4.7 Função modular

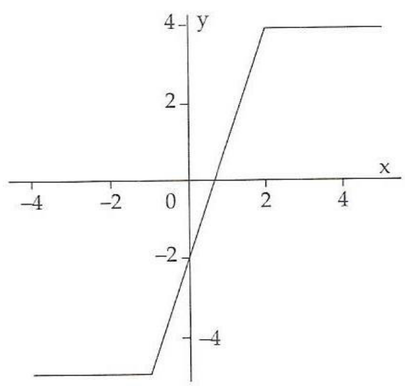
4.7.1 Função definida por várias sentenças

Uma função pode ser dividida em várias sentenças, onde o domínio dela é a união dos domínios das sentenças.

Exemplos:

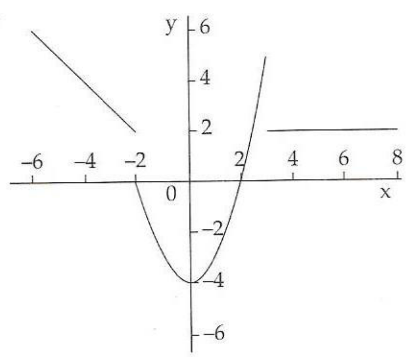
$$f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f(x)=y}{B \subset \mathbb{R}}$$

1) $$f(x) = \begin{cases} -5 & \text{se} \quad x < -1 \\ 3x - 2 & \text{se} \quad -1 \le x < 2 \\ 4 & \text{se} \quad x \ge 2 \end{cases}$$



Observando o gráfico, temos: $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-5; 4]$.

2) $$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x \le -2 \\ x^2 - 4 & \text{se} \quad -2 < x < 3 \\ 2 & \text{se} \quad x \ge 3 \end{cases}$$



Observando o gráfico, temos: $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-4; +\infty)$.

Valor absoluto ou módulo

O valor absoluto ou módulo, denotado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ é sempre nulo ou positivo.

Exemplos: $|5|=5$; $|-5|=5$; $|0|=0$

<u>Teoremas sobre módulo</u>:

1) $|a.b|=|a|.|b|$
   Exemplo: $|4.(-2)|=|4|.|-2|=4.2=8$

2) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}; \qquad b \neq 0$

4.7.2 Função modular

Uma função f recebe o nome de função modular ou função módulo se:

f: IR $\rightarrow$ IR
x f(x)=|x|

Como definido anteriormente, $f(x)=|x|=\begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$

D(f)=IR
Im(f)=IR $_+$

Exemplos:

Dadas as funções $f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \; \underset{\mapsto}{\rightarrow} \; \underset{f(x)=y}{B \subset \mathbb{R}}$ definidas a seguir, construir seus gráficos, determinar seus domínios e imagens:

1) $f(x) = y = |3x+4|$

Solução:

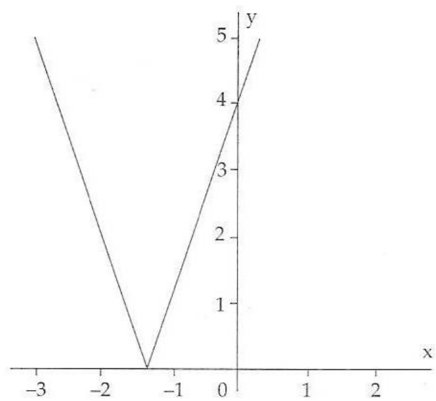
Utilizando a definição de função modular, temos:

$$f(x) = |3x+4| = \begin{cases} 3x+4 & se \quad 3x+4 \geq 0 \\ -(3x+4) & se \quad 3x+4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+4 & se \quad x \geq -\dfrac{4}{3} \\ -3x-4 & se \quad x < -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

Para $x < -\frac{4}{3}$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -3x - 4$ e para $x \geq -\frac{4}{3}$, traça-se o gráfico da função $f(x) = 3x + 4$.

