Universidade Federal Fluminense
ICEx – Volta Redonda
Introdução a Matemática Superior
Professora: Marina Sequeiros

2. Conjuntos numéricos

Objetivo: aprender sobre conjuntos numéricos, suas operações e propriedades.

2.1 Conjunto dos números naturais (IN)

O conjunto dos números naturais é representado por IN e IN={0;1;2;3;...}.
Neste conjunto são definidas duas operações fundamentais: a adição e a multiplicação. Observamos que dado um número natural a≠0, o simétrico de a, isto é, -a não existe em IN. Assim, em IN a subtração não é uma operação. Logo, houve a necessidade da ampliação dos números naturais e introdução de números negativos.

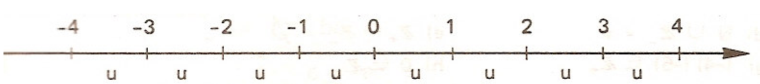
2.2 Conjunto dos números inteiros (Z)

O conjunto dos números inteiros é representado por Z e Z={...,-3;-2;-1;0;1;2;3;...}.
Além de IN, destacamos os seguintes subconjuntos de Z:

$$\text{Conjunto dos números inteiros}\begin{cases}\text{Não negativos: } Z_{+}=\{0;1;2;3;4;5;...\}\\ \text{Positivos: } Z_{+}^{*}=\{1;2;3;4;5;...\}\\ \text{Não positivos: } Z_{-}=\{0;-1;-2;-3;-4;-5;...\}\\ \text{Negativos: } Z_{-}^{*}=\{-1;-2;-3;-4;-5;...\}\end{cases}$$

Representação:

Após ser estabelecido um sentido e um ponto 0 (origem) que representa o inteiro zero, marcamos um segmento unitário u≠0 e para cada inteiro n, marcamos um segmento de medida nu cuja extremidade representará n no sentido positivo e –n no sentindo negativo.



No conjunto Z são definidas as operações: adição, multiplicação e subtração. Dados dois valores $a \in Z$ e $b \in Z$, b≠0, pode ocorrer que a/b não pertença a Z. Assim, há a necessidade de ampliar este conjunto para incluir tais casos.

2.3 Conjunto dos números Racionais (Q)

O conjunto dos números racionais é representado por Q e é formado acrescentando-se ao conjunto Z, as frações não aparentes, isto é, não inteiras. Assim, os números racionais são aqueles que podem ser escritos como quociente de dois inteiros. Portanto,

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\middle| p \in Z \quad \Lambda \quad q \in Z^{*}\right\}$$

Dividindo-se dois inteiros p e q pode-se obter um número decimal finito ou um infinito periódico:

- Decimal finito

Exemplos:

$$\frac{3}{25}=\frac{3}{5^2}=\frac{3.2^2}{5^2.2^2}=\frac{12}{10^2}=0{,}12$$

$$\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}=\frac{5.5^3}{2^3.5^3}=\frac{625}{10^3}=0{,}625$$

$$\frac{99}{50}=\frac{99}{5.10}=\frac{99}{2.5.5}=\frac{99.2}{2.5.5.2}=\frac{198}{10^2}=1{,}98$$

Nota: Se os denominadores são do tipo $2^a.5^b$ com a e b naturais, então temos um decimal finito. Se no denominador da fração irredutível há um fator diferente de 2 ou 5, temos uma dízima periódica.

- Dízimas periódicas

Exemplo:

$$\frac{7}{3}=2{,}333...;\frac{5}{6}=0{,}8333...$$

<u>Método prático para determinação da fração geratriz de alguns decimais:</u>

1º) finito: 0,33

$0{,}55=\frac{55}{100}=\frac{11}{20}$ que é a fração geratriz

2º) Dízima periódica simples: 0,212121...

Tomamos x=0,212121... e multiplicando-se por 100, temos: 100x=21,2121...
Subtraindo, obtemos:

$$\begin{array}{r} 100x=21{,}21212121... \\ x=0{,}212121... \\ \hline 99x=21 \end{array}$$

Logo, $x=\frac{21}{99}=\frac{7}{33}$ que é a geratriz do número dado.

3º) Dízima composta (com algarismos não periódicos):1,26666...

Fazendo x=1,2666... e multiplicando-se por 10 obtemos: 10x=12,666...
10x=12,666...
10x=12+0,666...
10x=12+ $\frac{6}{9} \therefore 10x = \frac{114}{9}$ $\quad 10x = \frac{38}{3} \therefore x = \frac{38}{30} \therefore x = \frac{19}{15}$

Nesse conjunto, definimos as seguintes operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. No entanto, nem sempre a radiciação tem solução nesse conjunto.

Exemplo: $\sqrt{2}$ não é racional.

