ÁLGEBRA – VE3 – 02/12/2014

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. Seja F um corpo de caracteristica 2. Seja K/F uma extensão de grau 2, onde $K = F(\alpha)$ e α que satisfaz o polinómio $t^2 + bt + c \in F[t]$. Encontre uma condição necessária e suficiente para que K/F seja de Galois.

Exercício 2. Seja $f(x) = x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Determine:
(i) o corpo de fatoração K de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$;
(ii) $[K : \mathbb{Q}]$;
(iii) o grupo de Galois $Gal(K/\mathbb{Q})$;
(iv) todos os corpos intermediários de $K/\mathbb{Q}$.

Exercício 3. Seja K/F uma extensão de corpos. Lembre que $a \in K$ é um elemento primitivo da extensão se $K = F(a)$. Mostre que se K/F é finita e de Galois, então $a \in K$ é um elemento primitivo da extensão se e somente se $\sigma(a) \neq a$ para todo $id \neq \sigma \in Gal(K/F)$.

Exercício 4. Seja $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinómio irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Suponha que $f(x)$ tem raizes reais e não reais. Seja K o corpo de fatoração de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.
(i) Mostre que se $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é a conjugação complexa, logo $id \neq \sigma|_K \in Gal(K/\mathbb{Q})$.
(ii) Mostre que $Gal(K/\mathbb{Q})$ não é abeliano.
(iii) Se $f(x)$ não é irredutível, é verdade que $Gal(K/\mathbb{Q})$ é sempre não é abeliano?
(iv) Se $f(x) = x^n - a$, $a \neq 0$, e $F = \mathbb{Q}(\omega)$, onde $\omega = e^{2\pi i/n}$, logo mostre K é uma extensão de F e que $Gal(K/F)$ é abeliano.