O gráfico é apresentado a seguir:



2) $f(x) = y = |-x + 7|$

Solução:

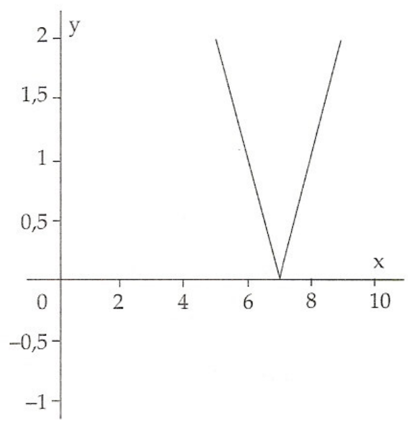
Utilizando a definição de função modular, temos:

$$f(x) = |-x+7| = \begin{cases} -x+7 & \text{se } -x+7 \geq 0 \\ -(-x+7) & \text{se } -x+7 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+7 & \text{se } x \leq 7 \\ x-7 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

Para $x \leq 7$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -x + 7$ e para $x > 7$, traça-se o gráfico da função $f(x) = x - 7$.

Gráfico:



3) $f(x) = y = | x^2 + 3x - 10 |$

Solução:

Utilizando a definição de função modular, temos:

$$f(x) = |x^2 + 3x - 10| = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{se} \quad x^2 + 3x - 10 \geq 0 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{se} \quad x^2 + 3x - 10 < 0 \end{cases}$$

Precisamos estudar o sinal de $g(x) = x^2 + 3x - 10$.

As raízes de g(x) são:

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0$, ou seja, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 7}{2}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ e } x_2 = \frac{-3-7}{2} = -\frac{10}{2} = -5.$$

Como $a > 0$, g é positiva em $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$, negativa em $(-5; 2)$ e nula em $\{-5; 2\}$.

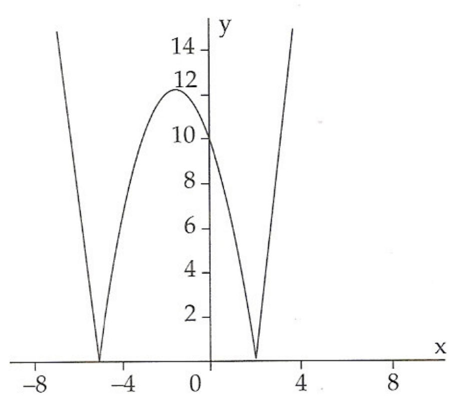
Assim, a função se torna:

$$f(x) = |x^2 + 3x - 10| = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{se} \quad x \leq -5 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 - 3x + 10 & \text{se} \quad -5 < x < 2 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Para $x \leq -5$ ou $x \geq 2$, traça-se o gráfico da função $f(x) = x^2 + 3x - 10$ e, para $-5 < x < 2$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -x^2 - 3x + 10$.

Gráfico:



4) $f(x) = y = |x-3| + 2$

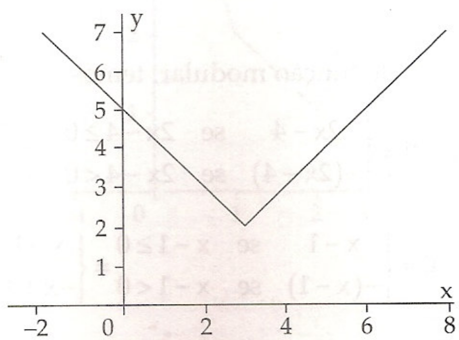
Solução:

Utilizando a definição de função modular, temos:

$$f(x) = |x-3| + 2 = \begin{cases} (x-3)+2 & \text{se} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3)+2 & \text{se} \quad x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x \geq 3 \\ -x+5 & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [2; +\infty)$

Para $x < 3$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -x+5$ e, para $x \geq 3$, traça-se o gráfico da função $f(x) = x-1$.



