

3. Polinômios

Definição: Um polinômio ou função polinomial P , na variável x , é toda expressão do tipo:
 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde $n \in \mathbb{N}$, $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ são números reais chamados coeficientes e as parcelas $a_i x^i, i = 1, \dots, n$, termos do polinômio. Cada termo é denominado monômio.

Exemplos:

$$P(x) = 5x^4 + 3x^3 - 2x + 1; \quad P(x) = -8x + \pi; \quad P(x) = x^5 + \sqrt{3}x^2 + 2$$

Contra-exemplos (expressões que não representam polinômios):

$$f(x) = x - 3x^{\frac{1}{2}} + 5; \quad f(x) = x^{-4} + 2x + 1$$

3.1. Valor numérico de um polinômio

Seja $P(x)$ um polinômio.

Considere $x = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) um valor fixo atribuído a x .

Calcule $P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$.

$P(\alpha)$ é o valor numérico do polinômio para $x = \alpha$.

OBS:

1. O valor numérico do polinômio P para $x=0$ é:

$$P(0) = a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + \dots + a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0.$$

Isto é, $P(0)$ é igual ao termo independente de x .

2. O valor numérico do polinômio P para $x=1$ é:

$$P(1) = a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + \dots + a_2 1^2 + a_1 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0.$$

Assim, $P(1) = \sum_{k=0}^n a_k$, isto é, $P(1)$ é igual a soma dos coeficientes do polinômio.

3. Quando $P(\alpha) = 0$, dizemos que α é raiz do polinômio $P(x)$.

3.2. Polinômio nulo

É aquele em que todos os seus coeficientes são iguais a zero ($P(x) = 0$).

3.3. Grau de um polinômio

O grau de um polinômio $P(x)$, não nulo, é o maior expoente da variável x , com coeficiente não nulo, que aparece na expressão que define $P(x)$.

Exemplo:

$$P(x)=5x^4-x^6 \quad \rightarrow \text{gr}(P)=6$$

$$P(x)=3x^2-5x+1 \quad \rightarrow \text{gr}(P)=2$$

$$P(x)=5 \quad \rightarrow \text{gr}(P)=0$$

OBS: Não se define o grau de polinômio nulo.

3.4. Igualdade de polinômios

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são iguais, $P(x)=Q(x)$, quando todos os seus coeficientes são ordenadamente iguais.

Sejam $P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $Q(x)=b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

$$P(x)=Q(x) \leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_0 = b_0 \end{cases} \quad \text{Coeficientes de mesmo grau são iguais}$$

3.5. Operações

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ tais que

$P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $Q(x)=b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, $n \in \mathbb{N}$.

3.5.1. Adição e subtração de polinômios

A adição e subtração de polinômios é feita a partir da adição e subtração dos coeficientes correspondentes a um mesmo grau.

$$P(x)+Q(x)=(a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$$

$$P(x)-Q(x)=(a_n-b_n)x^n + (a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_2-b_2)x^2 + (a_1-b_1)x + (a_0-b_0)$$

Exemplo:

$$P(x)=3x^3-2x^2+2 \quad \text{e} \quad Q(x)=3x^4-7x^3+x+1$$

$$P(x)+Q(x)=(0+3)x^4+(3-7)x^3+(-2+0)x^2+(0+1)x+(2+1)=3x^4-4x^3-2x^2+x+3$$

$$P(x)-Q(x)=(0-3)x^4+(3-(-7))x^3+(-2-0)x^2+(0-1)x+(2-1)=-3x^4+10x^3-2x^2-x+1$$

3.5.2. Multiplicação de polinômios

A multiplicação é feita pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e multiplicação.

