Polinômios sobre domínios e corpos

Maria Lúcia Torres Villela
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática
Maio de 2008
Revisto em agosto de 2009

Sumário

Introdução

O objetivo deste texto é ser um apoio aos estudantes da disciplina Álgebra II, do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense, para o conteúdo correspondente ao estudo de polinômios com coeficientes em domínios e corpos. O objetivo principal é estudar a fatoração de polinômios em produto de potências de polinômios irredutíveis e chegar ao Teorema Fundamental da Álgebra.

Pressupomos que o estudante está familiarizado com os conceitos de anéis comutativos com unidade e de divisibilidade em anéis. Esperamos que já tenha visto que num domínio principal vale a fatoração única.

Na Parte 1 revemos o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, sob o ponto de vista de sua estrutura de corpo. Vamos definir as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$ e mostraremos que $\mathbb{C}$ é um corpo. As propriedades destas operações estão relacionadas diretamente com as propriedades da adição e multiplicação do corpo dos números reais.

Apresentamos a forma polar ou trigonométrica dos números complexos não-nulos, conveniente para calcular potências inteiras. Introduzimos o conceito de raiz n-ésima de um complexo não-nulo e mostramos que em $\mathbb{C}$ há n raízes complexas n-ésimas.

Introduzimos o conceito de raiz n-ésima da unidade em um corpo e mostramos que em $\mathbb{C}$ há n raízes complexas n-ésimas da unidade.

Na Parte 2 revemos o anel dos polinômios com coeficientes em anéis comutativos com unidade, com ênfase nos domínios dos polinômios com coeficientes em domínios e corpos.

Introduziremos o conceito de raiz de um polinômio e de de corpos algebricamente fechados.

Vamos fatorar polinômios com coeficientes em corpos em produto de potências de polinômios irredutíveis.

Estudaremos critérios de irredutibilidade em $\mathbb{Q}[x]$ e em $\mathbb{Z}[x]$.

Vamos relacionar a existência de raízes complexas para polinômios $f(x)$ de coeficientes reais com a sua divisibilidade por polinômios quadráticos do tipo x^2+bx+c, com $\Delta = b^2-4c < 0$, ou por $x-\beta$, com $\beta \in \mathbb{R}$, e obteremos o Teorema Fundamental da Álgebra.

Finalizaremos com a resolução de equações de segundo, terceiro e quarto graus por radicais de funções algébricas racionais dos seus coeficientes.

Recomendamos os seguintes textos:

- *Elements of Abstratc Algebra*, R. A. Dean, Wiley Internacional, 1974.
- *Curso de Álgebra, Volume 1*, Abramo Hefez, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2^{a} edição, 2004.
- *Curso de Álgebra, Volume 2*, Abramo Hefez, Notas (a ser publicado, Coleção Matemática Universitária, IMPA).
- *Introdução à Álgebra*, Adilson Gonçalves, Projeto Euclides, IMPA, 2000.
- *Topics in Algebra*, I. N. Herstein, John Wiley & Sons, 2^{nd} edition, 1975.
- *Algebra*, Thomas W. Hungerford, Springer-Verlag, 1974.

Parte 1

Números complexos

Vamos definir os números complexos $\mathbb{C}$ e representá-los graficamente por pares ordenados.

Aprenderemos as operações de adição e multiplicação de números complexos e suas propriedades, mostrando que $\mathbb{C}$ é um corpo que contém $\mathbb{R}$ como subcorpo.

Introduziremos a conjugação de números complexos e mostraremos as suas propriedades, assim como o conceito de módulo de um número complexo.

Apresentaremos a forma polar ou trigonométrica de um número complexo não-nulo, que explicita o seu módulo e o seu argumento. Faremos a multiplicação de números complexos na forma polar, interpretaremos geometricamente a multiplicação e calcularemos potências inteiras de números complexos não-nulos escritos na forma polar.

Definiremos raízes n-ésimas em um corpo K e mostraremos que em $\mathbb{C}$ há n raízes complexas n-ésimas de um número complexo não-nulo.

Finalizaremos com o conceito de raízes n-ésimas da unidade em um corpo, mostrando que em $\mathbb{C}$ há n raízes complexas n-ésimas da unidade além de introduzir o conceito de raiz primitiva n-ésima da unidade.

O corpo dos números complexos

Procurar soluções para equações tem sido uma fonte de inspiração para ampliar os conjuntos numéricos. No conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não podemos resolver a equação $x + 3 = 0$. Ampliando esse conjunto para os números inteiros $\mathbb{Z}$, a equação anterior passa a ter solução, pois $-3 \in \mathbb{Z}$. A inclusão de números negativos não resolve completamente os nossos problemas. Pois, há equações sem solução em $\mathbb{Z}$, por exemplo, $5x - 3 = 0$. Ampliamos o conjunto dos inteiros para o conjunto dos números racionais.

Com o objetivo de realizar a operação de radiciação, o conjunto dos números racionais precisou ser ampliado para o conjunto dos números reais. Desse modo, números irracionais tais como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\ldots$, foram incluídos no nosso sistema numérico, permitindo extrair raízes n-ésimas e resolver equações tais como $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$, $x^3 - 2 = 0$, $x^3 - 5 = 0$, $\ldots$, antes sem solução em $\mathbb{Q}$.

Os hindus **Mahavira**, em 850 a.C., e **Bhaskara**, em 1150 a.C., foram os primeiros a indicar que números reais negativos não tinham raiz quadrada porque números negativos não podiam ser quadrados.

Cardan, em 1545, no trabalho *Ars Magna*, foi o primeiro a usar a raiz quadrada de números negativos e efetuar operações com números complexos.

Euler, em 1748, usou a letra i, em vez de $\sqrt{-1}$, para designar o número cujo quadrado é -1.

Em 1832, **Gauss** usou pela primeira vez o nome números complexos.

Obtivemos os conjuntos numéricos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Entretanto, equações tais como $x^2+1 = 0$, $x^2+2 = 0$, $x^2+x+1 = 0$ não têm solução no conjunto dos números reais, pois não podemos extrair raízes quadradas de números reais negativos. Você, certamente, sabe dar muitos outros exemplos de equações com coeficientes reais que não têm solução em $\mathbb{R}$.

Motivados pelas construções anteriores, ampliamos o conjunto dos números reais, construindo um conjunto de números que contenha os números reais e onde seja possível *extrair raízes quadradas de números reais negativos*.

Seja i um símbolo com a propriedade $i^2 = -1$. Também escrevemos $i = \sqrt{-1}$.

O conjunto dos *números complexos* $\mathbb{C}$ é definido por:

$$\mathbb{C} = \{\, a + bi\ ;\ a,\ b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1 \,\}.$$

Definição 1 (Igualdade de números complexos)
Dizemos que $a + bi = c + di$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Exemplo 1
Os números $1 + 4i$, $-3 + 2i$, $-1 - 2i$, $2 - \frac{7}{2}i$, $\sqrt{8} + \sqrt[3]{10}i$, $2 - 5i$, $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-3 - 7i$ e $\sqrt[4]{5} + 3i$ são números complexos.

Quando $b = 0$, escrevemos $a + bi$ como a:

Descartes, em 1637, no trabalho *La Géométrie*, classificou os números como reais e imaginários considerando os números complexos como soluções de equações.

Para ele, os números imaginários eram os números complexos $a+bi$ com $b \neq 0$

John Wallis, em 1685, no trabalho *Algebra*, interpretou os números com quadrado negativo como medida de áreas negativas, pois naquela época a noção de comprimentos negativos era bem aceita.

Caspar Wessel, em 1797, foi o primeiro a representar graficamente os números complexos, desenhando uma reta perpendicular à reta real, o eixo imaginário.

O tratamento rigoroso moderno dos números complexos como pares de números reais foi apresentado por **Hamilton**, em 1853. Mais tarde ele estendeu esses números ao espaço de quatro dimensões, no trabalho *Lectures on Quaternions*.

$$a + 0i = a \in \mathbb{C}$$

logo, o conjunto dos números reais é subconjunto dos números complexos,

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Quando o número $a + bi$ não é um número real, temos $b \neq 0$.