5) $f(x) = y = |2x-4| + |x-1|$

Solução:

Utilizando a definição de função modular, temos:

1ª parte: $f_1(x) = |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{se} \quad 2x-4 \geq 0 \\ -(2x-4) & \text{se} \quad 2x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & \text{se} \quad x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$

2ª parte: $f_2(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se} \quad x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$

Somando $f_1(x)$ com $f_2(x)$, na tabela a seguir, temos:

		1	2
$\|2x-4\|$	$-2x+4$	$-2x+4$	$2x-4$
$\|x-1\|$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$\|2x-4\| + \|x-1\|$	$-3x-5$	$-x+3$	$3x+5$

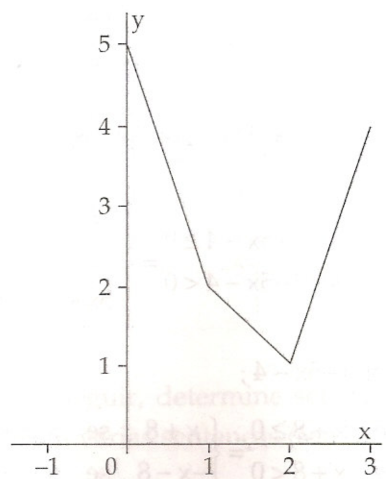
Assim, a função se torna:

$$f(x)=|2x-4|+|x-1|=\begin{cases}-3x+5 & \text{se} \quad x<1\\ -x+3 & \text{se} \quad 1\le x<2\\ 3x-5 & \text{se} \quad x\ge 2\end{cases}$$

$D(f)=\mathbb{R}$ e $\text{Im}(f)=[1;+\infty)$.

Para $x<1$, traça-se o gráfico da função $f(x)=-3x+5$; para $1\le x<2$, traça-se o gráfico da função $f(x)=-x+3$ e para $x\ge 2$, traça-se o gráfico da função $f(x)=3x-5$.

Gráfico:



6) Dada a função a seguir, determine seu domínio e reescreva como uma função em várias sentenças (sem o módulo).

$$f(x)=y=\left|\frac{x+2}{x+6}\right|$$

Solução:

a) Primeiramente, vemos que $D(f)=\mathbb{R}-\{-6\}$, pois o denominador não pode ser nulo.

$$f(x)=\left|\frac{x+2}{x+6}\right|=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+6} & \text{se} \quad \dfrac{x+2}{x+6}\ge 0\\ -\dfrac{x+2}{x+6} & \text{se} \quad \dfrac{x+2}{x+6}<0\end{cases}$$

Precisamos estudar o sinal de $\frac{x+2}{x+6}$. Para isso, faremos a tabela de sinais, indicada a seguir:

	-6	-2	
$x+2$	$-$	$-$	$+$
$x+6$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+2}{x+6}$	$+$	$-$	$+$

1º caso: $\frac{x+2}{x+6} \geq 0$

Como vemos na tabela, $x \in (-\infty; -6) \cup [-2; +\infty)$.

2º caso: $\frac{x+2}{x+6} < 0$

Como vemos na tabela, $x \in (-6; -2)$.

Assim, a função se torna:

$$f(x) = \left|\frac{x+2}{x+6}\right| = \begin{cases} \frac{x+2}{x+6} & \text{se} \quad x < -6 \text{ ou } x \geq -2 \\ -\frac{x+2}{x+6} & \text{se} \quad -6 < x < -2 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-6\}$ *e* $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Exercícios propostos

1) Dadas as funções $f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f(x)=y}{B \subset \mathbb{R}}$ definidas a seguir, construir seus gráficos, determinar seus domínios e imagens:

a) $f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se} \quad x \leq -2 \\ 1 & \text{se} \quad -2 < x \leq 0 \\ x+1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se} \quad x < -2 \\ -x-2 & \text{se} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se} \quad x \leq -3 \\ -2 & \text{se} \quad -3 < x < 2 \\ x-2 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se} \quad x < -1 \\ 2 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-8 & \text{se} \quad x \le -2 \text{ ou } x \ge 4 \\ -x^2+2x+8 & \text{se} \quad -2 < x < 4 \end{cases}$

