Trigonometria

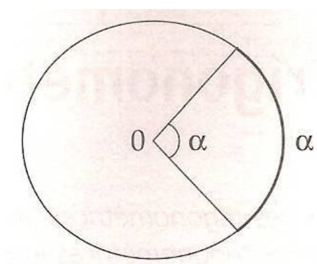
A palavra trigonometria vem do grego (tri+gonos+metron, que significa três+ângulos+medida) e nos remete ao estudo das medidas dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos.

Historicamente, a Trigonometria liga-se à Astronomia, tendo em vista a dificuldade natural que esta apresenta com relação ao cálculo de distâncias impossíveis de serem medidas diretamente. Atribuem-se os primeiros métodos de cálculo dessas distâncias a Hiparco, astrônomo grego que viveu no século II a. C, e é considerado o "pai da Trigonometria".

Foi somente no século XVIII que o matemático suíço Leonhard Euler conseguiu desvincular a Trigonometria da Astronomia, dando àquela o caráter de ramo independente na Matemática.

1. Arcos e ângulos

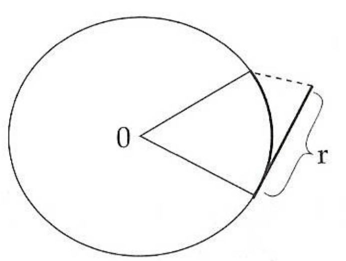
A medida de cada arco equivale à do ângulo central correspondente, independentemente da medida do raio da circunferência. Assim, verificamos que a circunferência toda mede 360º.



<u>Medidas de arcos e ângulos:</u>

Medir um arco ou ângulo é compará-lo com outro, unitário.

1. Grau (º): é um arco unitário igual a 1/360 da circunferência que contém o arco a ser medido.
2. Radiano (rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido, isto é, corresponde a $1/2\pi$ da circunferência.



Um ângulo pode ser medido em graus ou radianos. Temos as seguintes relações:

$2\pi = 360^\circ$; $\pi = 180^\circ$; $\pi/2 = 90^\circ$ e assim sucessivamente.

OBS: π é um número irracional cujo valor é 3,14159...

Podemos através de uma simples regra de três, exprimir qualquer ângulo em radianos e vice-versa.

Exemplos:

1) Exprimir 160º em radianos

   180º ------- π rad

   160º ------- x rad   Daí, $x = 8\pi/9$ rad

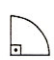
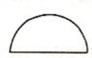
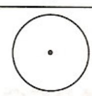
2) Exprimir $5\pi/6$ rad em graus

   180º -------- π rad

   x -------- $5\pi/6$ rad

   Daí, x= 150º

   Vejamos algumas correspondências importantes:

ARCO	GRAU	RADIANO
	90º	$\frac{\pi}{2}$ rad
	180º	π rad
	270º	$\frac{3\pi}{2}$ rad
	360º	2π rad

2. O ciclo trigonométrico

O conceito expresso pela palavra ciclo foi introduzido pelo matemático francês Laguerre. Significa uma circunferência com uma direção predefinida, isto é, orientada. Pode-se trabalhar nos sentidos horário ou anti-horário.

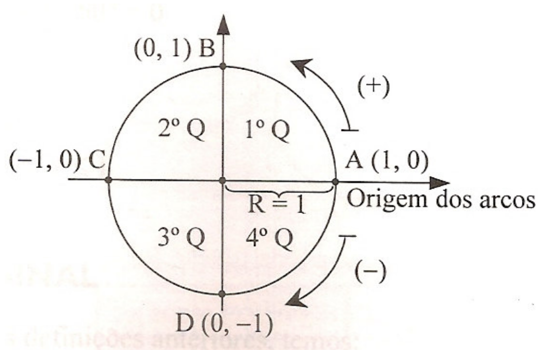
Chama-se ciclo trigonométrico a circunferência de raio 1 (R=1), associada a um sistema de eixos cartesianos ortogonais, para a qual valem as seguintes convenções:

I) A origem do sistema coincide com o centro da circunferência.

II) O ponto A de coordenadas (1,0) é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.

III) O sentido positivo do percurso é o anti-horário e o negativo é o horário.

IV) Os pontos A(1,0), B(0,1), C(-1,0) e D(0,-1) dividem a circunferência em quatro partes denominadas quadrantes que são contados a partir de A no sentido anti-horário.



3. Funções periódicas

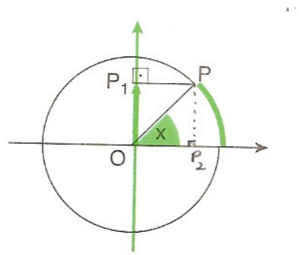
Definição: Uma função f: $A \subset IR \rightarrow B \subset IR$ é dita periódica se existir um número real $p>0$ tal que $f(x+p)=f(x)$, $\forall\ x \in A$. O menor valor de p que satisfaz a igualdade é chamado período de f.
De maneira simples, podemos dizer que uma função periódica é aquela cujo gráfico, a partir de certo instante, se repete.