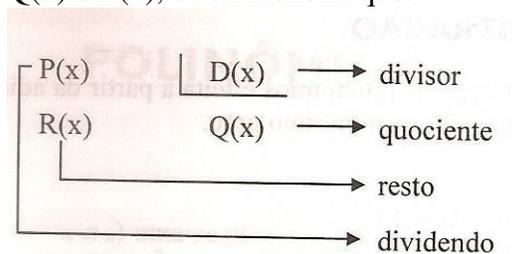
OBS: Se o grau do polinômio P é n e o grau do polinômio Q é m, então o grau do polinômio P.Q será n+m.

Exemplo: $P(x)=2x-1$ e $Q(x)=5x^2+2x-2$

$$\begin{aligned} P(x).Q(x) &= (2x-1)(5x^2+2x-2) \\ P(x).Q(x) &= 10x^3+4x^2-4x-5x^2-2x+2 \\ P(x).Q(x) &= 10x^3-x^2-6x+2 \end{aligned}$$

3.5.3 Divisão de polinômios

Dividir um polinômio P(x) por um polinômio D(x), não nulo, é achar um par de polinômios Q(x) e R(x), de tal maneira que:



Ou seja, dividir o polinômio P(x) pelo polinômio D(x) é obter os polinômios Q(x) e R(x) tais que:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

onde $0 \leq G_R < G_D$ ou a divisão é exata e $R(x) = 0$

Quando o resto da divisão de P(x) por D(x) é nulo, dizemos que o polinômio P(x) é divisível por D(x).

Método de divisão de polinômios

1. Método da chave

Vamos dividir $2x^3+3x-1$ por x^2+2x+5

Solução: *Completa-se o dividendo com $0x^2$*

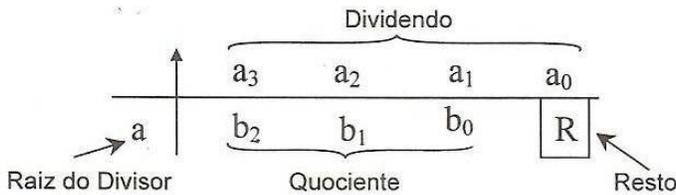
$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 0x^2 + 3x - 1 \\
 \underline{-2x^3 - 4x^2 - 10x} \\
 -4x^2 - 7x - 1 \\
 \underline{4x^2 + 8x + 20} \\
 x + 19
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{x^2 + 2x + 5} \\
 \underline{2x - 4}
 \end{array}$$

Então: $Q(x) = 2x - 4$
 $R(x) = x + 19$

2. Dispositivo prático de Briott-Ruffini

Este dispositivo é utilizado para dividir um polinômio $P(x)$ por um polinômio do 1º grau da forma $x-a$. Neste método, trabalha-se apenas com os coeficientes do polinômio e com o valor de a .

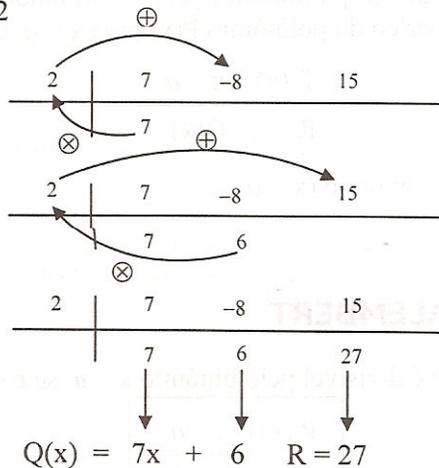
Dispositivo: Seja $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ por $D(x)=x-a$



Exemplo:

$P(x) = 7x^2 - 8x + 15$

Binômio: $x - 2$



OBS: Se o resto da divisão é zero, então o polinômio é divisível pelo binômio divisor.

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio do 1º grau do tipo $x-a$ é igual ao valor numérico do polinômio $P(x)$ para $x=a$, ou seja, $P(a)=R$.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \hline R & Q(x) \end{array}$$

$R = P(a)$, onde a é raiz do binômio $(x - a)$.

Como o divisor é do 1º grau, o resto é nulo ou tem grau zero. De qualquer modo, R é uma constante, isto é, independente de x . Para calcular o valor de R basta substituir na identidade x por a . Note que a é raiz do binômio.