2) Dadas as funções $f \;:\; \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \;\underset{\mapsto}{\to}\; \underset{f(x)=y}{B \subset \mathbb{R}}$ definidas a seguir, construir seus gráficos, determinar seus domínios e imagens:

a) $f(x)=|2x+5|$

b) $f(x)=\left|-3x+\dfrac{5}{2}\right|$

c) $f(x)=|-x^2-x+6|$

d) $f(x)=|2x+6|-4$

e) $f(x)=|x^2-2x-3|+5$

f) $f(x)=|3x-6|+x-1$

g) $f(x)=|2x^2+3x-2|+3x+2$

h) $f(x)=|4x+4|-|3x-4|$

i) $f(x)=|x^2-9|-|x-3|$

j) $f(x)=|x^2-2x|-|x^2-4|$

k) $f(x)=\big|\,|3x+2|-3\,\big|$

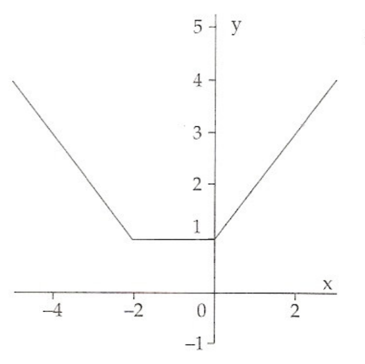
l) $f(x)=\big|\,|x^2-4|-6\,\big|$

3) Dada a função a seguir, determine seu domínio e reescreva como uma função em várias sentenças (sem o módulo).

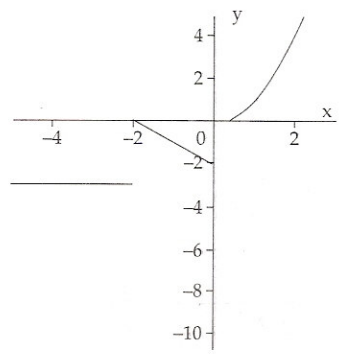
$$f(x)=y=\left|\frac{2x-2}{x-3}\right|$$

Respostas dos exercícios propostos

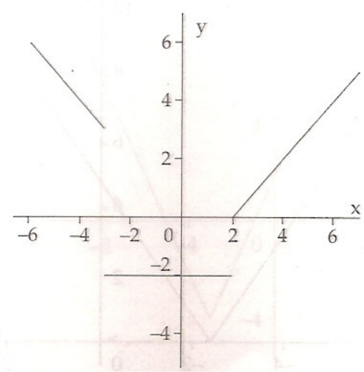
1) a) $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=[1;+\infty)$.



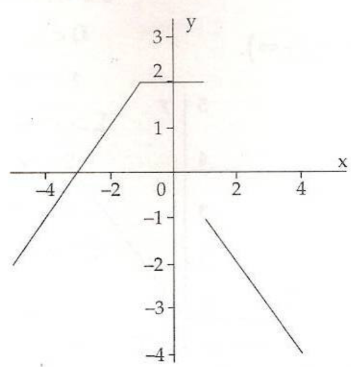
b) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{-3\} \cup [-2; +\infty)$.



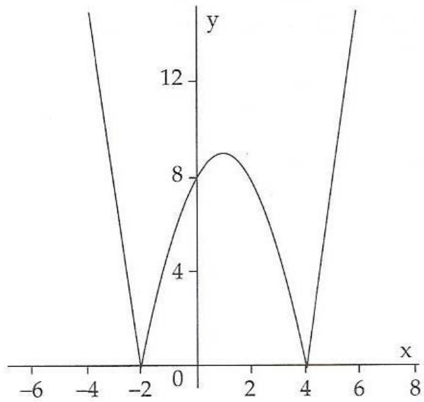
c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{-2\}$.