Quando $a = 0$ e $b \neq 0$, dizemos que o número complexo $a + bi$ é um *imaginário puro* e representamos por bi:

$$0 + bi = bi,\ b \neq 0.$$

Quando $a = 0$ e $b = 0$, escrevemos o número $0 + 0i$ como 0.

$$0 + 0i = 0.$$

Exemplo 2

Os números reais $1 = 1 + 0i$ e $-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} + 0i$ são números complexos. Os números complexos $3 - 6i$, $-2i$, i, $\sqrt[5]{3}i$ e $-\frac{4}{3}i$ não são números reais, sendo os quatro últimos imaginários puros.

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é visualizado num plano cartesiano, associando a cada número complexo $a + bi$ o ponto do plano representado pelo par ordenado de números reais (a, b). Reciprocamente, a cada ponto do plano representado pelo par ordenado de números reais (a, b) associamos o número complexo $a + bi$.

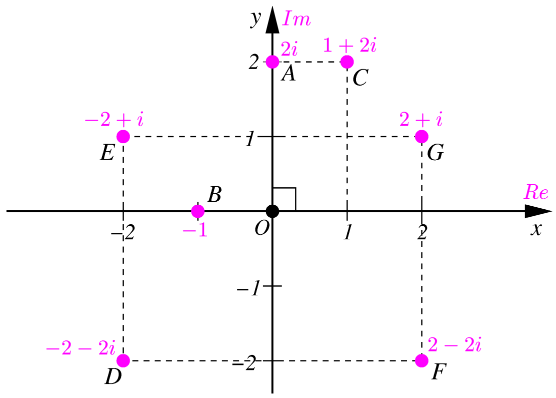


Fig.1: Representação dos números complexos por pontos do plano

Nessa correspondência, os números reais a são representados pelos pontos $(a, 0)$ do eixo x, chamado *eixo real*, e os números imaginários puros bi são representados pelos pontos $(0, b)$ do eixo y, chamado *eixo imaginário*.

Exemplo 3

Na figura 1, representamos o imaginário puro $2i$ pelo ponto $A = (0, 2)$, o número real -1 por $B = (-1, 0)$, $1 + 2i$ pelo ponto $C = (1, 2)$, $-2 - 2i$ pelo ponto $D = (-2, -2)$, $-2 + i$ pelo ponto $E = (-2, 1)$, $2 - 2i$ pelo ponto $F = (2, -2)$ e $2 + i$ pelo ponto $G = (2, 1)$.

Definição 2 (Parte real e parte imaginária)

Dado o número complexo $z = a + bi$, chamamos a de *parte real* e b de *parte imaginária* de z e indicamos pelos símbolos

$$\mathrm{Re}(z) = a \quad \text{e } \mathrm{Im}(z) = b.$$

Da definição de igualdade de números complexos segue que $z = a + bi$ e $w = c + di$ são iguais se, e somente se, suas partes real e imaginária são iguais, isto é, $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$.

Exemplo 4

(a) Considerando $z = 3 - 5i$, temos $\mathrm{Re}(z) = 3$ e $\mathrm{Im}(z) = -5$.

(b) No número complexo $z = -2\sqrt{3} + (1 - \sqrt{2})i$, temos $\mathrm{Re}(z) = -2\sqrt{3}$ e $\mathrm{Im}(z) = 1 - \sqrt{2}$.

(c) Quais são os números reais a e b tais que $-2 + (2a - b)i = (a + b) + 3i$?

Igualando as partes reais e imaginárias dos números complexos, obtemos

$$-2 = a + b \text{ e } 2a - b = 3.$$

Para resolver o sistema de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$$

somamos as equações, eliminando a incógnita b e obtemos

$$(a + b) + (2a - b) = -2 + 3\ .$$

Assim, $3a = 1$. Logo, $a = \frac{1}{3}$. Substituindo esse valor na primeira equação, calculamos $b = -2 - a = -2 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$.

Definição 3 (Operações de adição e multiplicação de números complexos)

Sejam $a+bi$ e $c+di$ números complexos. Definimos a *adição* desses números complexos por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

O resultado da adição de dois números complexos é chamado de soma.

e a sua *multiplicação* por

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

O resultado da multiplicação de dois números complexos é chamado de produto.

Observação: • A soma de dois números complexos é o número complexo que tem como parte real a soma das partes reais das parcelas e, como parte imaginária, a soma das partes imaginárias das parcelas.

• Identificando $z = a + bi \neq 0$ e $w = c + di \neq 0$, respectivamente, com os pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, vemos que a soma $z + w = (a + c) + (b + d)\,i$, é o número complexo representado pelo ponto $C = (a + c, b + d)$, onde OC é a diagonal do paralelogramo com lados adjacentes OA e OB. Esta é a chamada *regra do paralelogramo* (Figura 2).

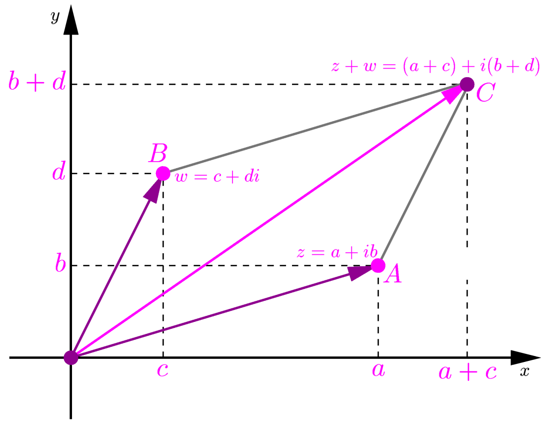


Fig. 2: Regra do paralelogramo para a soma $z + w$.

• A multiplicação foi definida de modo a ter a propriedade distributiva. Podemos calcular o produto, usando a distributividade, substituindo $i^2 = -1$ e juntando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + bi(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i\,.\end{aligned}$$

Exemplo 5

Tomando $z = 1 - 2i$ e $w = 2 + 3i$, temos

$$\begin{aligned}z + w &= (1 - 2i) + (2 + 3i) = (1 + 2) + (-2 + 3)i = 3 + i \quad \text{e} \\ z \cdot w &= (1 - 2i) \cdot (2 + 3i) = 1 \cdot (2 + 3i) - 2i \cdot (2 + 3i) \\ &= 2 + 3i - 4i - 6i^2 = (2 + 6) + (3 - 4)i = 8 - i\,.\end{aligned}$$

Faça a representação gráfica da soma utilizando a regra do paralelogramo.

Proposição 1 ($\mathbb{C}$ é um corpo)

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um corpo.

Demonstração: Vamos mostrar que $\mathbb{C}$ é um anel (propriedades A1, A2, A3, A4, M1, AM) comutativo (M2) com unidade (M3) tal que todo elemento não-nulo tem inverso (M4). As propriedades de adição e multiplicação de números complexos são decorrência das propriedades de adição e multiplicação de números reais.

Lembre que:

A adição e multiplicação de números reais é comutativa, associativa e distributiva.

Nos reais, 0 é elemento neutro aditivo e 1 é elemento neutro multiplicativo.

Todo real tem simétrico e todo real não-nulo tem inverso.

Sejam $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$ números complexos. Então,

(A1)-(M1) Associativa:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad \text{e}$$
$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)\,.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
(z_1+z_2)+z_3 &\overset{(1)}{=} ((a+c)+(b+d)i)+(e+fi)\\
&\overset{(2)}{=} ((a+c)+e)+((b+d)+f)i\\
&\overset{(3)}{=} (a+(c+e))+(b+(d+f))i\\
&\overset{(4)}{=} (a+bi)+((c+e)+(d+f)i)\\
&\overset{(5)}{=} z_1+(z_2+z_3)
\end{aligned}
$$

Em (1) e (2) usamos a definição da adição em $\mathbb{C}$; em (3), a associatividade da adição em $\mathbb{R}$; em (4) e (5), novamente a definição da adição em $\mathbb{C}$.

(A2)-(M2) Comutativa:

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i=(c+a)+(d+b)i=z_2+z_1 \quad \text{e}$$

$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i=(ca-db)+(da+cb)i=z_2\cdot z_1.$$

(A3) Elemento neutro aditivo: 0

O número $0=0+0i$ é tal que, $(a+bi)+(0+0i)=a+bi$.

