Na tabela a seguir, temos alguns valores trigonométricos para ângulos específicos:

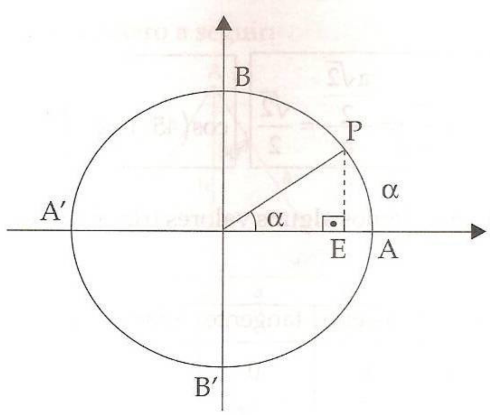
grau	radiano	seno	cosseno	tangente	cotangente	secante	cossecante
0	0	0	1	0	∄	1	∄
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∄	0	∄	1
180	π	0	–1	0	∄	–1	∄
270	$\frac{3\pi}{2}$	–1	0	∄	0	∄	–1
360	2π	0	1	0	∄	1	∄

Funções trigonométricas simétricas (funções arco)

Como as funções trigonométricas são periódicas, significa que não são bijetoras. Sendo assim, suas inversas são apenas relações e, consequentemente, suas simétricas também.

Como queremos determinar as funções simétricas (ou funções arco), teremos de restringir o domínio das funções trigonométricas para que tenhamos funções bijetoras e, daí, funções simétricas.

Seja o ciclo trigonométrico a seguir:



Observemos que sen(α)= $\overline{EP} = y$.

Podemos dizer que α é um arco (ou um ângulo) cujo seno dele (de α) mede y.

Transcrevendo sen(α) ↔ α=arcsen(y).

Podemos fazer essa mesma transcrição para todas as outras funções trigonométricas.

Exemplos:

1) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \text{arcsen}(1)=\frac{\pi}{2}$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

3) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \text{arctg}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$

4) $\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \text{arccotg}(0)=\frac{3\pi}{2}$

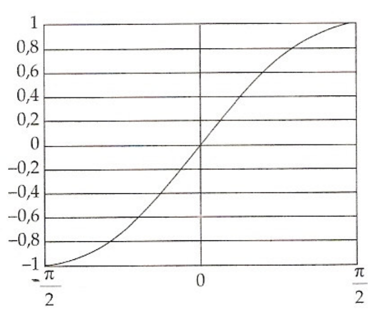
5) $\sec(\pi)=-1 \Leftrightarrow \text{arcsec}(-1)=\pi$

6) $\text{cossec}(0)=1 \Leftrightarrow \text{arccossec}(1)=0$

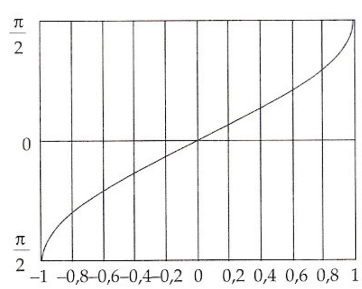
Analisando os gráficos das funções trigonométricas, podemos, restringindo seus domínios, determinar as seguintes funções arco:

1) Seja $f : \left[-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1 \,;\, 1]$.
$x \mapsto f(x)=\text{sen}(x)$

A função arco será definida por $g : [-1 \,;\, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right]$.
$x \mapsto g(x)=\text{arcsen}(x)$



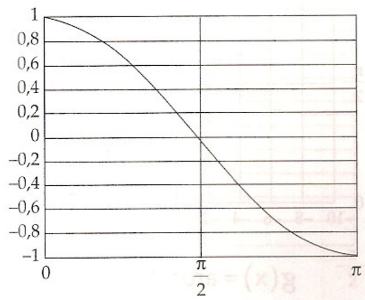
$f(x)=\text{sen}(x)$



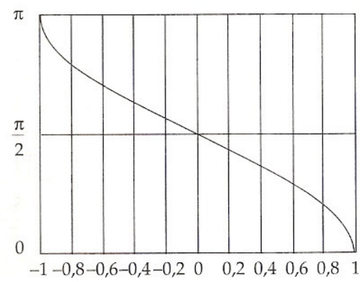
$g(x)=\text{arcsen}(x)$

2) Seja $f : [0\ ;\ \pi] \to [-1\ ;\ 1]$.
$\qquad x \mapsto f(x) = \cos(x)$

$g : [-1\ ;\ 1] \to [0\ ;\ \pi]$.
$\qquad x \mapsto g(x) = \arccos(x)$



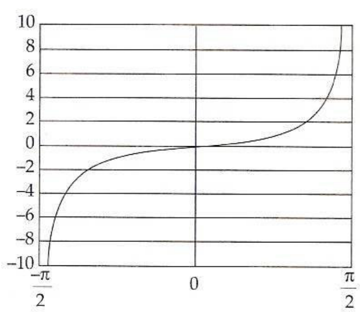
$f(x) = \cos(x)$



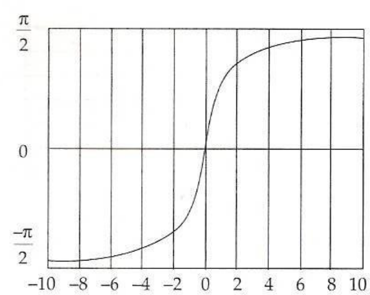
$g(x) = \arccos(x)$

3) Seja $f : \left(-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.
$\qquad x \mapsto f(x) = \operatorname{tg}(x)$