4. Funções trigonométricas ou circulares

4.1 Função seno

Seja x um ângulo agudo, de tal forma que o arco correspondente a ele possua extremidade P. Unindo O a P, obtemos o raio unitário OP.

O ponto P_1 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo vertical e P_2 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo horizontal.



Observando a figura ao lado, podemos escrever sen $x=PP_2/OP$ e, por conseqüência, sen$x=OP_1$ pois OP é unitário.

Assim, para encontrarmos o seno de um ângulo, basta projetar ortogonalmente suas extremidades sobre o eixo vertical e medir a distância entre essa projeção e o centro O do ciclo, sempre levando em conta a orientação do eixo (para cima). O eixo vertical será denominado de eixo dos senos.

A partir da noção de seno de um ângulo x, podemos estabelecer o conceito de função seno. De fato, dado um número real x, podemos associar a ele, como vimos, o valor do seno de um ângulo de x rad, ou de um arco de x rad.

Chama-se função seno a toda função $f:IR \rightarrow IR$ definida por

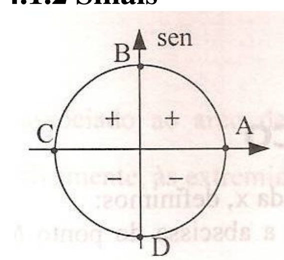
$\boxed{y=f(x)=\text{sen } x}$

- O domínio e contradomínio dessa função são iguais a IR.
- Como a projeção do ponto P está no ciclo trigonométrico, e este tem raio igual a 1, a imagem da função seno é o intervalo [-1,1], isto é, $-1 \leq sen(\alpha) \leq 1$ (significa que essa função é limitada).

4.1.1 Valores notáveis

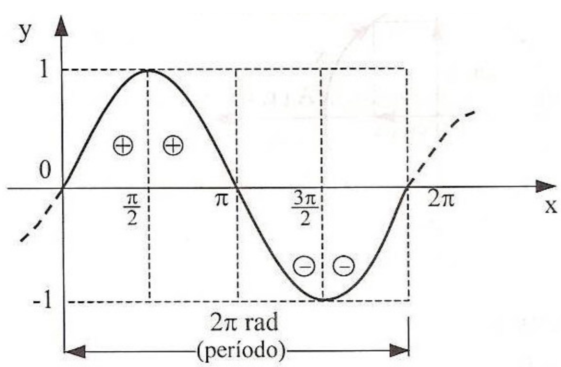
x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
sen x	0	½	√2/2	√3/2	1	0	-1	0

4.1.2 Sinais



- Considerando a orientação do eixo dos senos, percebemos que a arcos dos 1° e 2° quadrantes associam-se valores positivos de senos, e a arcos do 3° e 4° quadrantes associam-se valores negativos de senos.
- No 1° e 4° quadrantes, à medida que o ângulo cresce, o seno também cresce; logo a função é crescente nesses quadrantes. Equivalentemente, nos 2° e 3° quadrantes, o seno é decrescente.
- Como, a partir de 2π (uma volta inteira no ciclo), o seno se repete, a função é periódica de período 2π.

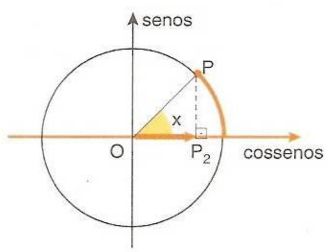
4.1.3 Gráfico (senóide)



- Podemos notar que a função seno é uma função ímpar, isto é, sen(-x)=-sen(x) (seu gráfico é simétrico em relação à origem).

4.2 Cosseno

Na figura a seguir, utilizando o triângulo retângulo OPP_2, podemos escrever $\cos x = OP_2/OP$. Como OP é raio unitário, temos $\cos x = OP_2$.

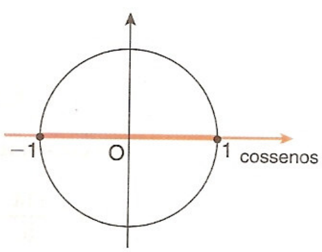


Assim, para encontrarmos o cosseno de um ângulo, basta projetar ortogonalmente a extremidade do arco correspondente sobre o eixo horizontal e medir a distância entre essa projeção e o centro O do ciclo, sempre levando em conta a orientação do eixo (para direita).

A partir da noção de cosseno de um ângulo x, podemos estabelecer o conceito de função cosseno. De fato, dado um número real x, podemos associar a ele, como vimos, o valor do cosseno de um ângulo de x rad ou de um arco de x rad.

Chama-se função cosseno a toda função f:IR → IR definida por
$\boxed{y=f(x)=\cos(x)}$

- O domínio e contradomínio da função cosseno são iguais a IR.

