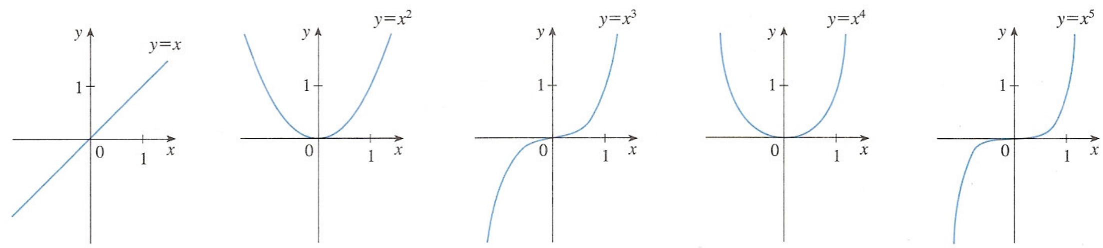
4.3 Funções potência

Uma função da forma $f(x)=x^n$, onde n é uma constante, é chamada **função potência.**

Os gráficos de $f(x)=x^n$ para n=1,2,3,4 e 5 são dados a seguir.



A forma geral do gráfico de $f(x)=x^n$ depende de a ser par ou ímpar. Vamos considerar vários casos:

1º caso) n é um número natural ímpar maior do que 1.

Considere, por exemplo, as funções: $y= x^3$, $y= x^5$ e $y=x^7$

a) Domínio: IR

b) Todos os gráficos passam pela origem.

c) Tomemos alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens.

x	$y= x^3$	$y= x^5$	$y=x^7$
-3	-27	-243	-2187
-2	-8	-32	-128
-1	-1	-1	-1
-1/2	-1/8	-1/32	-1/128
-1/3	-1/27	-1/243	-1/2187
0	0	0	0
1/3	1/27	1/243	1/2187
1/2	1/8	1/32	1/128
1	1	1	1
2	8	32	128
3	27	243	2187

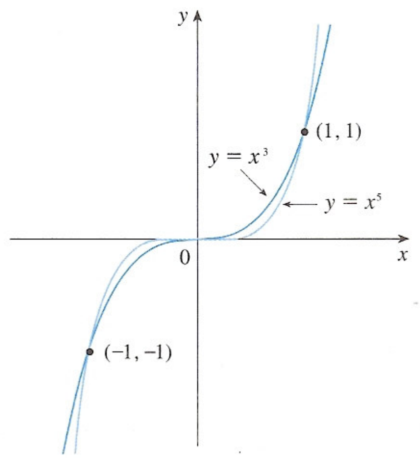
Podemos concluir:

- Todas as funções desse tipo passam pelos pontos: (0,0),(-1,-1) e (1,1).
- Todas as funções desse tipo são exemplos de funções ímpares.

<u>Definição de função ímpar:</u>
f(-x)=-f(x), para todo x pertencente ao domínio de f, isto é, quando atribuímos a x valores simétricos, as imagens possuem o mesmo valor absoluto, mas diferem em sinal. O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

- Quando x aumenta muito, o mesmo sucede as imagens dessa função. Se x aumenta muito em valor absoluto, porém com sinal negativo, o mesmo sucede com as imagens.

Gráfico:



d) Imagem(f)=IR

Se n for ímpar, então f(x)=x ^{n} será uma função ímpar e seu gráfico é similar ao de y=x^3. Observe a seguir, no entanto, que à medida que n cresce, o gráfico de y=x^n torna-se mais achatado quando próximo de zero e mais inclinado quando |x|≥1.

2º caso) Suponhamos que n seja par e maior do que 2.

Considere, por exemplo, as funções: y= x^2 , y= x^4 e y=x^6

a) Domínio: IR
b) Imagem: conjunto dos reais não negativos: IR^+.
c) Todos os gráficos passam pela origem.
d) Tomemos alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens.

x	y= x^2	y= x^4	y=x^6
-3	9	81	729
-2	4	16	64
-1	1	1	1
-1/2	¼	1/16	1/64
-1/3	1/8	1/81	1/729
0	0	0	0
1/3	1/8	1/81	1/729
1/2	1/3	1/16	1/64
1	1	1	1
2	4	16	64
3	9	81	729