Teorema de D’Alembert

Um polinômio $P(x)$ é divisível pelo binômio $x-a$ se, e somente se, $P(a)=0$.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \hline 0 & Q(x) \\ R = P(a) = 0 & \end{array}$$

Note que “ a ” além de ser raiz do binômio $x-a$ é também raiz do polinômio $P(x)$.

OBS: Conhecida uma raiz r do polinômio $P(x)$, podemos obter as demais raízes de $P(x)$ da seguinte maneira:

- Dividimos $P(x)$ por $x-r$, usando o algoritmo de Briott-Ruffini. As raízes do quociente $Q(x)$ dessa divisão são as demais raízes de $P(x)$.

Divisão por $(x-a)(x-b)$

Se um polinômio $P(x)$ é divisível separadamente pelos binômios $(x-a)$ e $(x-b)$, com $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível pelo produto $(x-a)(x-b)$. (A recíproca é verdadeira)

Generalizando, se $P(x)$ é divisível por n fatores distintos $(x-a_1), (x-a_2), \dots, (x-a_n)$ então $P(x)$ é divisível pelo produto $(x-a_1).(x-a_2)... (x-a_n)$.

Exercício proposto:

Calcule as raízes de $P(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10$, sabendo que $P(x)$ é divisível por $x - 2$.

3.6 Equações polinomiais

Definição: Se $P(x)$ é um polinômio de grau $n > 0$, chama-se equação algébrica ou polinomial à igualdade $P(x)=0$. Assim, equação algébrica de grau n é uma equação do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Raiz de uma equação algébrica

Dada uma equação algébrica $P(x)=0$, o número r é uma raiz dessa equação se, e somente se, $P(r)=0$.

Conjunto-solução

Conjunto-solução de uma equação algébrica é o conjunto formado por todas as raízes (e somente por elas) da equação. Resolver uma equação é obter seu conjunto solução.

Equação do 1º grau

Uma equação é classificada como equação do 1º grau quando puder ser escrita sob a forma $ax+b=0$,

onde a e b são reais com $a \neq 0$. Uma equação do 1º grau tem apenas uma raiz que pode ser obtida isolando-se x .

Equação do 2º grau

Uma equação é classificada como equação do 2º grau quando puder ser escrita sob a forma $ax^2+bx+c=0$,

onde a, b e c são reais, com $a \neq 0$. Uma equação do 2º grau tem no máximo duas raízes, que podem ser obtidas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

OBS:

- Se $\Delta > 0$ então a equação admite duas raízes reais e distintas
- Se $\Delta = 0$ então a equação admite duas raízes reais e iguais.
- Se $\Delta < 0$ então a equação admite duas raízes complexas.

Equação do 3º e 4º grau

Uma equação é classificada como equação do 3º e 4º grau, quando puder ser escrita sob a forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{ou} \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

As raízes das equações do terceiro e quarto graus podem ser obtidas através de fórmulas gerais que são extremamente trabalhosas.

OBS: As equações de grau superior a 4 não apresentam fórmulas resolutivas. Desta forma, apresentam-se teoremas válidos para quaisquer equações algébricas que possibilitam a resolução ou, ao menos, informações úteis na obtenção das raízes de uma equação.

Teorema Fundamental da Álgebra

O teorema da Álgebra sobre equações algébricas de coeficientes reais diz:

Toda equação algébrica de grau n admite no conjunto dos números complexos n raízes complexas.

O teorema garante a existência de n raízes complexas, não diz como obtê-las.

O teorema tem validade no conjunto dos números complexos, ou seja, pode ou não ter raiz real.