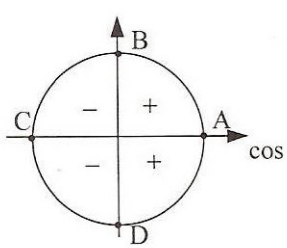


- O intervalo [-1,1] reflete o segmento que é o conjunto de todas as projeções ortogonais de pontos do ciclo trigonométrico. Assim, o conjunto imagem da função cosseno é o intervalo [-1,1], isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$ (significa que essa função é limitada).

4.2.1 Valores notáveis

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
cos x	1	√3/2	√2/2	½	0	-1	0	1

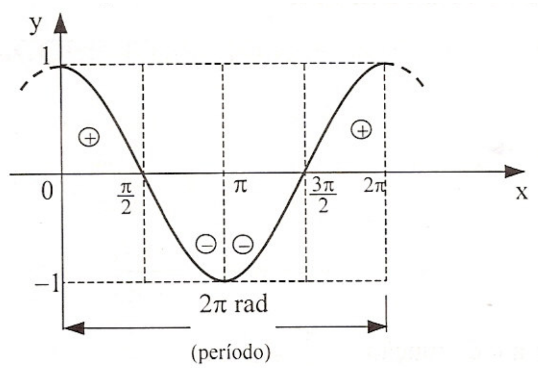
4.2.2 Sinais



- Considerando a orientação do eixo dos cossenos, percebemos que a ângulos do 1° e do 4° quadrantes associam-se cossenos positivos, e a ângulos do 2° e 3° quadrantes associam-se cossenos negativos.

- Nos 3° e 4° quadrantes, o cosseno é crescente e nos 1° e 2° quadrantes, ele é decrescente.
- Como, a partir de 2π (uma volta inteira), o cosseno se repete, a função é periódica de período 2π.

4.2.3 Gráfico (cossenóide)



- Podemos notar que a função cosseno é par, isto é, cos(-x)=cos(x) (seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas).

Observação

O período e a imagem de funções da forma
$y = a + b \text{ sen } (mx + n)$ ou
$y = a + b \cos (mx + n)$
com $b \neq 0$ e $m \neq 0$ são dados por:

$$\boxed{P = \frac{2\pi}{|m|} \text{ rad e } Im = [a - |b|, a + |b|]}$$

Relação entre senos e cossenos

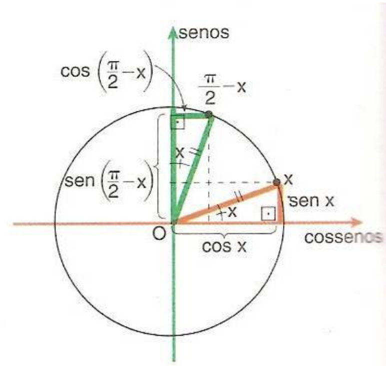
1º arcos complementares

$$\text{sen } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$, válida para $\forall x \in \mathbb{R}$, ou

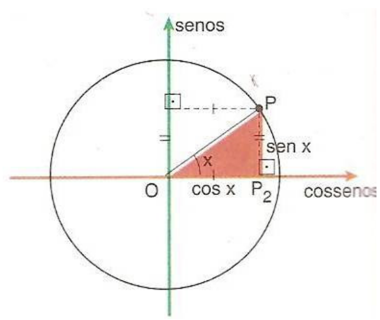
$$\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$, válida para $\forall x \in \mathbb{R}$

Essa relação significa "o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complemento", ou "o cosseno de um ângulo é igual ao seno do seu complemento".

Essa verificação também é imediata no ciclo trigonométrico: basta observarmos que os dois triângulos retângulos da figura são congruentes, por possuírem, além das hipotenusas (raios unitários), ângulos agudos congruentes.



2º Relação fundamental I



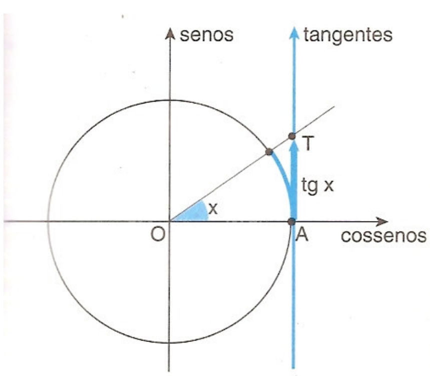
Seja x um arco do 1º quadrante. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPP_2, temos: $(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = (OP)^2$, ou seja,

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \text{, válida para } \forall x \in \mathbb{R}$$

Mesmo que x não seja do 1° quadrante, vale a relação fundamental I. Assim, dado o seno de um arco qualquer, é possível, por meio da relação fundamental I, obter o cosseno desse mesmo arco, e vice-versa.

4.3 Função tangente

Para definirmos a tangente de um arco x, é necessário acoplar um 3° eixo ao ciclo trigonométrico. Na figura, o eixo (vertical) das tangentes é obtido quando se tangencia, por uma reta, o ciclo no ponto A de origem dos arcos.



Unindo-se o centro O à extremidade do arco x e prolongando-se esse raio, ele interceptará o eixo das tangentes – no caso, no ponto T.