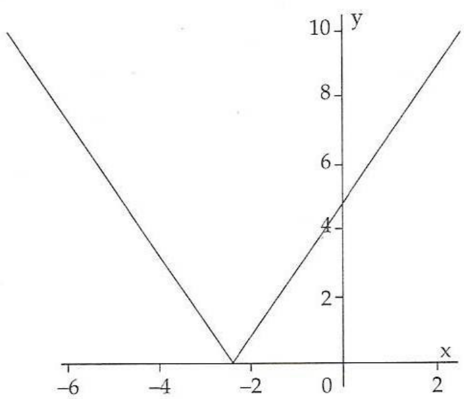
d) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty; 2]$.



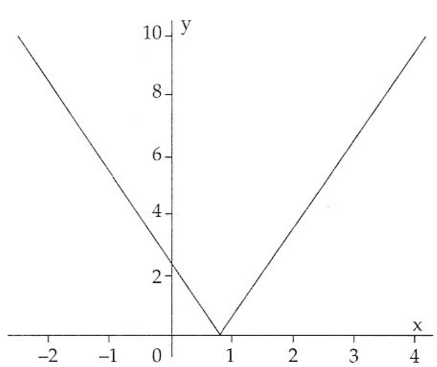
e) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.



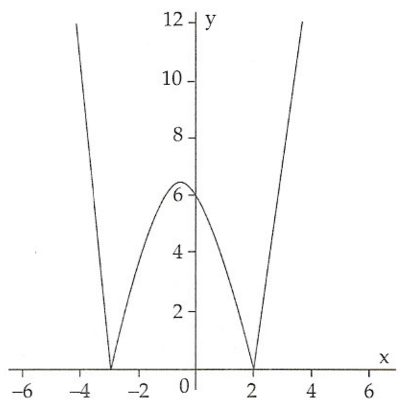
2) a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.



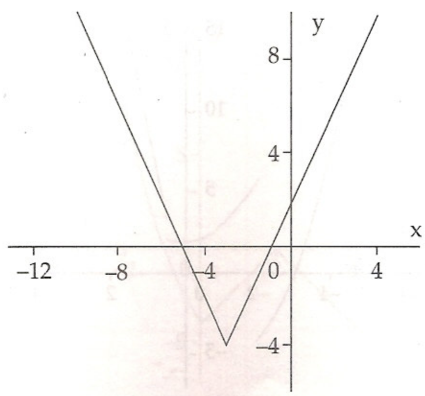
b) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.



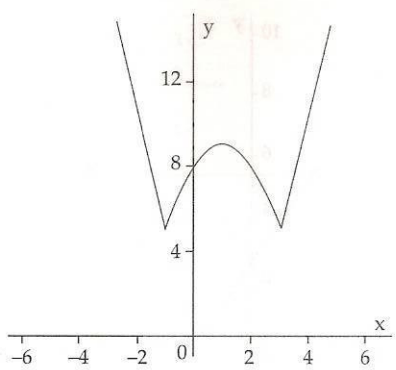
c) $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=\mathbb{R}_+$.



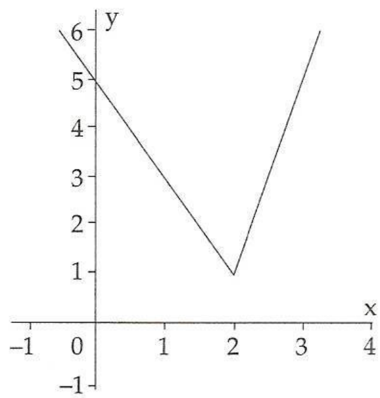
d) $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=[-4;+\infty)$.