Teorema da decomposição

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau $n > 0$. Demonstra-se que $P(x)$ pode ser decomposto, ou seja, fatorado, na forma seguinte:

$$P(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$$

onde r_1, r_2, \dots, r_n são as raízes da equação: $P(x) = 0$

OBS: Esta forma fatorada mostra que a equação tem no máximo n raízes distintas, e não exatamente n , pois não sabemos se os números r_1, r_2, \dots, r_n são todos distintos dois a dois.

Multiplicidade de uma raiz

Dizemos que r é uma raiz de multiplicidade m ($m \geq 1$), da equação $P(x) = 0$ se, e somente se, a equação puder ser escrita sob a forma,

$$(x-r)^m \cdot Q(x) = 0$$

Isto é, r é raiz de multiplicidade m de $P(x) = 0$ quando o polinômio P é divisível por $(x-r)^m$, ou seja, a decomposição de P apresenta exatamente m fatores iguais a $(x-r)$.

Exemplo: A equação $x^5 \cdot (x+7)^3$ admite as raízes $x=0$ (com multiplicidade 5) e $x=-8$ (com multiplicidade 3).

Pesquisa de raízes

Quando se conhece uma raiz r de uma equação algébrica $P(x)=0$, divide-se $P(x)$ por $x-r$, recaiando-se numa de grau menor.

Exemplo: Se $x=-3$ é uma raiz da equação $x^3+3x^2+2x+6=0$, determine as outras raízes.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \\
 & \underline{1} & \underline{0} & \underline{2} & \underline{0} \\
 & & & & \text{Resto}
 \end{array}$$

$x^2 + 2 = 0$
 $x^2 = -2$
 $x = \pm\sqrt{2} i$

Teorema das raízes inteiras

Se r é uma raiz inteira de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_n \neq 0$, então r é um divisor de a_0 .

OBS: Este teorema permite descobrir se a equação tem ou não raízes inteiras; basta para tanto, verificar um por um os divisores do termo independente de x , a_0 .

Teorema das raízes racionais

Se $r = \frac{p}{q}$ (p e q inteiros primos entre si), é uma raiz da equação algébrica de coeficientes inteiros.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_n \neq 0$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Observação:

Este teorema abrange o anterior, ou seja, o conjunto das possíveis raízes racionais contém o conjunto das possíveis raízes inteiras.

Teorema das raízes complexas

Se um número complexo $x = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) é raiz de uma equação algébrica com **coeficientes reais**, então o seu conjugado $\bar{x} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Importante:

Este teorema apresenta as conseqüências:

- O número de raízes complexas, não reais, de uma equação algébrica com coeficientes reais é sempre par.
- Toda equação algébrica de coeficientes reais e grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

Exercícios

1) Determine quais expressões são polinômios:

- a) $3x^6 + 2x^4 - 4x + 7^{-2}$ d) $(a+3)x^4 - (a^2-3)x^3 - \sqrt{3}$
b) $x^{\frac{2}{5}} - 5x + 3$ e) $3x^{-3} + 2x^{-2} - 7x^{-1} - 5$
c) $(4x^2 - 1)^{15}$ f) π

2) Determine o valor de r no polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 + rx - 3$, sabendo-se que $x = -2$ é raiz.

Determine a equação deste polinômio.

3) Dado o polinômio $P(x) = (m^2 - 1) \cdot x^2 + (m - 1) \cdot x + 7$, discuta, em função de m , o seu grau.

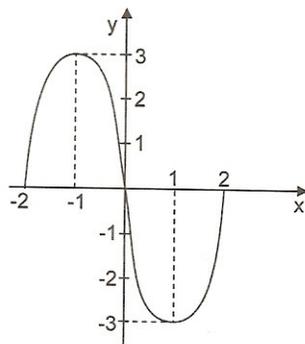
4) Dado os polinômios $P(x) = 10x^4 - 3x^2 + 3x + 10$ e $Q(x) = 2x^2 - 5x$, determine o que se pede:

- a) $(P+Q)(x)$ c) $(-5) \cdot P(x)$
b) $(P-Q)(x)$ d) $(P \cdot Q)(x)$

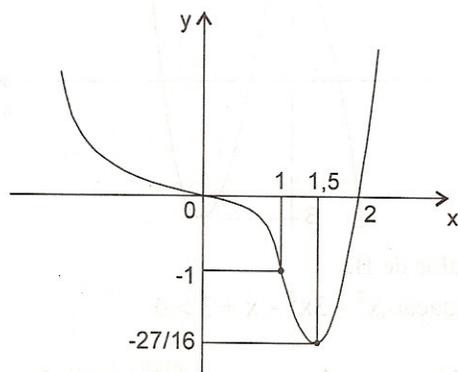
5) Calcule $\frac{8x^4 - 5x^3 + 3x + 9}{x + 6}$, usando Briot-Ruffini:

Universidade Federal Fluminense
 ICEx – Volta Redonda
 Introdução a Matemática Superior
 Professora: Marina Sequeiros

- 6) O gráfico abaixo representa uma função polinomial no intervalo $[-2,2]$ definida por $P(x) = x^3 + ax^2 + bx$. Determine:



- a) O valor numérico do polinômio para $x = 1$
 b) As raízes de $P(x)$
 c) Os valores de a e b
- 7) Calcule as raízes de $P(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10$, sabendo que $P(x)$ é divisível por $x - 2$.
- 8) (PUC) Os valores das constantes a e b , para os quais $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x - 3}$ para todo $x \notin \{2, 3\}$, são tais que o produto ab vale:
 (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2
- 9) (UNIRIO) Seja f um polinômio de grau 4, cujo gráfico é dado pela seguinte figura:

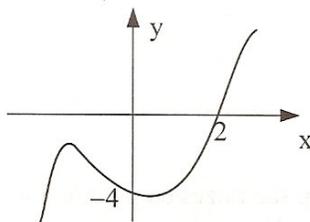


Sabendo que o zero é raiz tripla de f , determine:

- a) A lei que define f ,
 b) Os valores de $x < 1,5$ tais que $-1 < f(x) \leq 0$.

Universidade Federal Fluminense
 ICEX – Volta Redonda
 Introdução a Matemática Superior
 Professora: Marina Sequeiros

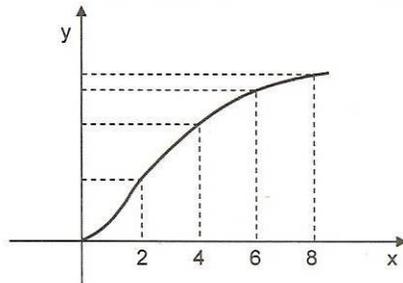
- 10) O gráfico do polinômio definido por: $P(x) = x^3 - 2x + a$ ($a \in \mathbb{R}$) está representado abaixo.



Determine as três raízes desse polinômio.

Exercícios propostos:

- 1) Determine o valor de r no polinômio $P(x) = x^3 - rx^2 + 2$, sabendo-se que $x=1$ é a raiz desse polinômio. Determine a equação do polinômio.
- 2) A figura a seguir mostra uma função que dá a quantidade total de peças que um operário monta em função do número de horas trabalhadas em um dia: $y = -x^3 + 5x^2 + 180x$.



- a) Quantas peças monta nas duas primeiras horas de trabalho? E dessas peças, quantas monta na primeira hora e quantas monta na segunda hora?
 - b) Essa função é crescente ou decrescente no intervalo $[0, 8]$? Por quê?
 - c) Em qual intervalo dos assinalados no eixo x , o operário monta o maior número de peças?
- 3) Seja o polinômio $P(x) = x^4 - 3x^2 - 5$. Calcule $P(-1) - \frac{1}{7}P(3)$.
 - 4) Determine m e n no polinômio $P(x) = mx^3 - 2x^2 + nx - 1$, sabendo-se que 1 é a raiz do polinômio e que $P(-2) = -21$.
 - 5) Determinar o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$, sabendo-se que $P(0) = 5$, $P(1) = 6$ e $P(-2) = -9$.
 - 6) Determine a , b e c , de modo que $(a + b - 1)x^2 + (b - 2c)x + (2c - 1) = 0$.