(M3) Elemento neutro multiplicativo: 1

O número $1=1+0i$ é tal que, $(a+bi)(1+0i)=a+bi$.

(A4) Existência do simétrico: O simétrico de $a+bi$ é $-a-bi$, pois

$$(a+bi)+(-a-bi)=0+0i=0.$$

(M4) Existência do inverso:

O inverso de $z_1=a+bi\neq 0$ é $\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$, pois

$a^2+b^2\neq 0$ e $(a+bi)\cdot\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i\right)=1$.

(AM) Distributiva: $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

$$
\begin{aligned}
z_1\cdot(z_2+z_3) &\overset{(1)}{=} (a+bi)\cdot((c+e)+(d+f)i)\\
&\overset{(2)}{=} (a(c+e)-b(d+f))+(a(d+f)+b(c+e))i\\
&\overset{(3)}{=} (ac+ae-bd-bf)+((ad+af)+(bc+be))i\\
&\overset{(4)}{=} ((ac-bd)+(ae-bf))+((ad+bc)+(af+be))i\\
&\overset{(5)}{=} ((ac-bd)+(ad+bc)i)+((ae-bf)+(af+be)i)\\
&\overset{(6)}{=} z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3
\end{aligned}
$$

Em (1) usamos a definição da adição em $\mathbb{C}$; em (2), a definição da multiplicação em $\mathbb{C}$; em (3) a distributividade em $\mathbb{R}$; em (4), a comutatividade e a associatividade da adição em $\mathbb{R}$; em (5), a definição da adição em $\mathbb{C}$, e em (6) a definição da multiplicação em $\mathbb{C}$.

Você deve fazer a demonstração das propriedades associativa (M1) e comutativa (M2) da multiplicação. ■

Corolário 1

$\mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$.

Demonstração: Basta observar que $\mathbb{R}$ é um corpo com as operações de $\mathbb{C}$.

■

Exemplo 6

Consideremos os números complexos $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 1-\sqrt{2}i$, $z_3 = 1+\sqrt{2}\,i$, $z_4 = 2i$, $z_5 = 2+3i$ e $z_6 = \sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$. Vamos usar a definição das operações e as propriedades acima, para efetuar os cálculos pedidos:

(a) $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1-2i)\cdot(1-\sqrt{2}\,i) = 1(1-\sqrt{2}\,i) + (-2i)(1-\sqrt{2}\,i) \\ &= 1-\sqrt{2}\,i - 2i + 2\sqrt{2}i^2 = (1-2\sqrt{2}) + (-2-\sqrt{2})i\,. \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} z_2 \cdot z_3 &= (1-\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i) = 1\cdot(1+\sqrt{2}\,i) + (-\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i) \\ &= (1+\sqrt{2}\,i) - \sqrt{2}\,i - (\sqrt{2})^2 i^2 = (1+2) = 3. \end{aligned}$$

(c) $\dfrac{1}{z_1}$

Nesse caso, sendo $a = 1$ e $b = -2$, temos $a^2 + b^2 = 1 + (-2)^2 = 5$.

Logo, $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1+2i}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i.$

(d) $\dfrac{z_5}{z_4}$

Como todo complexo não-nulo tem inverso, escrevemos $\dfrac{z_5}{z_4} = z_5 \cdot \dfrac{1}{z_4}$.

Note que $\dfrac{1}{z_4} = \dfrac{1}{2i} = \dfrac{-2i}{(-2)^2} = -\dfrac{i}{2}$. Logo,

$$\frac{z_5}{z_4} = z_5 \cdot \frac{1}{z_4} = (2+3i)\left(-\frac{i}{2}\right) = 2\left(\frac{-i}{2}\right) + 3i\left(\frac{-i}{2}\right) = \frac{3}{2} - i\,.$$

(e) z_6^4

Usando a fórmula do binômio de Newton e que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$, temos

$$\begin{aligned} z_6^4 &= (\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)^4 \\ &= (\sqrt{2})^4 + \tbinom{4}{1}(\sqrt{2})^3\sqrt{2}\,i + \tbinom{4}{2}(\sqrt{2})^2(\sqrt{2}\,i)^2 + \tbinom{4}{3}(\sqrt{2})(\sqrt{2}\,i)^3 + (\sqrt{2}\,i)^4 \\ &= 4 + \tfrac{4!}{3!}(\sqrt{2})^4 i + \tfrac{4!}{2!2!}(\sqrt{2})^4(-1) + \tfrac{4!}{3!}(\sqrt{2})^4(-i) + 4 \\ &= 4 + 16i - 24 - 16i + 4 = -16\,. \end{aligned}$$

Dado $z = a+bi$, tomamos $x = a$ e $y = bi$ na fórmula do *binômio de Newton* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, para calcular $z^n = (a+bi)^n$.

Em qualquer anel estão definidas as potências com expoentes naturais positivos.

Definição 4 (Potências)

Para cada número natural n e cada número complexo z, definimos:

$$z^0 = 1, \text{ se } z \neq 0, \qquad z^1 = z$$

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n \text{ fatores}},\ n \geq 2, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n},\ z \neq 0$$

Exemplo 7

Vamos calcular a potência i^n, para todo expoente n inteiro.

Já sabemos que: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$.

A partir de $n = 5$, os valores começam a se repetir:

$i^5 = i^4 \cdot i = i^1$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2$, $i^7 = i^4 \cdot i^3 = i^3$, $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1, \ldots$.

É claro que não vamos calcular para todos os valores inteiros. Já entendemos o que acontece: quando dois inteiros diferem de 4, o valor da potência de i é o mesmo.

Dado o número inteiro n, fazemos a divisão euclidiana de n por 4, obtendo:

$$n = 4q + r, \text{ onde } 0 \leq r \leq 3\,.$$

Portanto, $i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$. Concluímos então que a potência i^n está perfeitamente determinada pelo resto r que o expoente n deixa na divisão por 4.

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 0 \iff n \equiv 0 \mod 4 \\ i, & \text{se } r = 1 \iff n \equiv 1 \mod 4 \\ -1, & \text{se } r = 2 \iff n \equiv 2 \mod 4 \\ -i, & \text{se } r = 3 \iff n \equiv 3 \mod 4\,. \end{cases}$$

Definição 5 (Conjugação e módulo)

Seja $z = a + bi$ um número complexo. O *conjugado* de z, denotado por $\overline{z}$, é definido por

$$\overline{z} = a - bi.$$

e o *módulo* de z, denotado por $|z|$ é definido por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Lembrando da representação no plano do número complexo $z = a + bi$, podemos interpretar, geometricamente, os conceitos de conjugado e módulo. O ponto do plano com coordenadas $(a, -b)$ é o simétrico, em relação ao eixo x, do ponto (a, b). Portanto, z e $\overline{z}$ são simétricos em relação à reta real. Por outro lado, a distância do ponto (a, b) à origem $(0, 0)$ é $\sqrt{a^2 + b^2}$. Logo, o módulo de z é a sua distância à origem (Figura 3).

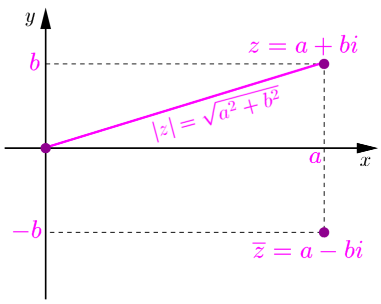


Fig. 3: $\overline{z} = a - bi$ e $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observação:

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
- $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$.
- $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.
- $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$.

De fato, escrevendo $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$, temos:

Relembre as propriedades do módulo ou valor absoluto de números reais.

$$\begin{aligned} z+\overline{z} &= (a+bi)+(a-bi)=2a=2\,\mathrm{Re}(z)\,,\\ z-\overline{z} &= (a+bi)-(a-bi)=2bi=2\,\mathrm{Im}(z)i\,,\\ \mathrm{Re}(z) &= a\le |a|=\sqrt{a^2}\le\sqrt{a^2+b^2}=|z|\,,\\ \mathrm{Im}(z) &= b\le |b|=\sqrt{b^2}\le\sqrt{a^2+b^2}=|z|\,. \end{aligned}$$

O cálculo do conjugado de um número complexo é chamado de *conjugação*.

