Equações modulares

Lembremos das propriedades do módulo dos números reais:

- Para $k>0$, $|x|=k \leftrightarrow x=k$ ou $x=-k$
- $|a| = |b| \leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$

e, utilizando essas propriedades, vamos resolver algumas equações modulares.

Exemplo1: Resolva $|2x-1|=3$

$$|2x-1|=3 \rightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \rightarrow x=2 \quad ou \\ 2x-1=-3 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

S={-1,2}

Exemplo 2: Resolva $|3x-1|=|2x+3|$

Lembrando da propriedade: $|a|=|b| \leftrightarrow a=b$ ou $a=-b$

$$\text{Temos: } |3x-1|=|2x+3| \leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=2x+3 \rightarrow x=4 \\ ou \\ 3x-1=-2x-3 \rightarrow x=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

S={-2/5 , 4 }

Exemplo 3: Resolva $|x+1|=3x+2$

Devemos ter inicialmente $3x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2/3$ para que a igualdade seja possível

Supondo $x \geq -2/3$ temos

$$|x+1|=3x+2 \rightarrow \begin{cases} x+1=3x+2 \rightarrow x=-1/2 \\ ou \\ x+1=-3x-2 \rightarrow x=-3/4 \quad (não \quad convém) \end{cases}$$

S = {-1/2}

Exercícios propostos

1) Simplifique a expressão $\frac{|x-1|}{x-1}$.

2) Simplifique as expressões:

a) $\frac{|x-3|}{x-3}$, sendo $x < 3$

b) $1+\frac{|x-2|}{x-2}$, sendo $x > 2$

c) $\frac{|x|}{x}+\frac{|x-4|}{x-4}$, sendo $0 < x < 4$

3) Resolver as seguintes equações em IR:

a) $|x + 2| = 3$
b) $|3x - 1| = 2$
c) $|4x - 5| = 0$
d) $|2x - 3| = -1$
e) $|x^2 - 3x - 1| = 3$

4) Resolver em IR as seguintes equações:

a) $|3x + 2| = |x - 1|$
b) $|4x - 1| - |2x + 3| = 0$
c) $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$

5) Resolver as seguintes equações em IR:

a) $|x - 2| = 2x + 1$
b) $|3x + 2| = 2x - 3$
c) $|2x - 5| = x - 1$
d) $|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3$

Respostas:

2) a)-1 b) 2 c)0

3) a) $S = \{1, -5\}$
b) $S = \{1, -\frac{1}{3}\}$
c) $S = \{\frac{5}{4}\}$
d) $S = \varnothing$
e) $S = \{-1, 1, 2, 4\}$

4) a) $S = \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\}$
b) $S = \{2, -\frac{1}{3}\}$
c) $S = \{-6, -1, 1, 4\}$

5) a) $S = \{\frac{1}{3}\}$
b) $S = \varnothing$
c) $S = \{4, 2\}$
d) $S = \{-13, -6\}$

Inequações modulares

Lembrando das propriedades de módulo dos números reais, para k>0:

$|x| < k \leftrightarrow -k < x < k$
$|x| > k \leftrightarrow x<-k$ ou $x>k$

e, utilizando essas propriedades, podemos resolver algumas inequações modulares.

Exemplo1: Resolva $|2x+1|<3$

$-3 < 2x+1 < 3 \rightarrow -4 < 2x < 2 \rightarrow -2 < x < 1$

Exemplo 2: Resolva $|4x-3| > 5$

$4x-3 > 5 \rightarrow x<-1/2$ ou $4x-3<-5 \rightarrow x > 2$

$S=\{x \in IR/\ x<-1/2 \text{ ou } x>2\}$

Exercícios propostos

1) Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações abaixo:

a) $|3x - 2| < 4$
b) $|2x - 3| \leqslant 1$
c) $|4 - 3x| \leqslant 5$
d) $|3x + 4| \leqslant 0$
e) $|2x + 4| < -3$
f) $|2x - 1| > 3$
g) $|5x + 4| \geqslant 4$
h) $|2 - 3x| \geqslant 1$

2) Resolver as inequações seguintes em $\mathbb{R}$:

a) $|x^2 - 5x + 5| < 1$
b) $|x^2 - x - 4| > 2$
c) $|x^2 - 5x| \geqslant 6$
d) $|x^2 - 3x - 4| \leqslant 6$
e) $\left|\dfrac{2x - 3}{3x - 1}\right| > 2$
f) $\left|\dfrac{x + 1}{2x - 1}\right| \leqslant 2$

Respostas

1)
a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3\}$
d) $S = \{-\frac{4}{3}\}$
e) $S = \varnothing$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{8}{5} \text{ ou } x \geqslant 0\}$
h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant 1\}$

2)
a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ ou } x \geqslant 6\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 5\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \text{ e } x \neq \frac{1}{3}\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{5} \text{ ou } x \geqslant 1\}$