfo ao grupo $(\mathbb{R}, +)$.

Exercício 2. Seja G um grupo de ordem p^2q^2, com p e q primos tais que $p < q$.
(i) Prove que se G não possui um q-Sylow normal, então G tem ordem 36.
(ii) Prove que G possui um subgrupo normal de ordem diferente de 1 e p^2q^2.

Exercício 3. Mostre que um grupo G possui um p-Sylow, para p primo, seguindo os seguintes passos:
(i) se p não divide o índice de algum subgrupo próprio de G, logo o resultado segue usando indução;
(ii) se p divide o índice de todo subgrupo próprio de G, aplique a equação das classes para deduzir q que p divide a ordem do centro de G;
(iii) na hypotesi de (ii), mostre que existe um subgrupo H de ordem p do centro de G, e aplique a indução a G/H.

Exercício 4. Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G.
(i) Mostre que um p-Sylow de H é sempre dado como interseção de um p-Sylow de G com H.
(ii) Mostre que se H é normal em G, então toda interseção de um p-Sylow de G com H é um p-Sylow de H.