Proposição 2 (Propriedades da conjugação e do módulo)
Sejam z e w números complexos. Valem as seguintes propriedades:

(1) $\overline{z}=0 \Longleftrightarrow z=0$.

(2) $\overline{z}=z \Longleftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

(3) $\overline{\overline{z}}=z$.

(4) O conjugado da soma é a soma dos conjugados: $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.

(5) O conjugado do produto é o produto dos conjugados: $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.

(6) $|z|=|\overline{z}|$.

(7) $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

(8) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\dfrac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}$, se $z\neq 0$.

(9) $\dfrac{w}{z}=w\cdot\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\dfrac{w\cdot\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}$, se $z\neq 0$.

(10) o módulo do produto é o produto dos módulos: $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$.

(11) Desigualdade triangular: $|z+w|\le|z|+|w|$.

Demonstração: A verificação da validade das propriedades (1) a (6) é um cálculo rotineiro, faremos (2) e (3) para ilustrar, além das propriedades (7) a (11). Para isso, sejam $z=a+bi$ e $w=c+di$. Então,

(2)$\overline{z}=z \Longleftrightarrow a-bi=a+bi \Longleftrightarrow -b=b \Longleftrightarrow 2b=0 \Longleftrightarrow b=0 \Longleftrightarrow z=a\in\mathbb{R}$.

(3) $\overline{\overline{z}}=\overline{a-bi}=a-(-b)i=a+bi=z$.

(7) $z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=|z|^2$.

(8) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1\cdot\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, onde a última igualdade segue de (7).

(9) Esta propriedade é conseqüência imediata da propriedade anterior.

(10) Usando as propriedades, (7) e (5) e a comutatividade da multiplicação de números complexos, temos

$$\begin{aligned} |z\cdot w|^2 &= (z\cdot w)\cdot(\overline{z\cdot w})=(z\cdot w)\cdot(\overline{z}\cdot\overline{w})\\ &= (z\cdot\overline{z})\cdot(w\cdot\overline{w})=|z|^2\cdot|w|^2=(|z|\cdot|w|)^2\,. \end{aligned}$$

Assim, $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$.

Lembre que em $\mathbb{R}$: $x^2=y^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ se, e somente se, $x=y$.

(11) Geometricamente, o comprimento da diagonal do paralelogramo é menor do que a soma dos comprimentos dos lados. Vamos calcular o quadrado do módulo da soma. Portanto,

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{z}. \end{aligned}$$

A primeira igualdade ao lado segue de (7); a segunda, de (4); a terceira, da distributividade (AM) da multiplicação e adição de números complexos e a última, de (7).

Precisamos estimar $z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{z}$.

Seja $u = z\cdot\overline{w}$. De (5) e (3), obtemos $\overline{u} = \overline{z\cdot\overline{w}} = \overline{z}\cdot\overline{\overline{w}} = \overline{z}\cdot w$. Assim,

$$z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{z} = u + \overline{u} = 2\,\mathrm{Re}(u) \leq 2|u| = 2|z\cdot\overline{w}| = 2|z|\cdot|\overline{w}| = 2|z|\cdot|w|,$$

onde as duas últimas igualdades seguem de (10) e (6), respectivamente.

Logo, $|z+w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\cdot|w| = (|z|+|w|)^2$.

Portanto, $|z+w| \leq |z|+|w|$. ■

Terminamos a demonstração das propriedades. Você deve escrever as demonstrações das propriedades (1), (4), (5) e (6), discutir com os seus colegas e comparar as soluções. Só aprendemos a escrever Matemática, tentando fazer. Não tenha medo!

Vamos ver a primeira aplicação importante dos números complexos.

Os números reais negativos não têm raízes quadradas reais. No entanto, em $\mathbb{C}$, por exemplo, $2i$ e $-2i$ são números cujo quadrado é -4, isto é, são raízes complexas quadradas de -4.

Em geral, quando a é um número real negativo, temos $-a > 0$, logo o número $\sqrt{-a} \in \mathbb{R}$ e os números complexos $\sqrt{-a}i$ e $-\sqrt{-a}i$ têm como quadrado $(\pm\sqrt{-a}i)^2 = -ai^2 = a < 0$. Os números reais negativos têm raiz quadrada em $\mathbb{C}$.

Agora, os polinômios ax^2+bx+c, com $\Delta = b^2-4ac < 0$ e $a \neq 0$ passam a ter raízes em $\mathbb{C}$.

Escrevemos

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a}.$$

Note que $x_2 = \overline{x}_1$, sendo x_1 e x_2 números complexos não-reais.

Exemplo 8

Vamos determinar as raízes complexas de $f(x) = x^2+x+2$.

Nesse caso, $\Delta = 1^2 - 4\cdot 2 = -7$. Assim, as raízes de $f(x)$ são

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2} \quad \text{e} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}.$$

Exercícios

1. Dados $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = -1 + i$ e $z_3 = 2 + 3i$, calcule:
   (a) $z_1 \cdot z_2$ (b) $z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3$ (c) $2i \cdot z_1 + z_2$
   (d) $3z_2 + 3i \cdot z_2$ (e) $\dfrac{z_2}{z_3}$

2. Calcule:
   (a) $(1+i)(2-i)$ (b) $\dfrac{1+i}{2-i}$ (c) $\dfrac{1}{2+2\sqrt{2}\,i}$ (d) $\dfrac{1-i}{1+i} - \dfrac{1+i}{1-i}$
   (e) $\dfrac{1+i}{i} - \dfrac{i}{1-i}$ (f) $\dfrac{1}{3+4i}$ (g) $\dfrac{4+3i}{1+\sqrt{3}i}$ (h) $\dfrac{(1+2i)(2-i)}{(3+i)(1+3i)}$

3. Calcule o módulo e o conjugado dos números complexos: $2-5i$, $3-2i$, $4-3i$, $1+i$, $1-\sqrt{3}i$ e $-3-3i$. Represente no plano os números complexos.

4. Calcule, usando a fórmula do binômio de Newton:

   (a) $(1+i)^5$ (b) $(1+\sqrt{3}i)^6$ (c) $(2-2i)^4$

5. Determine os números reais a e b, para que a propriedade se verifique:
   (a) $a \cdot b + (b^2-1)i = i$.
   (b) $(2a+b) + bi = (a-1) + (2b+1)i$.
   (c) $(a^2-1) + (b^2-3)(a-1)i$ seja um imaginário puro.
   (d) $(a^2-1) + (b^2-3)(a-1)i$ seja um complexo não-real.
   (e) $(a^2-1) + (b^2-3)(a-1)i$ seja real.

6. Determine o número complexo z que satisfaz a igualdade:

   (a) $2(z-i) + i(z-1) = 2$ (b) $(2-i)z + 3i - 4 = 0$

   (c) $(z-2)(\overline{z}+i) = 5+5i$. (d) $\dfrac{z+2i}{z+i} = 1+i$.

7. Seja $S^1 = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\,\}$, o círculo de centro $(0,0)$ e raio 1. Sejam z e w números complexos. Verifique que:

   (a) Se $z \in S^1$, então $\overline{z} \in S^1$.
   (b) Se $z \in S^1$, então $z^{-1} = \overline{z} \in S^1$.
   (c) Se $z, w \in S^1$ então $z \cdot w \in S^1$.

8. Determine: i^{25}, i^{2002} e i^{-327}.

9. Sejam z e w números complexos. Mostre que $z \cdot w = 0$ se, e somente se, $z = 0$ ou $w = 0$.

Forma polar dos números complexos

Vamos fazer uma outra representação dos números complexos não-nulos, chamada *forma polar* ou *forma trigonométrica dos números complexos*. Esta representação é muito útil para multiplicar números complexos, interpretar geometricamente a multiplicação de números complexos não-nulos, extrair raízes n-ésimas de números complexos e visualizar a radiciação de números complexos no plano.

Lembre que:
O círculo trigonométrico é o círculo de raio 1.

A medida em radianos de um ângulo não-negativo é o comprimento do arco correspondente no círculo trigonométrico.

O comprimento da circunferência de raio 1 é 2π radianos.

