Universidade Federal Fluminense
ICEx – Volta Redonda
Introdução a Matemática Superior
Professora: Marina Sequeiros

# 1. Conjuntos

Objetivo: revisar as principais noções de teoria de conjuntos afim de utilizar tais noções para apresentar os principais conjuntos de números.

## 1.1 Conjunto, elemento e pertinência

Conjunto é o mesmo que agrupamento, classe, coleção, sistema. Cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto é chamado elemento. De modo geral, os objetos que formam um conjunto podem ser de qualquer tipo: números, países, pessoas, pontos etc.
É usual representar os conjuntos por letras maiúsculas A,B,C,D,... e os elementos por letras minúsculas a,b,c,d,...
A relação de pertinência que ocorre entre elemento e conjunto é indicada pelo símbolo: $\in$. Assim, representamos que um elemento x pertence a um conjunto A por: $x \in A$, lê-se: "x pertence ao conjunto A"; caso contrário, $x \notin A$ ("x não pertence ao conjunto A").

## 1.2 Descrição de um conjunto

### 1.2.1 Enumeração dos elementos de um conjunto

Um dos modos de se representar um conjunto é escrever os seus elementos entre chaves . Por exemplo, o conjunto formado pelos números 3,6 e 7 pode ser representado por: A={3,6,7}.
Este modo de representação pode ser usado para conjuntos infinitos. Por exemplo, para representar o conjunto de todos os números inteiros maiores do que 3:
{4;5;6;7;8;...}

### 1.2.2 Descrição por meio de uma propriedade característica dos elementos do conjunto

Pode-se representar um conjunto através de uma sentença aberta que seus elementos devem satisfazer. Para descrever um conjunto A por meio de uma propriedade característica P de seus elementos, devemos escrever:
A={x| x tem propriedade P} e lê-se: "A é o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P".

Exemplo: o conjunto dos estados da Região Sudeste pode ser representado por:
A={x/x é estado da Região Sudeste}, ou seja, A={Rio de Janeiro, São Paulo, Minas Gerais e Espírito Santo}

OBS: Um conjunto pode ter como elementos outros conjuntos. Por exemplo: um colégio é um conjunto de turmas e cada turma é um conjunto de alunos; portanto, um colégio é um conjunto cujos elementos são conjuntos.
Exemplo: Seja $A=\{7;\{1,3\};\{3,5,8\}\}$. Este conjunto tem apenas três elementos e pode-se escrever $7 \in A$, $\{1,3\} \in A$ e $\{3,5,8\} \in A$.

1.3 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos A e B são iguais se e somente se possuem os mesmos elementos, isto é, todo elemento de A é também elemento de B e todo elemento de B é também elemento de A e indica-se $A=B$. Caso A não seja igual a B, escreve-se $A \neq B$.

Exemplos:
1) $\{a,b,c,d\}=\{d,c,b,a\}$
2) $\{2,4,6,8,...\}=\{x \mid x$ é inteiro, positivo e par$\}$

1.4 Conjunto unitário

Definição: Conjunto unitário é aquele que possui um único elemento.

Exemplo: Conjuntos das soluções da equação $2x-1=3$: $\{2\}$

1.5 Conjunto vazio

Definição: Conjunto vazio é aquele que não possui elemento algum. Pode-se representar o conjunto vazio por $\varnothing$ ou $\{\}$.

Exemplos: $\{x \mid x<0 \text{ e } x>0\}=\varnothing$

1.6 Subconjuntos

Definição: um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B.

Notação: $A \subset B$ (lê-se: "A está contido em B" ou "A é subconjunto de B" ou "A é parte de B"), ou ainda, $B \supset A$ (lê-se: "B contém A"). Caso exista pelo menos um elemento de A que não pertence a B, temos que $A \not\subset B$ (lê-se: "A não está contido em B").

Exemplos:
a) $\{1,3,4\} \subset \{1,2,3,4\}$ ou $\{1,2,3,4\} \supset \{1,3,4\}$
b) $\{1,2\} \not\subset \{1,3,4\}$

1.6.1 Observações importantes:

- Todo conjunto é subconjunto dele mesmo ($A \subset A$).
- $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto ($\varnothing \subset A$).
- $A \subset B$ e $B \subset A$ se, e somente se, $A=B$.
- A é subconjunto próprio de B se, e somente se, $A \subset B$ e $A \neq B$.

1.7 Conjunto das partes

Dado um conjunto, chama-se o conjunto das partes de A e representa-se por $\wp(A)$ ao conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Exemplo: Seja $A=\{1,2\}$ então $\wp(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

<u>Número de subconjuntos de um conjunto</u>

Se A é um conjunto constituído por n elementos então o número de subconjuntos que podem ser formados a partir de A é $2^n$.

Denota-se o número de elementos de um conjunto A por $n(A)=n$ ou $\#A=n$ e o número de subconjuntos que podem ser formados a partir do conjunto A é denotado por $\#\wp(A)=n(\wp(A))=2^n$.

Para demonstrar este resultado, inicialmente devemos apresentar o princípio multiplicativo.