$g : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$
$\qquad x \mapsto g(x) = \operatorname{arctg}(x)$



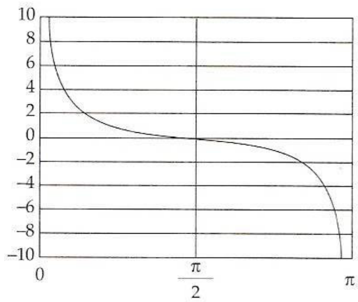
$f(x) = \operatorname{tg}(x)$



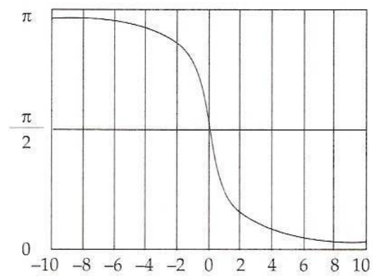
$g(x) = \operatorname{arctg}(x)$

4) Seja $f : (0\ ;\ \pi) \to \mathbb{R}$.
$x \mapsto f(x) = \text{cotg}(x)$

$g : \mathbb{R} \to (0\ ;\ \pi)$.
$x \mapsto g(x) = \text{arccotg}(x)$



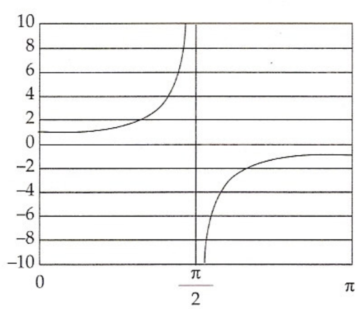
$f(x) = \text{cotg}(x)$



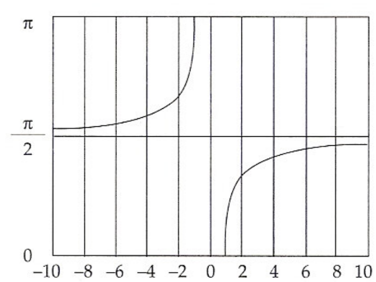
$g(x) = \text{arccotg}(x)$

5) Seja $f : \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right] \to \mathbb{R} - (-1\ ;\ 1)$.
$x \mapsto f(x) = \sec(x)$

$g : \mathbb{R} - (-1\ ;\ 1) \to \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.
$x \mapsto g(x) = \text{arcsec}(x)$



$f(x) = \sec(x)$



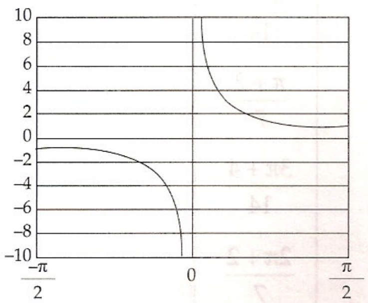
$g(x) = \text{arcsec}(x)$

6) Seja $f : \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right) \cup \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} - (-1 ; 1)$.

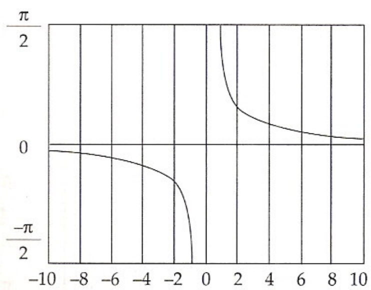
$x \mapsto f(x) = \text{cossec}(x)$

$g : \mathbb{R} - (-1 ; 1) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right) \cup \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

$x \mapsto g(x) = \text{arccossec}(x)$



$f(x) = \text{cossec}(x)$



$g(x) = \text{arccossec}(x)$

Exercícios

1) Calcule:

a) o valor mínimo da função y = 2 + 9sen4x.
b) o valor máximo da função y = 10 - cosx .
c) o valor de y = sen 180º - cos270º
d) o valor de y = cos 180º - sen 270º
e) o valor de y = cos(360.k) + sen(360.k), para k inteiro.

Respostas: a) - 7 b) 11 c) 0 d) 0 e) 1

2) Se cos(a)=3/5 e sen(b)=1/3, com a pertencente ao 3o. quadrante e b pertencente ao 2o. quadrante, calcule csc(a-b) (csc significa cossecante)

3) Dado o ângulo de medida a=15 graus, determinar: (a) sen(a) (b) cos(a) (c) tan(a)

4) Verifique a igualdade:

$$\frac{1}{1+\text{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x} + \frac{1}{\csc^2 x} = 2$$

5) Qual o domínio e o conjunto imagem da função y = arcsen 4x?

6) Calcule y = tg(arcsen 2/3)

7) Calcular o valor de y = sen(arc tg 3/4).