Sejam $z = a + bi$ um número complexo não-nulo. O seu módulo é $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$. O ponto $P = (a, b)$ do plano que representa $z \neq 0$, é diferente da origem $O = (0, 0)$. Portanto, o segmento de reta OP determina com o eixo x um ângulo maior ou igual a zero grau e menor do que 360 graus, cuja medida θ, em radianos, está no intervalo $[0, 2\pi)$.

O número real θ é o *argumento* de z e escrevemos $\arg(z) = \theta$.

O símbolo $\arg(z) = \theta$ lê-se argumento de zê igual a teta.

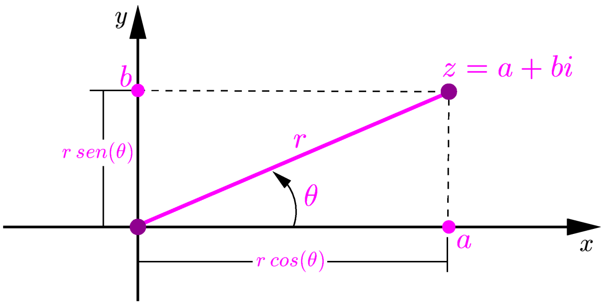


Fig. 4: Argumento θ de $z = a + bi \neq 0$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

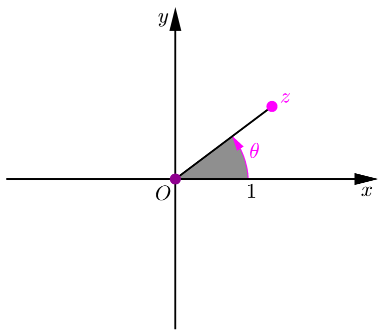
Em Matemática, o argumento do número complexo z não-nulo é a medida do comprimento do arco correspondente no círculo trigonométrico.

Na nossa linguagem, um argumento é um raciocínio pelo qual se chega a uma conseqüência ou dedução. Consulte um dicionário, para aprender outros significados da palavra argumento nas áreas de História, Filosofia e Astronomia.

Geometricamente, o argumento de z é a medida em radianos, no círculo trigonométrico, do ângulo que devemos girar o semi-eixo positivo da reta real, no sentido anti-horário, até coincidir com o segmento OP. Observe que $a = r\cos\theta$ e $b = r \operatorname{sen}\theta$. Portanto,

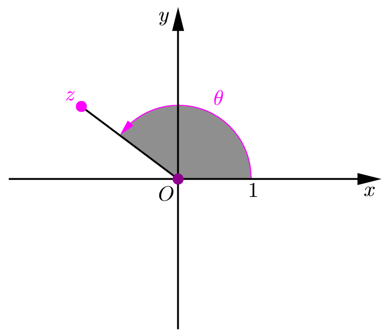
$$\arg(z) = \theta, \text{ com } \theta \in [0, 2\pi), \cos\theta = \frac{a}{r} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}.$$

Nas figuras a seguir, representamos o ponto P do plano correspondente ao número complexo $z \neq 0$ e a variação do sinal do cosseno e do seno do ângulo de θ radianos, onde $\theta = \arg(z)$, conforme o quadrante em que se encontra z.



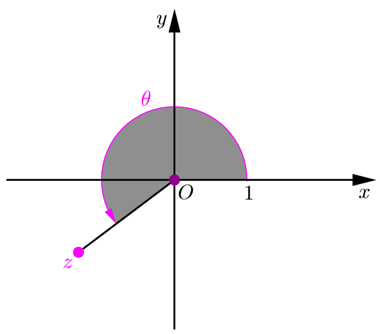
Quadrante I: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta > 0$ e $\operatorname{sen}\theta > 0$.



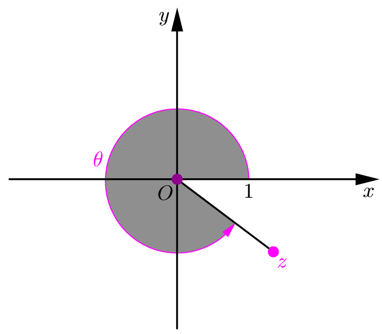
Quadrante II: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\cos\theta < 0$ e $\operatorname{sen}\theta > 0$.



Quadrante III: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\cos\theta < 0$ e $\operatorname{sen}\theta < 0$.



Quadrante IV: $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$\cos\theta > 0$ e $\operatorname{sen}\theta < 0$.

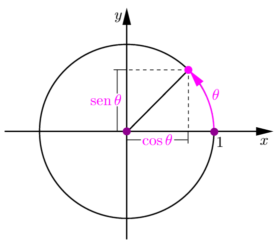


Fig. 5: Ponto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Observação:

• Para cada $\theta \in [0, 2\pi)$, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ e $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$.

• O cosseno e o seno de θ satisfazem a relação: $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, pois, qualquer que seja $\theta \in [0, 2\pi)$, o ponto do plano $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ está no círculo de centro na origem e raio 1, representado na Figura 5.

• Na Figura 6 estão os valores do cosseno e do seno de alguns ângulos notáveis em radianos entre $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$, representados no círculo de raio 1.

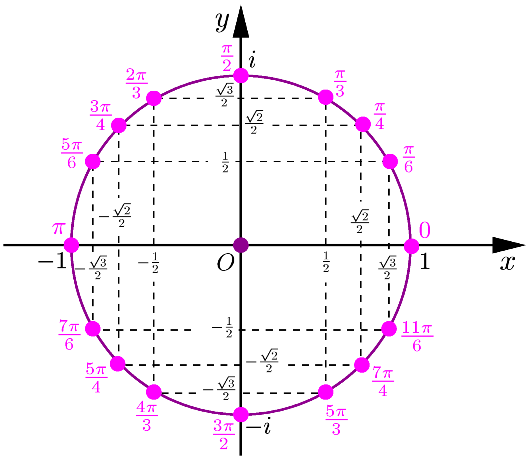


Fig. 6: Representação de θ radianos, $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ no círculo de raio 1.

Exemplo 9

Vamos determinar o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

(a) $z_1 = 3$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2i$ e $z_4 = -2i$.

z_1 e z_2 estão situados sobre a reta real, sendo z_1 no semi-eixo positivo e z_2 no semi-eixo negativo. Logo, $\theta_1 = \arg(z_1) = 0$ e $\theta_2 = \arg(z_2) = \pi$.

z_3 e z_4 estão situados sobre o eixo imaginário, sendo z_3 no semi-eixo positivo e z_4 no semi-eixo negativo. Logo, $\theta_3 = \arg(z_3) = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_4 = \arg(z_4) = \frac{3\pi}{2}$.

Faça a representação no plano desses números complexos para visualizar os seus argumentos.

(b) $z_5 = 2 - 2i$, $z_6 = -1 - \sqrt{3}i$.

Primeiramente, observe que z_5 e z_6 estão nos quadrantes IV e III, respectivamente. Como $r_5 = |z_5| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$, temos:

$$\begin{aligned}\cos(\theta_5) &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \operatorname{sen}(\theta_5) &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Logo, $\theta_5 = \arg(z_5) = \dfrac{7\pi}{4}$ (veja a Figura 1).

Como $r_6 = |z_6| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, temos que:

$$\cos(\theta_6) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\theta_6) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $\theta_6 = \arg(z_6) = \dfrac{4\pi}{3}$ (veja a Figura 1).

Curiosidade:

Costuma-se escrever
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$.
Em particular,
$e^{i\pi} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1$.
É devido a Euler uma das mais belas fórmulas de Matemática
$e^{i\pi} + 1 = 0$,
envolvendo cinco números importantes $0, 1, e, \pi, i$.

Definição 6 (Forma polar ou trigonométrica)

A *forma polar* ou *forma trigonométrica* do número complexo não-nulo $z = a + bi$, com módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e argumento $\arg(z) = \theta$ é:

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \text{ onde } \cos\theta = \frac{a}{r} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}.$$

Quando expressamos um número complexo não-nulo na forma polar, explicitamos o seu módulo e o seu argumento.

Exemplo 10

Vamos expressar os números complexos do Exemplo 9 na forma polar, aproveitando os cálculos dos seus módulos e argumentos:

$z_1 = 3 = 3(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$, $\quad z_2 = -3 = 3(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$,

$z_3 = 2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$, $\quad z_4 = -2i = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2})$,

$z_5 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4})$, $\quad z_6 = -1 - \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3})$.