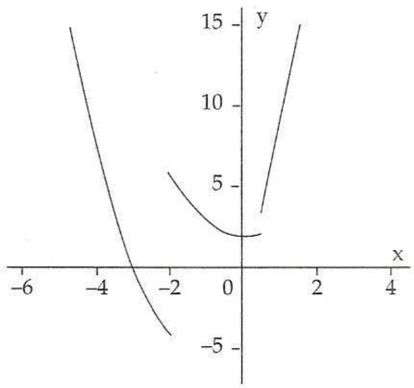
e) $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=[5;\ +\infty)$.



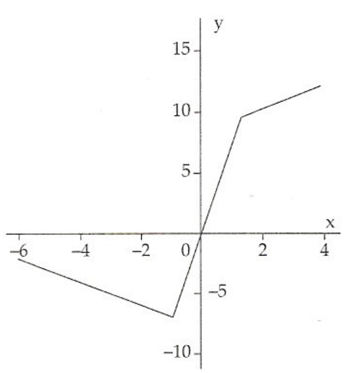
f) $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=[1;+\infty)$.



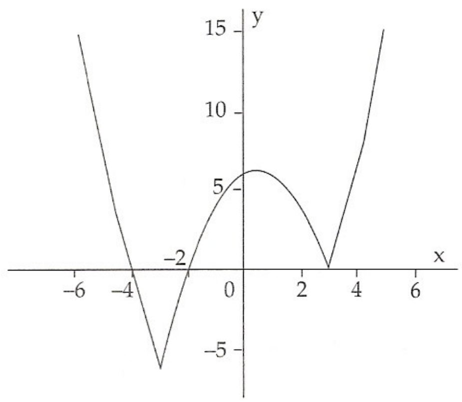
g) $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=[-4;+\infty)$.



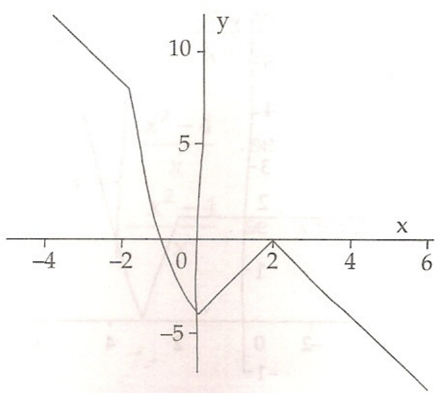
h) $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=[-7;+\infty)$.



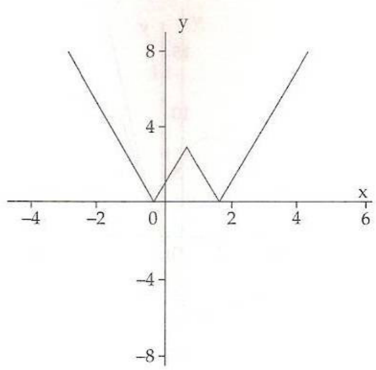
i) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-6; +\infty)$.



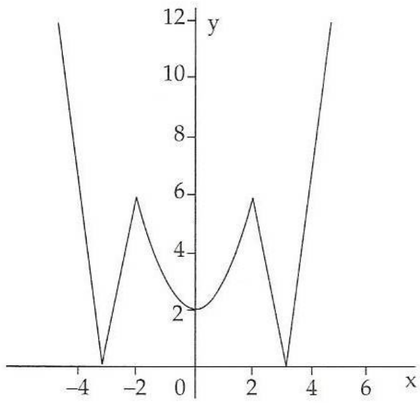
j) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-\infty; +\infty)$.



k) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.



l) $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=\mathbb{R}_+$.



3)

$$D(f)=\mathbb{R}-\{3\}\ e\ f(x)=y=\begin{cases}\dfrac{2x-2}{x-3} & \text{se} \quad x\le 1 \ \text{ ou } \ x>3\\ -\dfrac{2x-2}{x-3} & \text{se} \quad 1<x<3\end{cases}$$