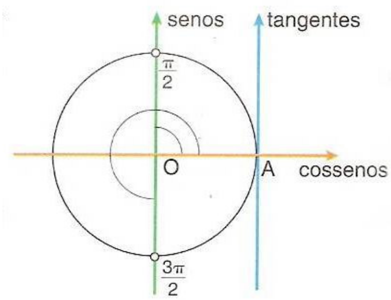
Por definição, a medida algébrica do segmento AT é a tangente do arco de x rad. a orientação do eixo das tangentes é para cima, sendo A sua origem, e, no caso, sendo x do 1° quadrante, temos: tg x= AT > 0
Vamos associar a cada número real x o valor de tg x, introduzindo a função y=tg x.

Chama-se função tangente a toda função

f: $\{x \in IR \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \to IR$ definida por

$$\boxed{y = f(x) = tg\ x}$$

Domínio



Inicialmente poderíamos pensar no conjunto IR como possível domínio da função y= tg x. Ocorre porém que, no caso de termos, por exemplo, x=π/2, deixa de existir o ponto T, visto que a reta que une o centro O à extremidade do arco x torna-se paralela ao eixo das tangentes, não o interceptando, portanto.

O mesmo ocorre quando x= 3π/2. Assim, podemos dizer que não existem tg (π/2), tg(3π/2), etc. De maneira geral, escrevemos "não existe tg (π/2 + kπ), k ∈ Z".

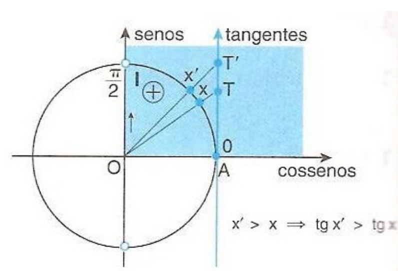
Conclusão:

D={x ∈ IR/ x ≠ π/2 + kπ, k ∈ Z}.

Conjunto imagem

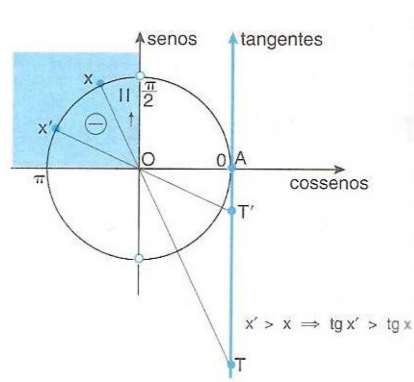
Vamos analisar o que ocorre em cada quadrante, em relação ao valores assumidos por y= tg x, enquanto x completa a 1ª volta no ciclo.

- 1°quadrante



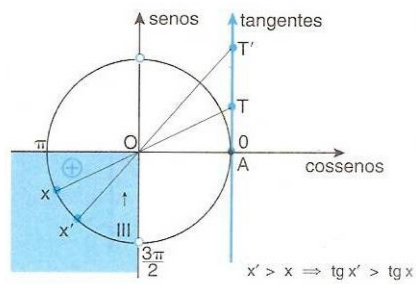
Podemos verificar que tg 0 = 0 (pois T coincidiria com A); além disso, a medida que x aumenta dentro do 1° quadrante, o ponto T afasta-se gradativamente do ponto A, no sentido do eixo. Assim, o valor da tangente vai crescendo indefinidamente e assumindo todos os valores reais positivos, até que a tangente deixa de existir quando x= π/2. Logo, no 1° quadrante, y= tg x é crescente e assume valores positivos.

- 2° quadrante



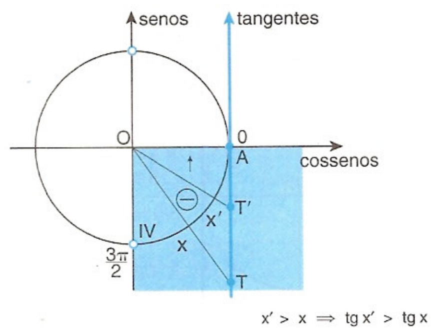
Quando x passa para o 2° quadrante, o ponto T reaparece (na parte negativa do eixo das tangentes) e, à medida que x aumenta dentro do quadrante, o ponto T se aproxima de A, embora ainda na parte negativa do eixo. O ponto T volta a coincidir com A quando x assume o valor π: tgπ=0. Desse modo, podemos escrever que, no 2° quadrante, y= tg x é crescente e assume valores negativos.

- 3° quadrante



O ponto T volta a ocupar a parte positiva do eixo das tangentes, afastando-se de A à medida que x aumenta dentro do 3° quadrante. Nele, a função y=tg x é crescente e assume valores positivos, até que tg x deixa novamente de existir para x=3π/2.

- 4º quadrante



Como ocorre no segundo quadrante, o ponto T reaparece na parte negativa do eixo das tangentes e, à medida que x aumenta, o valor de tg x também aumenta, até anular-se novamente ao final do quadrante (tg 2π=0), quando T volta a coincidir com A.