Quais as condições para a igualdade de números complexos não-nulos escritos na forma polar?

Sejam $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$. Suponhamos que $z_1 = z_2$. Então,

$$r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2).$$

Logo, $r_1 = |z_1| = |z_2| = r_2 > 0$ e, cancelando r_1 na igualdade acima, obtemos $\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1 = \cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2$. Portanto, $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ e $\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2$. Das propriedades das funções trigonométricas, segue que $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.

Escrevemos $\theta_1 \equiv \theta_2 \mod 2\pi$.

Proposição 3 (Produto de números complexos na forma polar)

Dados os complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ temos que:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$

Escrevendo $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ temos que $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2)\right) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)) \ . \end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2$$
$$\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2. \qquad \blacksquare$$

A relação da Proposição anterior dá uma interpretação geométrica para o produto de números complexos não-nulos: para calcular o produto, é suficiente calcular o produto dos módulos de z_1 e z_2 e somar os seus argumentos θ_1 e θ_2.

Exemplo 11

Vamos determinar na forma polar o produto z_1z_2, sendo

$$z_1 = -5+5\sqrt{3}i \quad \text{e} \quad z_2 = 2\sqrt{3}-2i.$$

Temos

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(-5)^2+(5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25+25\cdot 3} = \sqrt{100} = 10 \qquad \text{e} \\ r_2 &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{4\cdot 3+4} = \sqrt{16} = 4\,. \end{aligned}$$

Portanto, $r_1r_2 = 40\,.$

Note que z_1 e z_2 estão nos quadrantes II e IV, respectivamente. Além disso, $\cos\theta_1 = \dfrac{-5}{10} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{5\sqrt{3}}{10} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, nos dá $\theta_1 = \arg(z_1) = \dfrac{2\pi}{3}$;

$\cos\theta_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta_2 = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, nos dá $\theta_2 = \arg(z_2) = \dfrac{11\pi}{6}$.

Para visualizar os argumentos, faça a representação no plano dos números complexos z_1, z_2 e $z_1 \cdot z_2$.

Assim, $\theta_1+\theta_2 = \dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{15\pi}{6} = \dfrac{12\pi}{6}+\dfrac{3\pi}{6} = 2\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

Logo, $z_1z_2 = 40(\cos(2\pi+\frac{\pi}{2})+i\operatorname{sen}(2\pi+\frac{\pi}{2})) = 40(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$.

Ao marcarmos sobre o círculo trigonométrico os comprimentos de θ radianos e $\theta+2\pi$ radianos, no sentido anti-horário, começando no ponto $A = (1,0)$, correspondente a 0 radiano, paramos no mesmo ponto P. Assim, os segmentos OA e OP, segmentos inicial e final para a determinação do ângulo em graus correspondente a θ radianos e a $\theta+2\pi$ radianos, coincidem (Figura 7).

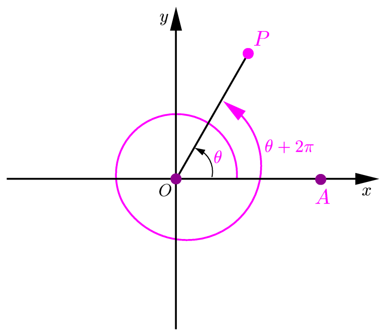


Fig. 7: Congruência de θ e $\theta+2\pi$.

Dizemos que θ radianos e $\theta+2\pi$ radianos são *congruentes módulo* 2π.

Geometricamente, $\theta+2\pi$ significa uma volta a mais no círculo trigonométrico a partir de θ, no sentido anti-horário.

Sabemos que o cosseno e o seno são funções periódicas de período 2π porque satisfazem:

$$\cos\theta = \cos(\theta+2\pi) \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta+2\pi), \text{ para todo } \theta\in\mathbb{R}.$$

Qual é o argumento do produto z_1z_2?

Como $0 \le \theta_1 = \arg(z_1) < 2\pi$ e $0 \le \theta_2 = \arg(z_2) < 2\pi$, temos $0 \le \theta_1+\theta_2 < 4\pi$ e há um único θ, com $0\le\theta<2\pi$ tal que

$$\cos\theta = \cos(\theta_1+\theta_2) \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2).$$

Dizemos que θ, pertencente ao intervalo $[0,2\pi)$, é *congruente módulo* 2π a $\theta_1+\theta_2$ e $\arg(z_1z_2) = \theta$.

Jean Robert Argand, um matemático amador, nascido na Suíça em 1768, ficou famoso pela sua interpretação geométrica dos números complexos, onde i é interpretado como uma rotação de 90^o.

A representação no plano dos números complexos é conhecida como plano de Argand-Gauss.

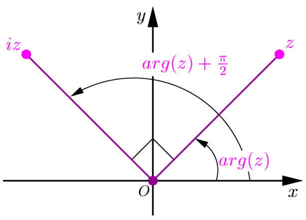


Fig. 8: Multiplicação de $z \neq 0$ por i.

Abraham De Moivre
Vitry, França.
1667-1754

Deu grandes contribuições para Estatística, Probabilidade e Trigonometria. Desenvolveu o conceito de *eventos estatisticamente independentes* e escreveu um tratado importante de Probabilidade. Teve uma vida simples e modesta, como tutor particular de Matemática.

Assim, $z_1 \cdot z_2$ é o número complexo, tal que

$|z_1 z_2| = r_1 r_2$ e $\arg(z_1 z_2) = \theta \in [0, 2\pi)$, com θ congruente módulo 2π a $\theta_1 + \theta_2$.

Exemplo 12

O que significa multiplicar um número complexo $z \neq 0$ por i?

O número complexo iz tem módulo $|iz| = |z|$ e seu argumento é congruente a $\arg(z) + \frac{\pi}{2}$ módulo 2π.

O produto de i por z corresponde a uma rotação de 90^o em torno da origem, no sentido anti-horário, do ponto do plano correspondente a z (Figura 8).

Exemplo 13

Quando multiplicamos dois complexos z_1 e z_2 de módulo 1 e argumentos θ_1 e θ_2, o produto é o número complexo do círculo de raio 1 centrado na origem definido por $\theta_1 + \theta_2$.

Para ilustrar, consideremos $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Verificamos que $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $\arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$ e $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$. Como $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, temos $z_1 z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$.

A multiplicação na forma polar permite determinar uma expressão para potências de expoente natural $n \geq 1$ cuja base é um número complexo não-nulo, conforme veremos na seguinte proposição.

Proposição 4 (Fórmula de De Moivre)

Seja $z \neq 0$ um número complexo dado na forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Então, para cada número inteiro n,

$$z^n = r^n \left(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\right).$$

Demonstração: Esta demonstração será feita por indução sobre o expoente n. Como $r^0 = 1$, então $r^0(\cos(0\cdot\theta) + i \operatorname{sen}(0\cdot\theta)) = 1$ e a fórmula vale para $n = 0$. Seja $n \geq 0$ tal que a fórmula vale para n, isto é, $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$. Então,

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z \cdot z^n \\ &= r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \cdot [r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))] \\ &= r^{n+1}[\cos(\theta + n\theta) + i \operatorname{sen}(\theta + n\theta)] \\ &= r^{n+1}[\cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta)], \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da hipótese de indução, a terceira da multiplicação de números complexos na forma polar e a última mostra a validade da fórmula do enunciado em $n+1$. Concluímos, por indução, a validade da fórmula para todo número natural n.

Seja $n < 0$ um inteiro. Então, $-n > 0$ e $z^n = (z^{-1})^{-n}$. Como $z^{-1} = \frac{1}{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = r^{-1}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) = r^{-1}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta))$. Pela fórmula já demonstrada,

$$\begin{aligned}(z^{-1})^{-n} &= (r^{-1})^{-n}(\cos((-n)\cdot(-\theta)) + i\,\mathrm{sen}((-n)\cdot(-\theta)))\\ &= r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)).\end{aligned}$$

Logo, a igualdade vale para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

Exemplo 14

Seja $z = -\sqrt{3} + i$. Vamos calcular z^8.

