

## ÁLGEBRA II – VE2 – 03/06/2014

PROFESSOR MARCO

**Exercício 1.**(3pts) Prove ou disprove as seguintes afirmações:

(i) (1pt) O conjunto

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$$

é um grupo com respeito a seguinte operação

$$(x, y) \cdot (z, w) = (xz, yz + w).$$

(ii) (1pt) O subconjunto  $S := 8\mathbb{Z} \cup 12\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{Z}$  é um subgrupo do grupo  $(\mathbb{Z}, +)$ .

(iii) (1pt) O subconjunto  $S := 8\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{Z}$  é um subgrupo do grupo  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Exercício 2.** (2pts) Prove que os seguintes grupos não são cíclicos:

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (+, +)), \quad (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, (+, +)), \quad (S_n, \circ), \quad (\mathbb{Q}, +).$$

**Exercício 3.**(2.5pts) Considere a seguinte permutação de  $S_5$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) (0.5 pts) Escreva  $\sigma$  como produto de ciclos disjuntos e encontre  $\sigma^{-1}$ .

(ii) (1pt) Calcule a ordem de  $\sigma$ . Calcule  $\sigma^{10}$ .

(iii) (1pt) Diga se  $\sigma$  é uma permutação par ou ímpar.

**Exercício 4.**(2.5pts) Seja  $D_n$  o grupo diedral das transformações de um polígono regular com  $n$  lados em si mesmo.

(i) (2pts) Seja  $n = 4$ . Encontre um subgrupo de  $D_4$  isomorfo a  $(\mathbb{Z}_4, +)$  e três subgrupos de  $D_4$  isomorfos a  $(\mathbb{Z}_2, +)$ .

(ii) (0.5 pts) É possível encontrar um subgrupo de  $D_n$  de ordem  $n + 1$ ?