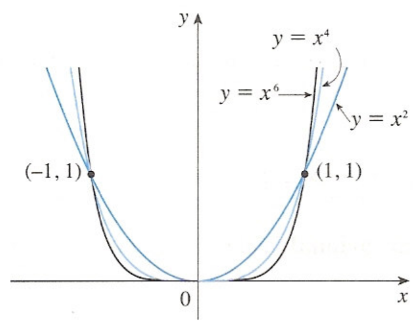
Podemos concluir:

- Todas as funções desse tipo passam pelos pontos: (0,0),(-1,1) e (1,1).
- Todas as funções desse tipo são exemplos de funções pares

<u>Definição de função par</u>: f(-x)=f(x), para todo x pertencente ao domínio de f, isto é, quando atribuímos a x valores simétricos, as imagens são iguais. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo 0y.

- Quando x aumenta muito, o mesmo sucede as imagens dessa função. Se x aumenta muito em valor absoluto, porém com sinal negativo, as imagens aumentam muito e são positivas.

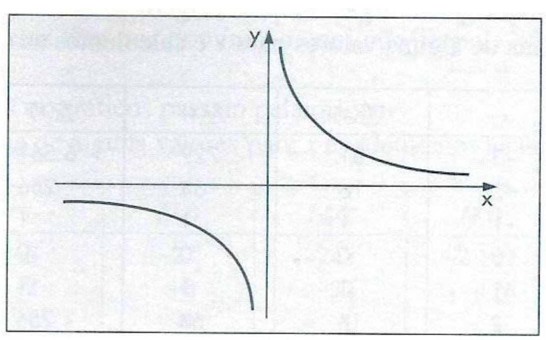
Se n for par, então $f(x)=x^n$ será uma função par e seu gráfico é similar ao da parábola $y=x^2$.



3º caso) suponhamos que n seja um número impar negativo.
Consideremos por exemplo a função: $f(x)=x^{-1} = 1/x$.

a) Domínio: IR-{0}
b) Interceptos (interseção com o eixo 0x ou 0y): não há.
Tomemos alguns valores para c e calculemos as respectivas imagens

x	-2	-1	-1/2	-1/3	-1/4	¼	1/3	½	1	2	3
y	-1/2	-1	-2	-3	-4	4	3	2	1	½	1/3



c) Gráfico: é uma hipérbole.
d) Imagem: IR-{0}
e) É uma função ímpar: f(x)=-f(-x)

Pode-se verificar (construindo-se tabelas de valores) que as demais funções desse tipo, por exemplo, $f(x)=x^{-3} = 1/x^3$ ou $f(x)= x^{-5} = 1/x^5$) possuem um padrão gráfico semelhante ao da função 1/x.

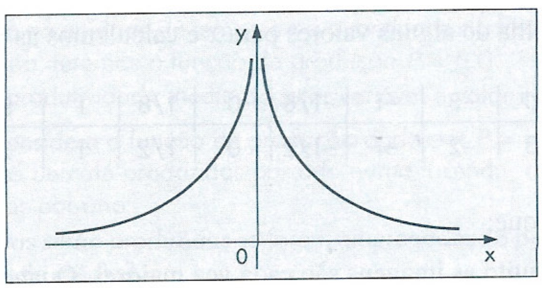
4º caso: Suponhamos que n seja par negativo

Consideremos por exemplo a função: $f(x)=x^{-2} = 1/x^2$

a) Domínio: IR-{0}
b) Interceptos: não há.
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculamos as respectivas imagens:

x	−3	−2	−1	−1/2	−1/4	1/4	1/2	1	2	3
$f(x)$	1/9	1/4	1	4	16	16	4	1	1/4	1/9

O gráfico dessa função é dado a seguir.



d) Imagem(f)=IR_+^* (conjunto dos reais positivos)
e) Todas as funções desse tipo são exemplos de funções pares, isto é, Quando atribuímos a x valores simétricos as imagens são iguais, isto é, f(-x)=f(x), para essas funções.

Podemos concluir que:

- Quando x aumenta muito, as imagens se aproximam de zero. Se x aumenta muito em valor absoluto, porém com sinal negativo, as imagens também se aproximam de zero.
- Quando x se aproxima de zero por valores positivos, as imagens são cada vez maiores. Quando x se aproxima de zero por valores negativos, as imagens são também cada vez maiores.