Universidade Federal Fluminense
 ICEx – Volta Redonda
 Introdução a Matemática Superior
 Professora: Marina Sequeiros

- 7) Determine a e b de modo que $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{5x+1}{x^2-1}$. ($x \neq 1$ e $x \neq -1$)
- 8) Determine a , b e c de modo que os polinômios $P(x) = 15x + 3$ e $Q(x) = (a-b)x^2 + (3a+2b)x + (2a-c)$ sejam iguais.
- 9) Determine a e b de modo que $\left| \begin{matrix} x & a \\ 3x-2 & x-b \end{matrix} \right| = x^2 - 4$.
- 10) Determine quais afirmações são verdadeiras:
- A soma de dois polinômios de grau 5 é sempre um polinômio de grau 5.
 - O produto de dois polinômios de graus 5 e 8, respectivamente, é um polinômio de grau 13.
 - A diferença de dois polinômios de grau 9 pode ser um polinômio de grau 5.
- 11) Dados os polinômios $P(x) = 8x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x + 4$ e $Q(x) = 4x^2 - 5$, determine:
- $(P+Q)(x)$
 - $(P-Q)(x)$
 - $\frac{(-2) \cdot P(x)}{Q(x)}$
 - $(P \cdot Q)(x)$
 - $\frac{P(x)}{x+2}$
- 12) Seja o polinômio $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Determine os seguintes polinômios:
- $P(x+1)$
 - $P(1-x)$
 - $P(x^2 - 2x)$

Respostas dos exercícios propostos

- a,c,d, f
- 372, na primeira hora monta 184 e na segunda 188;
 - Crescente, porque aumentando-se o número de horas de trabalho, aumenta-se o número de peças montada;
 - $[0,2]$
- 14
- $m=1$ e $n=2$
- $P(x) = -2x^2 + 3x + 5$
- $a=0, b=1$ e $c=1/2$
- $a=3$ e $b=2$
- $a=b=c=3$
- $a=-2$ e $b=6$
- b,c

Universidade Federal Fluminense
 ICEx – Volta Redonda
 Introdução a Matemática Superior
 Professora: Marina Sequeiros

- 11) a) $(P+Q)(x) = 8x^5 - 5x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 3x - 1$
 b) $(P-Q)(x) = 8x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 3x + 9$
 c) $\frac{(-2) \cdot P(x)}{Q(x)} = -4x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{25}{8}$ resto: $r(x) = -\frac{73}{2}x + \frac{61}{8}$
 d) $(P \cdot Q)(x) = 32x^7 - 20x^6 - 12x^5 + 25x^4 - 47x^3 + 16x^2 + 15x - 20$
 e) $\frac{P(x)}{x+2} = 8x^4 - 21x^3 + 49x^2 - 98x + 193$ resto: $r(x) = -382$
- 12) a) $P(x+1) = 2x^2 + x + 4$
 b) $P(1-x) = 2x^2 - x$
 c) $P(x^2 - 2x) = 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 6x + 5$

3.7 Produtos notáveis

Os produtos notáveis são multiplicações entre polinômios, muito conhecidas em virtude de seu uso extenso.

Igualdade	Exemplo
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+2)^2 = x^2 + 2x + 4$
$(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(4x-2)^2 = 16x^2 - 16x + 4$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$
$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$	$(x-5)(x-2) = x^2 - 7x + 10$
$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$	$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$	$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$
$x^4 - a^4 = (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$	$x^4 - 16 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$
$x^5 - a^5 = (x-a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$	$x^5 - 32 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$
$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$	

3.8. Fatoração

Fatorar um polinômio significa reescrevê-lo como produto de outros polinômios.

