EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VR – 07/07/2015

PROFESSOR MARCO

Exercício 1. (2.5 pts) Diga se a seguinte série é divergente, convergente, convergente absolutamente:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n \cdot \log(n) \cdot \log(\log(n))}$$

Exercício 2. (3 pts) Considere a equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (x+1)y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é ponto singular regular.
(b) Mostre que $r = 1/2$ é raiz da equação indicial em torno $x = 0$.
(c) Escreva em série de potências em torno de $x = 0$ uma solução da equação diferencial que corresponde a raiz $r = 1/2$ da equação indicial.

Exercício 3. (2.5 pts) Cosidere a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} y'' + y = g(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

onde $g(t)$ é uma função contínua, tal que $|g(t)| \leq e^t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Diga, justificando cuidadosamente a sua resposta, se a solução da equação é dada pela fórmula:

$$y = \int_0^t \mathrm{sen}(u) \cdot g(t-u)du.$$

Exercício 4. (2 pts) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

(a) Calcule a exponencial de A.
(b) Encontre a solução do sistema de equações diferenciais $x'(t) = A \cdot x(t)$ tal que $x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, onde $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \quad \mathcal{L}(\mathrm{sen}(at)) = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(f(t))(s), \quad \mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g))(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du, \quad \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}(f(t)(u)du$$