Nesse caso, $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

Além disso, as relações $\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{1}{2}$ nos dizem que $\arg(z) = \theta = \dfrac{5\pi}{6}$. Logo, $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ e

$$z^8 = 2^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(8\cdot\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 256\left(\cos\frac{40\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{40\pi}{6}\right).$$

Vamos determinar $\arg(z^8)$, isto é, $\theta \in [0, 2\pi)$ com θ congruente a $\dfrac{40\pi}{6}$.

Escrevemos $\dfrac{40\pi}{6} = \dfrac{20\pi}{3} = \dfrac{18\pi + 2\pi}{3} = 6\pi + \dfrac{2\pi}{3}$ (6π corresponde a 3 voltas no círculo trigonométrico).

Portanto, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ é o argumento de z^8 e $z^8 = 256\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Curiosidade sobre De Moivre

Previu a data da sua morte: morreria no dia que dormisse por 24 horas, considerando que dormia 15 minutos a mais cada noite. Para calcular o dia da sua morte usou uma progressão aritmética!

Exemplo 15

Seja $z = -1 + i$. Vamos calcular z^6.

Nesse caso, $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Além disso, as igualdades

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

nos dizem que $\arg(z) = \theta = \dfrac{3\pi}{4}$. Logo, $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ e

$$z^6 = (\sqrt{2})^6\left(\cos\left(6\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(6\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{18\pi}{4}\right).$$

Vamos determinar $\arg(z^6)$, isto é, $\theta \in [0, 2\pi)$ com θ congruente a $\dfrac{18\pi}{4}$.

Escrevemos $\dfrac{18\pi}{4} = \dfrac{9\pi}{2} = \dfrac{8\pi + \pi}{2} = 4\pi + \dfrac{\pi}{2}$ (4π corresponde a 2 voltas no círculo trigonométrico).

Portanto, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ é o argumento de z^6 e $z^6 = 8\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right) = 8i$.

Você, certamente, já observou que no cálculo do argumento de z^n subtraímos de $n\cdot\arg(z)$ um múltiplo inteiro conveniente de 2π, de modo a obter um número real $\theta \in [0, 2\pi)$. Nesse caso, $\arg(z^n) = \theta$.

Definição 7 (Raízes n-ésimas)
Sejam K um corpo, $n \geq 1$ um número natural e $z \in K$. Um elemento $\omega \in K$ é chamado uma *raiz n-ésima* de z se, e somente se, $\omega^n = z$.

Observação:
(1) Seja K um corpo qualquer. Se $n = 1$, então, para todo $z \in K$, existe raiz 1-ésima de z, a saber, $\omega = z$.

(2) A equação $z^n = 0$ tem uma única solução em K, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

(3) Quando $n \geq 2$ e $z \in K$ é não-nulo, nem sempre existe em K uma raiz n-ésima de z. Vejamos alguns exemplos.

Em $\mathbb{Q}$ não há raízes quadradas de 2.

Em $\mathbb{R}$ há duas raízes quadradas de 2: $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

Se n é par, em $\mathbb{R}$ não há raízes n-ésimas de números negativos.

Se n é ímpar, em $\mathbb{R}$ há uma única raiz n-ésima de qualquer número real.

Mostraremos que no corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, para todo $z \neq 0$, há exatamente n raízes complexas n-ésimas.

Exemplo 16
Calculando, $(3i)^2 = 9i^2 = -9$ e $(-3i)^2 = (-3)^2 \cdot i^2 = -9$, concluímos que $3i$ e $-3i$ são raízes complexas quadradas de -9.

Exemplo 17
Tomando $z = 1$ e $n = 4$ temos que todo $w \in \{1, -1, i, -i\}$ satisfaz $w^4 = 1$ e é chamado uma *raiz complexa quarta da unidade*.

Exemplo 18
As raízes complexas cúbicas de $8i$ são os números $-2i, \sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i$.

De fato, temos $(-2i)^3 = (-2)^3 \cdot i^3 = (-8) \cdot (-i) = 8i$. Para calcular o cubo dos números $\sqrt{3}+i$ e $-\sqrt{3}+i$ escrevemos primeiro a sua forma polar:

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) \text{ e } -\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right).$$

Usando a fórmula de De Moivre, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}+i)^3 &= 2^3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 8i\,, \\
(-\sqrt{3}+i)^3 &= 2^3\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{2}\right) = 2^3\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 8i\,.
\end{aligned}$$

Proposição 5 (Raízes complexas n-ésimas)
Todo número complexo $z \neq 0$ tem *exatamente* n raízes complexas n-ésimas, para cada número natural $n \geq 1$, a saber,

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

onde $r = |z| > 0$ e $\theta = \arg(z)$.

Para cada número real $r \geq 0$ e para cada número natural $n \geq 1$, o símbolo $\sqrt[n]{r}$ significa o número real $\rho \geq 0$, tal que

$\rho = \sqrt[n]{r} \Longleftrightarrow \rho^n = r$ e $\rho \geq 0$.

Lembre que:
$\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[2]{25} = 5$, $\sqrt[6]{1} = 1$.

Demonstração: Seja $n \geq 2$ um número natural dado. Primeiramente, escrevemos z na forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, onde $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$. Vamos calcular as raízes n-ésimas também na forma polar. Queremos determinar os números complexos $w = \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ tais que $z = w^n$.

Como $w^n = \rho^n(\cos(n\phi) + i \operatorname{sen}(n\phi))$, temos $w^n = z$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\phi = \theta + 2\pi\lambda,\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \rho \in \mathbb{R},\ \rho > 0 \\ \phi = \dfrac{\theta + 2\pi\lambda}{n},\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Logo, $z_\lambda = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi\lambda}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2\pi\lambda}{n}\right)\right)$, onde $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$. Da igualdade de números complexos na forma polar, temos que

$$\begin{aligned} z_\lambda = z_\mu &\iff \tfrac{\theta+2\pi\lambda}{n} - \tfrac{\theta+2\pi\mu}{n} = 2\pi m, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z} \\ &\iff \tfrac{2\pi\lambda}{n} - \tfrac{2\pi\mu}{n} = 2\pi m, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z} \\ &\iff \tfrac{\lambda}{n} - \tfrac{\mu}{n} = m, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z} \\ &\iff \lambda - \mu = mn, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z} \\ &\iff \lambda \equiv \mu \mod n \end{aligned}$$

Só interessa o resto que λ deixa na divisão por n. Para cada resto há uma raiz n-ésima de z.

Portanto, para cada $k = 0, 1, \ldots, n-1$ há uma raiz complexa n-ésima de z, determinada pelo argumento $\phi_k = \frac{\theta+2\pi k}{n}$, sendo as raízes complexas n-ésimas de z dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\phi_k + i \operatorname{sen}\phi_k),\ \phi_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \quad \blacksquare$$

Exemplo 19
Vamos determinar as raízes complexas quadradas de $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Temos $r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4$ e $\rho = \sqrt{r} = \sqrt{4} = 2$.

Seja $\theta = \arg(z)$. Então, $\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Assim, $\phi_k = \frac{\theta+2\pi k}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{2\pi k}{2} = \frac{\pi}{6} + \pi k$ com $k = 0, 1$.

Logo,

$\phi_0 = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3} + i$ e

$\phi_1 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \Longrightarrow z_1 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} - i$.

Exemplo 20
Vamos determinar as raízes cúbicas de $z = -27i$.

Temos $r = 27$ e $\theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{2}$. Então, $\frac{\theta}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $\phi_k = \frac{\theta+2\pi k}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Portanto, as raízes complexas cúbicas têm como módulo o número real $\rho = \sqrt[3]{27} = 3$ e argumentos ϕ_k. Assim,

$\phi_0 = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow z_0 = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}) = 3i$;

$\phi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \Longrightarrow z_1 = 3(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}) = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

e

$\phi_2 = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \Longrightarrow z_2 = 3(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}) = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

Observação:

Quando z é um número real positivo, temos $\arg(z) = 0$ e as n raízes complexas n-ésimas de z têm argumento dado por $\phi_k = \frac{2\pi k}{n}$, onde $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Geometricamente, as raízes complexas n-ésimas do número real positivo $z = |z|$ são os pontos que dividem em n partes iguais o círculo de raio $\sqrt[n]{|z|}$ centrado na origem.