Exemplos:

a) $x^3 - x =$

b) $x^4 - 5x^2 =$

c) $x^4 - 1 =$

d) $x^3 + 8 =$

e) $x^6 - 27 =$

Exercícios:

1) Fatorar os seguintes polinômios:

a) $y = 6x + x^2$

d) $y = x^7 - 1$

b) $y = x^2 - 25$

e) $y = x^6 + 2x^4 + x^2$

c) $y = 16x^4 - a^4$

f) $y = x^5 - 6x^3 + 9x$

2) Utilizando a resolução do exercício anterior, determine onde cada polinômio se anula ($P(x) = 0$).

3) Simplifique

a) $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

c) $\frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

d) $\frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$

e) $\frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x - 1}$

f) $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}}{x - 3}$

4) Fatore o polinômio do 2º grau

a) $x^2 - 3x + 2$

b) $x^2 - x - 2$

c) $x^2 - 2x + 1$

d) $x^2 - 6x + 9$

e) $2x^2 - 3x$

f) $2x^2 - 3x + 1$

Exercícios propostos

1) Verifique as identidades:

a) $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

b) $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

c) $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$

d) $x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$

e) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

onde $n \neq 0$ é um natural.

2) Simplifique

a) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{5}}{x - 5}$

e) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x - p}$

b) $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{p^2}}{x - p}$

f) $\frac{x^4 - p^4}{x - p}$

c) $\frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

g) $\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$

d) $\frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

h) $\frac{(x + h)^2 - (x - h)^2}{h}$

3) Fatore o polinômio do 2º grau

a) $x^2 - 25$

c) $3x^2 + x - 2$

b) $4x^2 - 9$

d) $2x^2 - 5x$

4) Fatore os polinômios dados

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

c) $x^3 + 2x^2 - 3x$

d) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

e) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

f) $x^3 - 1$

5) Determine, caso existam, as raízes inteiras da equação:

$$\begin{array}{lll}
 a) x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0 & b) x^3 - x^2 + x + 14 = 0 & c) x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2 \\
 d) 2x^3 - x^2 - 1 = 0 & e) x^3 + x^2 + x - 14 = 0 & f) x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0
 \end{array}$$

3.9. Completar quadrados

O processo de completar quadrados tem base nas fórmulas de produtos notáveis $(a+b)^2$ e $(a-b)^2$, fazendo-se uma comparação direta entre os termos. É uma operação muito utilizada em polinômios de grau 2.

Exemplos: Completar quadrados:

a) $x^2 + 6x$

Temos que comparar com $(a+b)^2$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 &= x^2 + 6x
 \end{aligned}$$

Comparando, diretamente, temos $a=x$ e que $2ab=6x \rightarrow 2b=6 \rightarrow b=3$. Logo $b^2=9$.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (x+3)^2 &= x^2 + 6x + 9
 \end{aligned}$$

Assim: $x^2 + 6x = x^2 + 6x + (9-9) = (x^2 + 6x + 9) - 9 = (x + 3)^2 - 9$

b) $x^2 - x + 2 = (x^2 - x) + 2$

Inicialmente, vamos desconsiderar a constante. Podemos comparar essa expressão com $(a-b)^2$, pois o coeficiente do termo de grau 1 é negativo. Assim:

$$\begin{aligned}
 (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
 &= x^2 - x
 \end{aligned}$$

Comparando, diretamente, temos que $a=x$ e que $2ab=x$. Daí, $2b=1 \rightarrow b=1/2$. Logo, $b^2=1/4$

$$\begin{aligned}
 (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= x^2 - x + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

c) Assim, $(x^2 - x) + 2 = (x^2 - x) + 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

Exercício: Completar quadrados

- a) x^2-4x
- b) $-x^2+8x+3$
- c) x^4-2x^2+2

Exercício proposto

Completar quadrados:

- a) x^2+2x+7
- b) $x-9x^2$
- c) x^4-3x^2+1