Demonstração:

Suponha que $\sqrt{2}$ é racional, isto é, igual a uma fração irredutível $\frac{p}{q}$.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \to 2 = \frac{p^2}{q^2} \to p^2 = 2q^2 \to p^2 \quad é \quad par \to p \quad é \quad par \to p = 2k, k \in IN \to 4k^2 = 2q^2 \to q^2 = 2k^2$$

$\to$ q é par.

Logo, se p e q são pares, isso contraria a hipótese $\frac{p}{q}$ é irredutível.

Concluímos que $\frac{p}{q}$ não é racional.

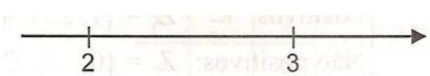
Representação:

Para representar o número racional 18/7 na reta numérica usando regra e compasso, procede-se do seguinte modo:

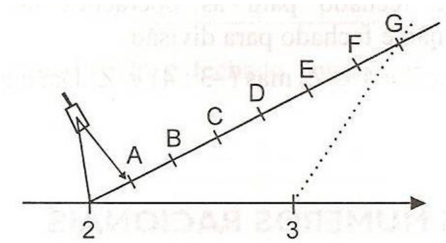
1º) escrevemos 18/7 na forma mista:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \hline \underline{4} & 2 \end{array} \Rightarrow \frac{18}{7} = 2 + \frac{4}{7} \text{ ou } 2\frac{4}{7}$$

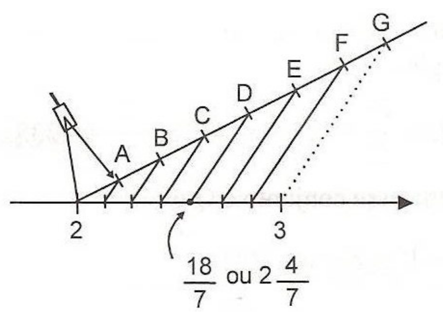
2º) desenhamos uma reta assinalando os pontos de abscissas 2 e 3.



3º) Traçamos uma reta auxiliar e com o compasso formamos 7 segmentos iguais.



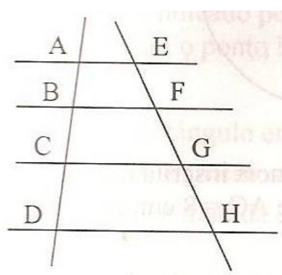
4º) por fim traçamos paralela ao segmento $\overline{3G}$ pelos pontos A,B, C, D, E e F.



Essa construção se justifica pelo Teorema de Tales.

Relembrando o Teorema de Tales:

Quando duas transversais interceptam um feixe de paralelas, os segmentos determinados nas transversais são respectivamente proporcionais.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EH}}$$

2.4 Conjunto dos números Irracionais

São os números cuja representação decimal não é exata nem periódica, consequentemente não podendo ser escritos sob a forma de fração. São os números que podem ser representados por decimais não periódicos infinitos. Esse conjunto é representado por I.

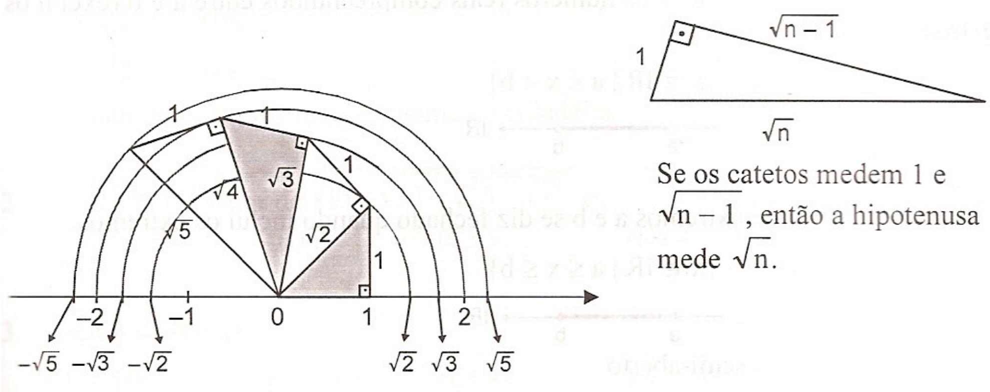
Exemplos:

$\sqrt{2};\sqrt[3]{23};-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}+1;\quad 0{,}1010010001...$

Um importante exemplo de número irracional, que surge na geometria, é o resultado da divisão do comprimento da circunferência C pelo seu diâmetro 2r (r é o raio da circunferência), $\dfrac{C}{2r}=\pi$, cujo valor aproximado é 3,14. Pode-se provar que π é um decimal não periódico infinito: π=3,1415926535...
Importa aqui ressaltar outras aproximações de π, para simplificar problemas, como 22/7 e também $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ que podem ser empregadas na retificação da circunferência.