Exemplo 21

As 4 raízes complexas quartas de 16 são: 2, $2i$, -2, $-2i$, determinadas por $\phi_k = \dfrac{2\pi \cdot k}{4} = \dfrac{\pi \cdot k}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$ e $\rho = \sqrt[4]{16} = 2$.

Assim,

$\phi_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2$,

$\phi_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}) = 2i$,

$\phi_2 = \pi \Rightarrow z_2 = 2(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = -2$,

$\phi_3 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z_3 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}) = -2i$.

Veja na Figura 9 a representação geométrica das raízes complexas quartas de 16 no círculo de raio $2 = \sqrt[4]{16}$ centrado na origem.

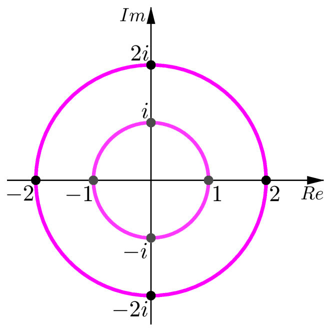


Fig. 9: Raízes quartas de 16.

Definição 8 (Raízes complexas n-ésimas da unidade)

As raízes complexas n-ésimas de 1 são chamadas *raízes n-ésimas da unidade*.

Veja na Figura 9 a representação geométrica das raízes complexas quartas da unidade no círculo de raio 1 centrado na origem.

Nesse caso, $\theta = \arg(1) = 0$, $\phi_k = \frac{2\pi k}{n}$, onde $k = 0, 1, \ldots, n-1$. As raízes complexas n-ésimas da unidade são os pontos do círculo trigonométrico $z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi k}{n}$, com $k = 0, 1, \ldots, n-1$, que o dividem em n partes iguais, sendo $z_0 = 1$.

Exemplo 22

Nas Figuras 10 e 11 estão representadas as raízes complexas cúbicas da unidade e as raízes complexas sextas da unidade, respectivamente.

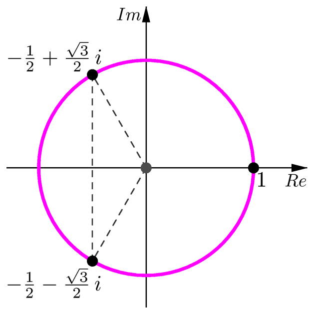


Fig. 10: Raízes complexas cúbicas de 1.

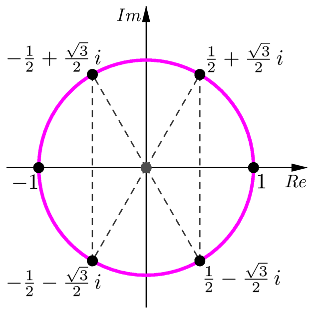


Fig. 11: Raízes complexas sextas de 1.

Denotando $\omega = z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}$, temos que

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi k}{n} = \omega^k, \text{ com } k = 0, \dots, n-1.$$

As n raízes complexas da unidade são obtidas como potências de ω, a saber, $\mathcal{R}_n = \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}$, com $\omega^n = 1$. Chamamos ω de uma *raiz primitiva* n-*ésima da unidade*.

Observe que $\{\omega^m\,;\ m \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}_n$.

De fato, dado $m \in \mathbb{Z}$, pela divisão euclidiana de m por n, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $m = nq + r$, onde $0 \leq r \leq n-1$. Assim,

$$\omega^m = \omega^{nq+r} = \omega^{nq} \cdot \omega^r = 1^q \cdot \omega^r = \omega^r,$$

mostrando que $\omega^m \in \mathcal{R}_n$. A outra inclusão é óbvia.

Definição 9 (Raiz complexa primitiva da unidade)
Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ uma raiz complexa n-ésima da unidade. O elemento α é chamado uma *raiz primitiva* n-*ésima da unidade* se, e somente se, $\{\alpha^m\,;\ m \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}_n$, isto é, as potências de α determinam todas as raízes n-ésimas da unidade.

Exemplo 23
i e $-i$ são as raízes primitivas quartas da unidade.

-1 é a raiz primitiva quadrada da unidade.

Verifique essas afirmações.

Proposição 6
Sejam $n \geq 1$ um natural, $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}$ e $\lambda \in \mathbb{Z}$. Então, ω^λ é uma raiz primitiva n-ésima da unidade se, e somente se, $\text{mdc}(\lambda, n) = 1$.

Demonstração:

($\Longleftarrow$:) Suponhamos que $\text{mdc}(\lambda, n) = 1$. Então, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = x\lambda + yn$, logo para todo $m \in \mathbb{Z}$ temos

$$m = m \cdot 1 = m(x\lambda + yn) = (mx)\lambda + (my)n \text{ e}$$

$$\omega^m = \omega^{(mx)\lambda+(my)n} = (\omega^\lambda)^{mx}(\omega^n)^{my} = (\omega^\lambda)^{mx}.$$

($\Longrightarrow$:) Seja $\lambda \in \mathbb{Z}$ e suponhamos que $\text{mdc}(\lambda, n) = d > 1$. Escrevemos $n = dq$, com $1 < q < n$, e $\lambda = ds$. Então,

$$\omega^\lambda = \omega^{ds} \Longrightarrow (\omega^\lambda)^q = \omega^{(ds)q} = \omega^{(dq)s} = (\omega^n)^s = 1.$$

Dado $m \in \mathbb{Z}$, pela divisão euclidiana de m por q, existem $q', r \in \mathbb{Z}$ tais que $m = qq' + r$, onde $0 \le r \le q-1$. Assim, $(\omega^\lambda)^m = (\omega^\lambda)^r$ e o conjunto

$$S = \{(\omega^\lambda)^m \,; m \in \mathbb{Z}\} = \{\omega^\lambda, (\omega^\lambda)^2, \dots, (\omega^\lambda)^{q-1}, (\omega^\lambda)^q = 1\}$$

tem no máximo $q < n$ elementos. Logo, $S \subsetneq \{\omega^m \,;\, m \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}_n$, mostrando que ω^λ não é uma raiz primitiva n-ésima da unidade. ■

Exercícios

1. Determine o módulo, o argumento e escreva o número complexo z na forma polar. Represente z no plano, indicando o seu módulo e o seu argumento no desenho.

   (a) $z = 3 - 3i$.　(b) $z = -1 + i$　(c) $z = 4 + 4i$
   (d) $z = 5i$　(e) $z = -7$　(f) $z = 2 + 2i$
   (g) $z = \sqrt{3} - i$　(h) $z = -2\sqrt{3} - 2i$　(i) $z = \dfrac{1}{-1-i}$
   (j) $z = 5$　(k) $z = -2i$　(l) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$

2. Calcule $z_1 \cdot z_2$:
   (a) $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5})$ e $z_2 = 3(\cos\frac{3\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{5})$.

   (b) $z_1 = 3(\cos\frac{2\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{6})$ e $z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}$.

   (c) $z_1 = \frac{3}{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12})$ e $z_2 = 2(\cos\frac{11\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{12})$.

   (d) $z_1 = 3(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{8})$ e $z_2 = 5(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{8})$.

3. Calcule as potências, usando a forma polar do número complexo:
   (a) $(2+2i)^5$　(b) $(-1+i)^7$　(c) $(-\sqrt{3}-i)^{10}$　(d) $(-1+\sqrt{3}i)^8$

4. Refaça o Exercício 4, da Seção 1, usando a forma polar de um número complexo.

5. Dado $z = \cos\frac{\pi}{15} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{15}$, determine: z^5, z^{25} e as raízes complexas 4-ésimas de z^{20}.

6. Determine os valores do número natural $n \geq 2$, para os quais $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n$:
   (a) é um número real,
   (b) é um imaginário puro.

7. Determine as raízes complexas n-ésimas de z:
   (a) $n = 2$, $z = 1 - \sqrt{3}i$.
   (b) $n = 4$, $z = 3$.
   (c) $n = 3$, $z = -16 + 16i$.
   (d) $n = 6$, $z = -1$.

8. (a) Determine e represente no plano as raízes complexas n-ésimas da unidade, para $n = 2, 3, 4, 6, 8, 12$.

   (b) Indique, para cada n todas as raízes primitivas n-ésimas da unidade.