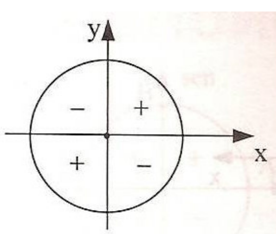
No 4° quadrante, a função y=tg x é crescente e assume valores negativos.

Conclusão: conjunto imagem da função y= tg x é IR.

4.3.1 Valores notáveis

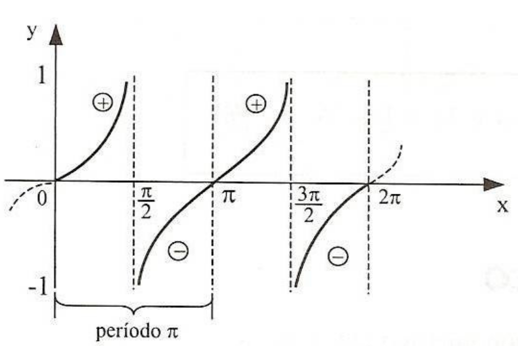
x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
tg x	0	√3/3	1	√3	∄	0	∄	0

4.3.2 Sinais



- Nos 1° e 3° quadrantes, como o ponto T está acima do ponto A, a tangente é positiva; equivalentemente, nos 2° e 4° quadrantes, a tangente é negativa.
- A função é monótona crescente, isto é, cresce em todo o seu domínio.
- Como, a partir de π, a tangente se repete, a função é periódica de período π.

4.3.3 Gráfico (tangentóide)



- Podemos notar que a função tangente é uma função ímpar, isto é tg(-x)=-tg(x) (seu gráfico é simétrico em relação à origem).

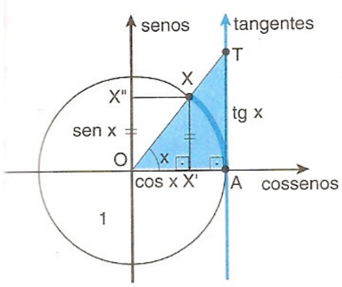
Observação

O período de funções da forma
$y = a + b \text{ tg } (mx + n)$
com $b \neq 0$ e $m \neq 0$ é dado por:

$$\boxed{P = \frac{\pi}{|m|}}$$

Relação fundamental II:

Seja um arco de x rad com extremidade X. Observando a figura, temos:



$OX' = \cos x$
$X'X = \text{sen } x$
$AT = \text{tg } x$
$OX = 1$ (raio)

Os triângulos retângulos OX′X e OAT são semelhantes, pois possuem um ângulo agudo comum. Assim, podemos escrever:

$$\frac{OX'}{OA} = \frac{XX'}{AT} \Rightarrow \frac{\cos x}{1} = \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}},$$

válida para $\forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Essa relação, de grande importância, será utilizada para obtenção de alguns valores de tangentes de arcos que aparecem com freqüência.

Ângulos notáveis

Razão \ Ângulo	30°	45°	60°
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

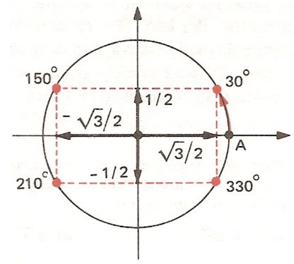
<u>Redução ao 1^{o}quadrante</u>

Dado um arco com extremidade α no 1^o quadrante, existem três outros, cada um com extremidade num dos outros quadrantes, que têm, com exceção do sinal, o mesmo seno e o mesmo cosseno do arco α. Por exemplo, os arcos de 30^o, 150^o, 210^o e 330^o têm, com exceção do sinal, os mesmos senos e cossenos.

$$\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

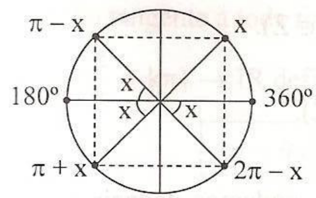
$$\text{sen } 210^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2} \qquad \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 330^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2} \qquad \cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Para reduzir um arco x qualquer pertencente ao 2^o, 3^o ou 4^o quadrantes, a um correspondente arco no primeiro quadrante, com o mesmo valor da razão trigonométrica (em módulo), procede-se:

1) Localize o quadrante em que está o arco a ser reduzido.
2) Verifique o sinal da razão trigonométrica no referido quadrante.
3) Faça redução do arco conforme abaixo



$2^o \Rightarrow$ quanto falta para 180^o
$3^o \Rightarrow$ quanto passa de 180^o
$4^o \Rightarrow$ quanto falta para 360^o

Exemplos:

a) $\cos \underbrace{120^o}_{2^o\text{ Q}} = -\cos 60^o = -\dfrac{1}{2}$

b) $\text{tg } \underbrace{225^o}_{3^o\text{ Q}} = \text{tg } 45^o = 1$

c) $\text{sen } \underbrace{300^o}_{4^o\text{ Q}} = -\text{sen } 60^o = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

