

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VE2 – 02/07/2015

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. (a) (1 pt) Calcule a transformada de Laplace da seguinte função

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (t-1)e^{t-1} & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

b) (2.5 pts) Calcule as seguintes transformadas de Laplace inversas:

$$\mathcal{L}^{-1}(\ln(s^2 + 1)), \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + 1)^2}\right)$$

Exercício 2. (1.5 pts) Calcule a seguinte integral imprópria:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t} \operatorname{sen} t}{t} dt$$

Exercício 3. (2.5 pts) Resolver o seguinte problema de valores iniciais usando a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x' + 3x + y' = 1 \\ x' - x + y' - y = e^t \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercício 4. (2.5 pts) Ache a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais usando álgebra linear:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Formulário. Seja \mathcal{L} a transformada de Laplace. Valem:

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \quad \mathcal{L}(\operatorname{sen}(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(t-a)f(t-a)) = e^{-as}\mathcal{L}(f), \quad \mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}(f(t))(s), \quad \mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g))(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du, \quad \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}(f(t)(u))du$$