Se um evento é dividido em duas etapas, em que, para realizar a 1ª. etapa existem m possibilidades e para cada uma delas, a 2ª. etapa pode ocorrer de n modos distintos, então esse evento pode ocorrer de m.n maneiras distintas.

Exemplo: Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

Solução: formar um casal equivale a tomar as decisões:

Decisão 1: escolher um homem (5 modos).
Decisão 2: escolher uma mulher (5 modos).

Logo, existem 5x5=25 modos de formar um casal.

Demonstração(do número de subconjuntos de um conjunto):

Seja A={$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$} que possui n elementos distintos.
Seja B um subconjunto de A:

B={___,____,____,...,____}
1º 2º 3º nº

Os espaços em branco podem ser preenchidos ou não apenas com elementos do conjunto A.
Por exemplo, seja A={$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$} e B={___,___, $a_3, a_4, a_5$ } ={ $a_3, a_4, a_5$ }, B é um subconjunto de A que tem 3 elementos.

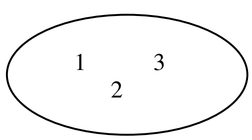
Para o 1º espaço, temos duas escolhas: colocar o elemento $a_1$ ou não. Em seguida, para cada escolha feita, preencheremos ou não o 2º espaço com o elemento $a_2$. Desse modo devemos proceder até o n-ésimo espaço. Pelo princípio multiplicativo, o número de subconjuntos de A é igual a 2.2.2...2 (n fatores), isto é, $2^n$.

1.8 Diagrama de Euler-Venn

Uma maneira de visualizar as relações entre conjuntos é através dos diagramas de Euler-Venn. Os conjuntos são representados por regiões planas interiores a uma curva fechada e simples (“simples”, aqui, significa não-entrelaçada). Tais regiões são chamadas de diagrama de Euler-Venn.

Exemplo:
A={1,2,3}

A



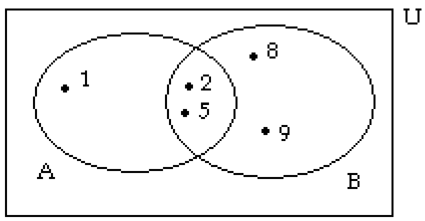

1.9 Conjunto universo (U)

Ao desenvolver determinado assunto de Matemática, admite-se a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos utilizados no tal assunto. Esse conjunto é chamado de conjunto universo.

Pode-se definir o conjunto universo de um problema ou experiência, como o conjunto dos possíveis resultados desse problema ou experiência.

Exemplo: Ao se buscar as soluções reais de uma equação, o conjunto universo é IR (conjunto dos números reais).

Nos diagramas é comum representar o conjunto universo por um retângulo e dentro dele os seus subconjuntos. Assim, por exemplo, sendo U=N, A={1,2,5} e B={2,5,8,9} temos:




## 1.10 Operações com conjuntos

Considere A e B dois conjuntos quaisquer.

### 1.10.1 União (reunião) de conjuntos

A reunião de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$\boxed{A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ ou } x\in B\}}$$

Exemplos:

a) Se A={1,4} e B={1,2,3,4} então $A\cup B=\{1,2,3,4\}=B$.
b) Se A={2,7} e B={1,3,5,9} então $A\cup B=\{1,2,3,5,7,9\}$

Propriedades da união

- $A\cup A=A$ (idempotente)
- $A\cup\varnothing=A$ (elemento neutro)
- $A\cup B=B\cup A$ (comutativa)
- $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (associativa)
- $A\cup U=U$

### 1.10.2 Interseção de conjuntos

A interseção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

$$\boxed{A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ e } x\in B\}}$$

Exemplos:

a) Se A={1,3,8} e B={1,7,8} então $A\cap B=\{1,8\}$
b) Se A={1,2,3,4} e B={1,4} então $A\cap B=\{1,4\}=B$

Propriedades da interseção

- $A\cap A=A$ (idempotente)
- $A\cap U=A$ (elemento neutro)
- $A\cap B=B\cap A$ (comutativa)
- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (associativa)
- $A\cap\varnothing=\varnothing$

OBS: Quando $A\cap B=\varnothing$, isto é, quando os conjuntos A e B não tem elemento comum, A e B são denominados conjuntos disjuntos.

1.10.3 Conjunto diferença

A diferença entre A e B é o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

$$\boxed{A-B=\{x \mid x\in A \text{ e } x\notin B\}}$$

Exemplo:
Se $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{1,3,7\}$ então $A-B=\{2,4\}$ e $B-A=\{7\}$

Propriedades da diferença:

a) $A-A=\varnothing$
b) $A-\varnothing=A$
c) $A-B\neq B-A$, em geral
d) $U-A=A'$

1.10.4 Complementar de um conjunto

Se $B\subset A$ então o complementar de B em relação a A é o conjunto A-B, denotado por $C_A^B=A-B$.

Assim, $C_U^A=A'=\overline{A}=U-A$

Propriedades

- $(A')'=A$
- $\varnothing'=U$
- $U'=\varnothing$
- $(A\cup B)'=A'\cap B'$
- $(A\cap B)'=A'\cup B'$