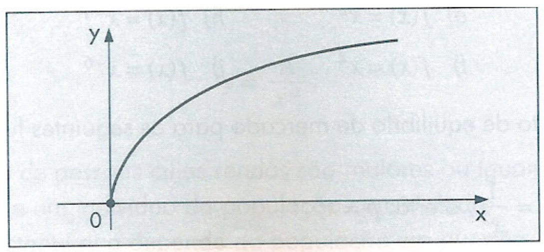
Pode-se verificar (construindo-se tabelas de valores) que as demais funções desse tipo (por exemplo, $f(x)=x^{-4} = 1/x^4$ ou $f(x)=x^{-6} = 1/x^6$) possuem um padrão gráfico semelhante ao da figura anterior. O conjunto imagem dessas funções é o conjunto dos números reais positivos.

5º caso: Suponhamos que n seja igual a 1/n. A função f(x)=$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma função raiz.

(i) Para n=2, ela é a função raiz quadrada, isto é f(x)=$x^{1/2} = \sqrt{x}$. Vamos estudar essa função.

a) Domínio: IR^+ (conjunto dos reais não negativos)=[0, ∞)
b) Interceptos: (0,0)
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens:

x	0	1/4	1	2,25	4	9	16	25	36
$f(x)$	0	1/2	1	1,5	2	3	4	5	6



d) Imagem(f)=IR_+ (conjunto dos reais não negativos)

O gráfico é a parte superior da parábola x=y^2

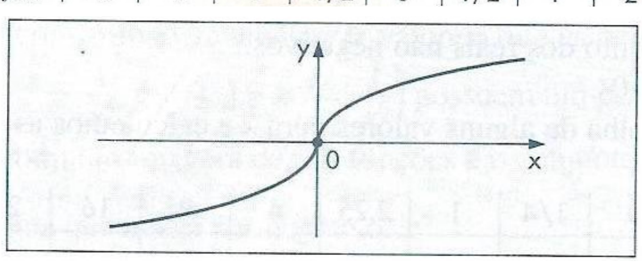
Podemos concluir que:

- Quando x aumenta muito as imagens são cada vez maiores.
- Para outros valores pares de n, o gráfico de y=$\sqrt[n]{x}$ é similar ao de y=$\sqrt{x}$.

(ii) Para n=3, temos a função raiz cúbica f(x)=$\sqrt[3]{x}$

a) Domínio: IR (lembre-se de que todo número real tem uma raiz cúbica).
b) Interceptos: (0,0).
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens:

x	−27	−8	−1	−1/8	0	1/8	1	8	27
$f(x)$	−3	−2	−1	−1/2	0	1/2	1	2	3



d) Imagem(f)= IR
e) É uma função ímpar pois valores simétricos de x têm imagens simétricas, isto é, f(-x)=-f(x.)

Podemos concluir que:

- Quando x aumenta muito, as imagens são cada vez maiores. Quando x aumenta muito em valor absoluto, ma com sinal negativo, as imagens são cada vez maiores em valor absoluto, mas também com sinal negativo.

O gráfico de y=$\sqrt[n]{x}$ para n ímpar (n>3) é similar ao de y=$\sqrt[3]{x}$.

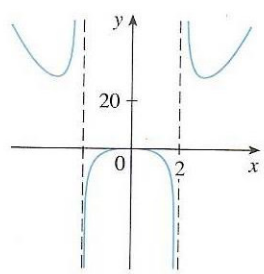
4.4 Funções racionais

Uma função racional f é a razão de dois polinômios:

f(x)=$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinômios.

Domínio: {x∈IR/Q(x)≠0}.

Exemplo: f(x)=$\dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ é uma função racional com domínio { x∈IR/x≠-2 e x≠2}

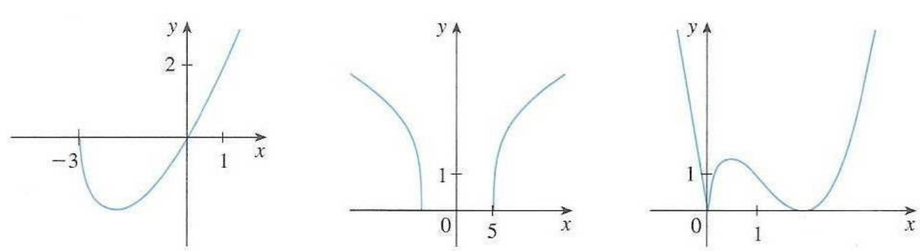


4.5 Funções Algébricas

Uma função f é chamada função algébrica se puder ser construída por meio de operações algébricas (como adição, multiplicação, divisão e extração de raízes) a partir de polinômios. Toda função racional é automaticamente uma função algébrica. A seguir, alguns exemplos:

F(x)=$\sqrt{x^2 + 1}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x-2)\sqrt[3]{x+1}$

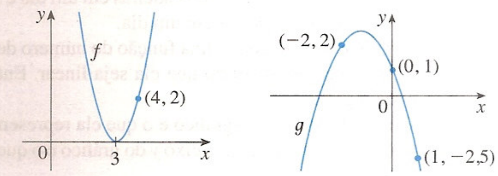
Os gráficos das funções algébricas podem assumir diversas formas. Vejamos alguns exemplos:



(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

Exercícios propostos:

1) Encontre expressões para as funções quadráticas cujos gráficos são mostrados abaixo.



2) Encontre uma expressão para uma função cúbica f se f(1)=6 e f(-1)=f(0)=f(2)=0.

3) A relação entre as escalas de temperatura Fahrenheit (F) e Celsius(C) é dada pela função linear F=(9/5)C+32.

a) Esboce o gráfico dessa função
b) O que representa nesse gráfico a inclinação? O que representa a interseção com o eixo F do gráfico?

4) Um administrador de uma fábrica de móveis descobre que custa $2200 para fabricar 100 cadeiras em um dia e $ 4800 para produzir 300 cadeiras em um dia.

a) Expresse o custo como uma função do número de cadeiras produzidas, supondo que ela seja linear. Então, esboce o gráfico.
b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa?
c) Qual a interseção com o eixo y do gráfico e o que ela representa?

5) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico de cada uma das funções a seguir.

a) f(x)= $\dfrac{5}{4x}$
b) f(x)= $\dfrac{-7}{x+4}$
c) f(x)= $\dfrac{7}{x-6}$
d) f(x)= $\dfrac{x}{x+1}$
e) f(x)= $\dfrac{x+4}{x-4}$

6) Esboce os gráficos das funções a seguir, determinando seu domínio, imagem e verificando se é função par ou ímpar.

a) f(x)= $-x^{3}$
b) f(x)= x^{4}
c) f(x)= x^{-3}
d) f(x)= $x^{\frac{1}{5}}$
e) f(x)= $\sqrt[4]{x}$
f) f(x)= x^{-4}

4.6 Função máximo inteiro

Definição: Uma função f: IR → IR recebe o nome de função maior inteiro quando associa a cada elemento de x ∈ IR o elemento [x] que é o maior inteiro que é menor do que ou igual a x.

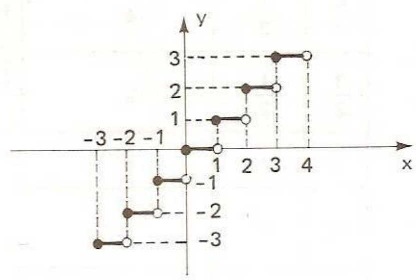
f: IR → IR
x [x]

Exemplos: [4]=4 ; [4,8]=4, [π]=3, [$\sqrt{2}$]=1, [-1/2]=-1

Para construirmos o gráfico, notemos que:

Para construirmos o gráfico, notemos que

$-3 \leqslant x < -2 \Longrightarrow y = [x] = -3$
$-2 \leqslant x < -1 \Longrightarrow y = [x] = -2$
$-1 \leqslant x < 0 \Longrightarrow y = [x] = -1$
$0 \leqslant x < 1 \Longrightarrow y = [x] = 0$
$1 \leqslant x < 2 \Longrightarrow y = [x] = 1$
$2 \leqslant x < 3 \Longrightarrow y = [x] = 2$
$3 \leqslant x < 4 \Longrightarrow y = [x] = 3$
etc.



A imagem da função maior inteiro é o conjunto dos inteiros, isto é, Im(f)=Z.

Exercício proposto:

Construir o gráfico das seguintes funções definidas em IR:

a) f(x)=2[x]
b) f(x)=[2x]
c) f(x)=-[x]
d) f(x)=[x/2]