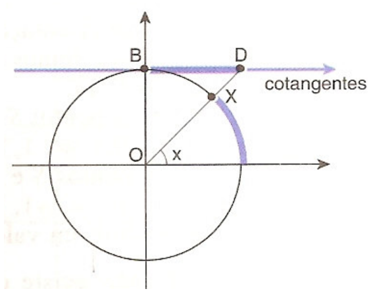
d) $\text{sen } \underbrace{(\pi + x)}_{3^o\text{ Q}} = -\text{sen } x$

e) $\cos \underbrace{(\pi - x)}_{2^o\text{ Q}} = -\cos x$

Valores de senθ e cosθ:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

4.4 Função cotangente



Para definição dessa função será acoplado ao ciclo trigonométrico um 4º eixo orientado, tangenciando o ciclo no ponto B, que é extremidade do arco de π/2 rad.

Unindo o centro O à extremidade X do arco de x rad e prolongando-se esse raio, ele interceptará o eixo das cotangentes no ponto D.

Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$ é a cotangente do arco de x rad.

A orientação do eixo das cotangentes é para direita, sendo B sua origem e, no caso, com x no 1º quadrante, temos cotg x=BD>0.

Domínio: Quando x é elemento do conjunto $\{0, \ \pm\pi, \ \pm 2\pi, ...\}$, não existe o ponto D e não se define, então, cotg kπ, k∈Z. Portanto, o domínio da função y=cotgx é:

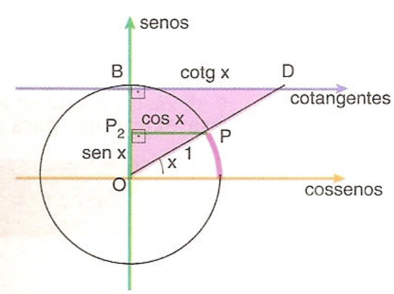
D(f)= {x∈IR/x≠$k\pi$, k∈Z }.

Imagem: IR , o que significa que essa função não é limitada.

Relação fundamental:

Seja x um arco do 1º quadrante, com extremidade P, como mostra a figura ao lado. Unindo O a P e prolongando esse raio até que ele intercepte o eixo das cotangentes, obtemos o ponto D.
Temos, então:

$$\begin{aligned} OP_2 &= \text{sen } x \\ P_2P &= \cos x \\ OB &= 1 \text{ (raio)} \\ BD &= \text{cotg } x \end{aligned}$$



Podemos observar que os triângulos OP_2P e OBD são semelhantes:

$$\triangle OP_2P \sim \triangle OBD \Rightarrow \frac{OP_2}{OB} = \frac{P_2P}{BD} \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{1} = \frac{\cos x}{\text{cotg } x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

Generalizando essa expressão para os demais quadrantes, temos:

$$\boxed{\text{cotgx} = \frac{\cos x}{\text{sen } x}, \textit{válida} \quad \forall x \neq k\pi, \quad k \in \quad Z.}$$

4.4.1 Tabela de valores:

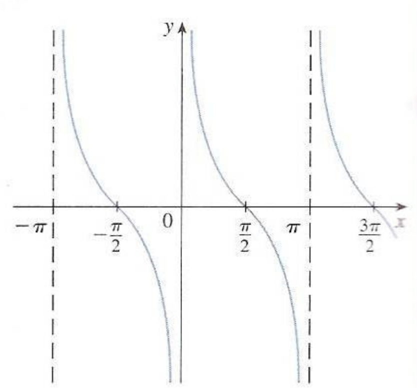
x	0	π/6 (30º)	π/4 (45º)	π/3 (60º)	π/2 (90º)	π	3π/2	2π
cotgx	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

Repare que de π/2 a 0, a cotangente vai crescendo até ficar paralela ao eixo das cotangentes, o mesmo acontecendo de 3π/2 a π (no sentido horário); π/2 a π, assim como de 3π/2 a 2π, a cotangente é sempre negativa e vai ficando cada vez menor, até a reta ficar paralela ao eixo das cotangentes também.

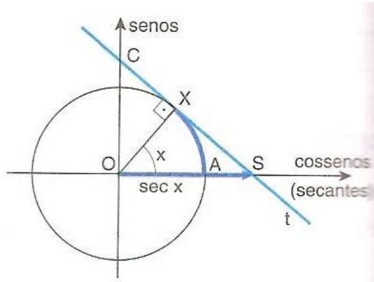
4.4.2 Propriedades:

1. Os sinais da cotangente são os mesmos da tangente, porém a função y=cotgx é decrescente nos quatro quadrantes.
2. como, a partir de π, a cotangente se repete, a função é periódica de período π.
3. a funçao cotangente é uma função ímpar, isto é, cotg(-x)=-cotgx (seu gráfico é simétrico em relação à origem).