Representação de $\sqrt{n}, n \in IN$.

Com o auxílio de triângulos retângulos podemos determinar os pontos da reta numérica que têm abscissas $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},...$ Observe a figure abaixo e verifique.



2.5 Conjunto dos números reais

o conjunto dos números reais é a reunião do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Representação: IR.
IR=Q∪I, onde Q∩I=∅
Subconjuntos de IR:

Conjunto dos números reais
- Não nulos: $IR^{*}=\{x \in IR/\ x\neq 0\}$
- Não negativos: $IR_{+}=\{x \in IR/\ x\geq 0\}$
- Positivos: $IR_{+}^{*}=\{x \in IR/\ x>0\}$
- Não positivos: $IR_{-}=\{x \in IR/\ x\leq 0\}$
- Negativos: $IR_{-}^{*}=\{x \in IR/\ x<0\}$

Este conjunto completa a reta numérica.

2.6 Conjunto dos números complexos (**C**)

Algumas observações importantes:

1. Se a $\in$ IR_+ então $\sqrt[n]{a} \in IR_+$.
   Exemplo: $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[6]{\pi}, \sqrt{\frac{17}{2}}$ são números reais.
2. Se o índice da raiz for ímpar, os radicais da forma $\sqrt[n]{-a}, onde \quad a \in IR_+$, também representam números reais. Exemplo: $\sqrt[3]{-1}, \sqrt[5]{-32} \quad e \quad \sqrt[7]{-3}$.
3. Se o radicando é negativo e o índice da raiz é par, entretanto, o radical $\sqrt[n]{-a}$ não representa elemento de IR. Por exemplo, $\sqrt{-1}$ não é real, pois:

$\sqrt{-1} = x \rightarrow -1 = x^2$ e isto é impossível pois se x $\in$ IR, então $x^2 \geq 0$.

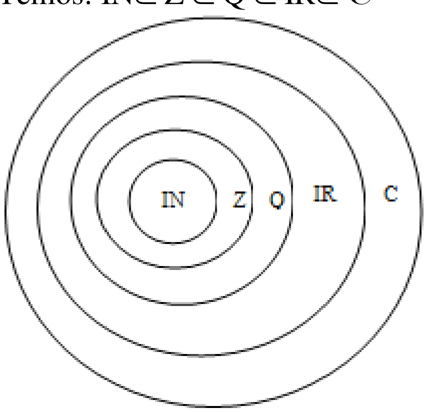
Assim, para que $\sqrt[n]{a}$ exista para todo número a, introduz-se o conjunto dos números complexos do qual IR é subconjunto.

O conjunto dos números complexos representados por C pode ser definido por:
C={z=a+bi/ a,b $\in$ IR e i² = -1}

onde: a é a parte real de Z
b é a parte imaginária de Z

Número real: todo complexo z tal que b=0
Número imaginário: todo complexo z tal que b≠0
Número imaginário puro: todo complexo z tal que a=0 e b≠0

Temos: IN$\subset$ Z $\subset$ Q $\subset$ IR$\subset$ **C**



OBS: Z-IN = conjunto dos números inteiros negativos
Q-Z = conjunto dos números racionais não inteiros
IR-Q = conjunto dos números reais irracionais

2.7 Intervalos numéricos

Dados dois números a e b, com $a<b$ define-se alguns subconjuntos de IR como intervalos de extremos a e b:

1º) Aberto: conjunto de todos os números reais compreendidos entre a e b (exclui os extremos).

Notação: $]a,b[=(a,b)=\{x\in IR\ /a<x<b\}$

Representação: 

2º) Fechado: o intervalo de extremos a e b se diz fechado quando inclui os extremos.

Notação: $[a,b]=\{x\in IR\ /a\le x\le b\}$

Representação: 

3º) Semi-fechado ou semi-aberto

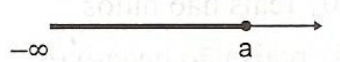
$[a,b[=[a,b)=\{x\in IR\ /a\le x<b$ 

$]a,b]=(a,b]=\{\ x\in IR\ /a<x\le b$ 

Intervalos Infinitos

$[a,\infty[=[a,\ \infty)=\{\ x\in IR\ /x\ge a\}$ 

$]a,\infty[=(a,\ \infty)=\{\ x\in IR\ /x>a\}$ 

$]-\infty,a]=(-\ \infty,a]=\{\ x\in IR\ /x\le a\}$ 

$]-\infty,a[=(-\ \infty,a)=\{\ x\in IR\ /x<a\}$ 

Note que:

$IR_+=[0,+\ \infty)$

$IR_+^*=(0,+\ \infty)$

$IR_-=(-\infty,0]$

$IR_-^*=(-\infty,0)$

$IR=(-\infty,+\infty)$