EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – VE1 – 30/04/2015

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. (2 pts) Diga se a seguintes séries são condicionalmente convergentes, absolutamente convergentes ou divergentes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2 - n + 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + e^{-n} \right)$$

Exercício 2. (2.5 pts) Considere a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$

onde

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } n \text{ é par} \\ 3^{-n} & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases} .$$

(a) Diga se o critério da razão pode ser aplicado para dizer que a série é convergente ou divergente.
(b) Diga se a série é convergente e, neste caso, calcule a sua soma.

Exercício 3. (3 pts) Considere a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

(a) Encontre o domínio de $f(x)$.
(b) Mostre que, se $f'(x)$ é a derivada de $f(x)$, logo existe um polinómio $p(x)$ tal que $f'(x) = p(x)f(x)$.
(c) Usando a série de Mac Laurin de e^x, diga explicitamente que função é $f(x)$.

Exercício 4. (2.5 pts) Considere a equação diferencial

$$2x^2 y'' + x^2 y' + \frac{y}{2} = 0$$

(a) Mostre que $x_0 = 0$ é um ponto singular regular da equação diferencial.
(b) Encontre pelo menos uma solução $y(x)$ da equação diferencial em torno do ponto $x_0 = 0$, determinando pelo menos os primeiros três termos diferentes de zero da sua expansão em série depotências.