4.4.3 Gráfico: chamado cotangentóide



4.5 Função secante

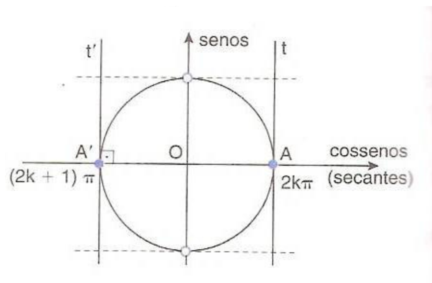


Seja x um arco do 1º quadrante e de extremidade X. A reta tangente ao ciclo, traçada pelo ponto X, intercepta o eixo dos cossenos no ponto S. Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{OS}$ é a secante do arco x.

No caso, temos secx= OS>0, pois o eixo das secantes (e é claro, sua orientação) coincide com o eixo dos cossenos; além disso, temos secx=OS>1, pois o ponto S é externo ao ciclo.

Quando x=2kπ, os pontos S e A coincidem (t//eixo dos senos) e OA=sec 2kπ =1, k ∈ Z; se, por outro lado, x=(2k+1) π. Os pontos S e A'coincidem, e O A' = sec(2k+1) π=-1, k∈Z.

No caso de x assumir um valor da forma $\frac{\pi}{2}$+kπ, k ∈ Z, não existe o ponto S e, consequentemente, não está definida sec($\frac{\pi}{2}$+kπ), k ∈ Z.



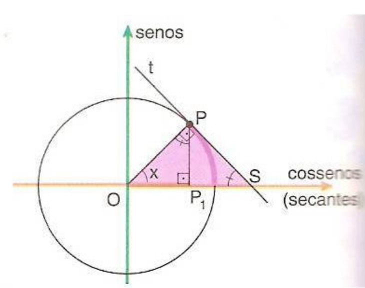
Domínio de f(x)=sec x: D(f)={ x ∈ IR/ x≠$\frac{\pi}{2}$+kπ, k ∈ Z}.

O conjunto imagem da função f(x)=sec x: Im(f)=IR-]-1,1[, pois o ponto S, quando existe, não pode ser, em hipótese alguma, interno ao ciclo.

Relação fundamental:

Traçando por P — extremidade do arco x — a tangente ao ciclo, obtemos no eixo das secantes o ponto S. Projetando o ponto P sobre o mesmo eixo, obtemos o ponto P_1.
Temos, então:

$$OS = \sec x$$
$$OP_1 = \cos x$$
$$OP = 1 \text{ (raio)}$$



Podemos observar que os triângulos OSP e OPP_1 são semelhantes:

$$\triangle OSP \sim \triangle OPP_1 \Rightarrow \frac{OS}{OP} = \frac{OP}{OP_1} \Rightarrow \frac{\sec x}{1} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Generalizando essa expressão para os demais quadrantes, temos a relação fundamental IV:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ válida para } \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

4.5.1 Tabela de valores

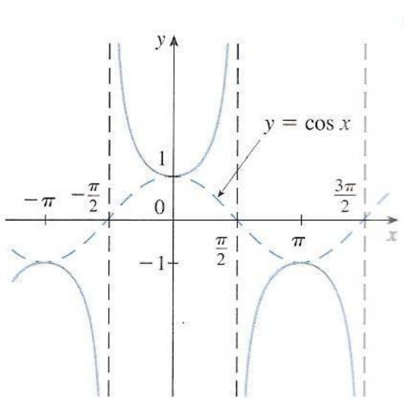
x	0	π/6 (30º)	π/4 (45º)	π/3 (60º)	π/2 (90º)	π	3π/2	2π
sec x	1	$2\sqrt{3}/3$	1	2	∄	-1	∄	1

Repare que, de 0 a π/2, a secante vai crescendo até a reta ficar paralela ao eixo dos cossenos, o mesmo acontecendo de 0 a -π/2 (no sentido horário); de π a π/2 (no sentido horário); assim como de π a 3π/2, a secante é sempre negativa e vai se tornando cada vez menor, até a reta ficar paralela ao eixo dos cossenos também.

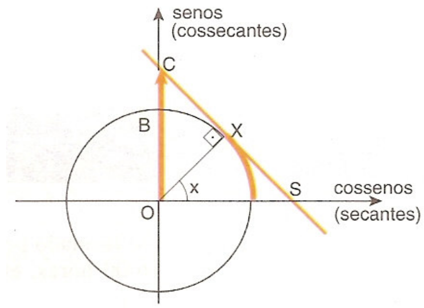
4.5.2 Propriedades:

1. Periodicidade: 2π
2. A função secante é uma função par, isto é, sec(-x)=sec(x) (seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas).

4.5.3 Gráfico: chamado secantóide

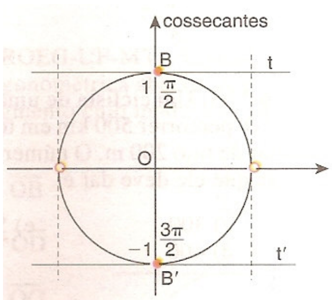


4.6 Função cossecante



Da mesma forma que a reta tangente ao ciclo, traçada pelo ponto X, intercepta o eixo dos cossenos no ponto S, ela intercepta também o eixo dos senos, feita no ponto C.

Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{OC}$ é a cossecante do arco x. no caso, temos cossecx=OC>0, pois o eixo das cossecantes é o próprio eixo dos senos; além disso, cossecx=OC>1, pois C é externo ao ciclo.



Se x assume algum dos valores π/2 + 2kπ, o ponto C coincide com B (t//eixo dos cossenos) e OB=cossec(π/2 + 2kπ) =1 , k ∈ Z.

Por outro lado, se x assume algum dos valores 3π/2 + 2kπ, o ponto C coincide com B' (t' // eixo dos cossenos) e OB'=cossec(3π/2 + 2kπ)=-1, k ∈ Z.

Somente nos casos em que x=kπ, k ∈ Z, não existe o ponto C e, consequentemente, não está definida cossec kπ, k ∈ Z.

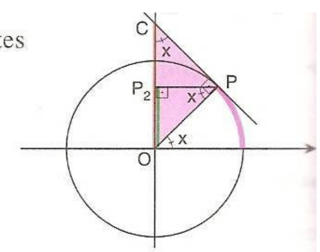
<u>Domínio da função f(x)=cossec x</u> : D(f)={ x ∈ IR/ x ≠ kπ, k ∈ Z }

<u>Conjunto imagem da função f(x)=cossec x:</u> Im(f)=IR -]-1,1[, pois o ponto C, quando existe, não pode ser interno ao ciclo.

<u>Relação fundamental:</u>

A tangente ao ciclo, traçada por *P*, intercepta o eixo das cossecantes no ponto *C*, e a projeção de *P* sobre o mesmo eixo é P_2.
Temos, então:

$$OC = \text{cossec } x$$
$$OP_2 = \text{sen } x$$
$$OP = 1 \text{ (raio)}$$



Podemos observar que os triângulos OCP e OPP_2 são semelhantes:

$$\triangle OCP \sim \triangle OPP_2 \Rightarrow \frac{OC}{OP} = \frac{OP}{OP_2} \Rightarrow \frac{\text{cossec } x}{1} = \frac{1}{\text{sen } x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Generalizando essa expressão para os demais quadrantes, temos a relação fundamental V:

$$\boxed{\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}}, \text{ válida para } \forall x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

4.6.1 Tabela de valores

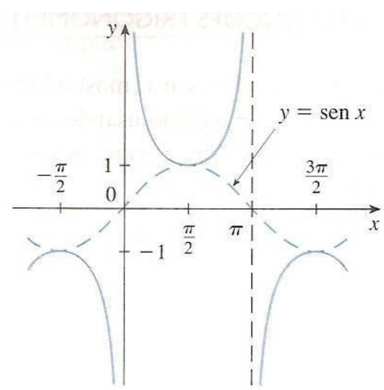
x	0	π/6 (30°)	π/4 (45°)	π/3 (60°)	π/2 (90°)	π	3π/2	2π
cossecx	$\nexists$	2	1	$2\sqrt{3}/3$	1	$\nexists$	-1	$\nexists$

4.6.2 Propriedades:

1. Periodicidade: 2π

2. A função cossecante é uma função ímpar, isto é, cossec(-x)=-cossec(x) (seu gráfico é simétrico em relação à origem).

4.6.3 Gráfico: chamado cossecantóide



Resumo das relações fundamentais:

1) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, válida ∀x ∈ IR

2) tg x=$\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}, válida\, \forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

3) cotg x=$\dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \dfrac{1}{tgx}, válida\, \forall x \neq k\pi, k \in Z.$

4) sec x=$\dfrac{1}{\cos x}, válida\, \forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$

5) cossec x=$\dfrac{1}{\text{sen}\, x}, válida\, \forall x \neq k\pi, k \in Z.$

6) $\sec^2 x = 1 + tg^2 x, válida\, \forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

7) $\text{cossec}^2 x = 1 + \cot g^2 x, \textit{válida} \quad \forall x \neq k\pi, k \in Z$

8) sen (-x)=-sen (x)

9) cos(-x)=cos(x)

10) tg (-x) = -tg(x)

11) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

12) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\, x$

13) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot gx$

Operações com arcos

Adição de arcos

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

Subtração de arcos

$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$

$\cos\,(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

$$\text{tg}\,(a-b) = \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

Duplicação de arcos

$\text{sen}\,2a = 2\text{sen}\,a \cdot \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

$$\text{tg}\,2a = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2\,a}$$

Observação

A partir da relação fundamental e do co-seno do arco duplo, obtém-se:

$$\cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2\, a$$

ou

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

FÓRMULAS DE FATORAÇÃO

$$\text{sen}\, p + \text{sen}\, q = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Fórmula do produto

$$\text{sen x cos y} = \frac{1}{2}[\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)]$$

$$\text{cos x cos y} = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\text{sen x sen y} = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$