ÁLGEBRA II 2014 – VR – 05/06/2014

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. (2pts) Prove que no anel de polinómios $\mathbb{Q}[x]$ existem infinitos polinómios irredutíveis.

Exercício 2. (3 pts) Escreva o polinómio

$$f(x) = x^4 - x^3 + 5x - 2 \in K[x],$$

como produto de polinómios irredutíveis em $K[x]$, onde $K = \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.

Exercício 3. (2 pts) Considere o grupo $G = (\mathbb{Q}, +)$ e sejam a e b dois intéiros primos entre si, isto é tais que $\mathrm{MDC}(a, b) = 1$. Mostre que o subgrupo de G gerado por $1/a$ e $1/b$ é ciclico gerado por $1/ab$, isto é mostre que vale

$$\left\langle \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{ab} \right\rangle.$$

Exercício 4. (3pts) Considere o subconjunto $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ do grupo $GL_3(\mathbb{R})$, onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Prove que S é um subgrupo de $GL_3(\mathbb{R})$ (dica: veja como as matrizes A_i agem sobre os vetores de $\mathbb{R}^3$);

(ii) Encontre as ordens dos elementos de S. O subgrupo S é ciclico?

(iii) O subgrupo S é isomorfo ao grupo simetrico S_3?