Limites

Noção intuitiva

Consideremos a função f(x)=2x+1 e vamos analisar o seu comportamento quando a variável x se aproxima cada vez mais de 1.

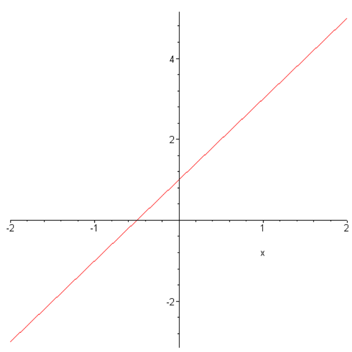
1º) x tende a 1, assumindo valores inferiores a 1.

x	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999	0,9999	…
f(x)	2,2	2,4	2,6	2,8	2,9	2,98	2,998	2,9998	…

2) x tende a 1, assumindo valores superiores a 1.

x	1,4	1,3	1,2	1,1	1,05	1,01	1,001	1,0001	…
f(x)	3,8	3,6	3,4	3,2	3,1	3,02	3,002	3,0002	…

Gráfico:

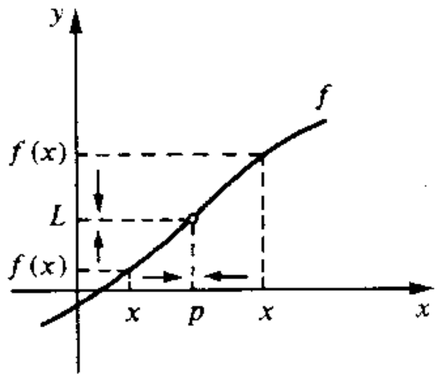


$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

Verificamos que quando x está próximo de 1, os valores correspondentes de f(x) estão próximos da constante 3. Temos ainda que f(x) pode assumir valores cuja diferença para a constante 3 é arbitrariamente pequena tomando-se, para isso, valores de x que estejam suficientemente próximos de 1, mas não iguais a 1. Então dizemos que f(x) tende ao limite 3 quando x tende a 1.

Definição: se a função f(x) tende a uma constante L quando x tende a p, qualquer que seja a maneira pela qual ela se aproxime sem, todavia, assumir o valor p, diz-se que L é o limite de f(x) quando x tende a p. Isto é indicado pela notação:

$\lim_{x\to p} f(x) = L$ ou $f(x) \to L$ quando $x \to p$



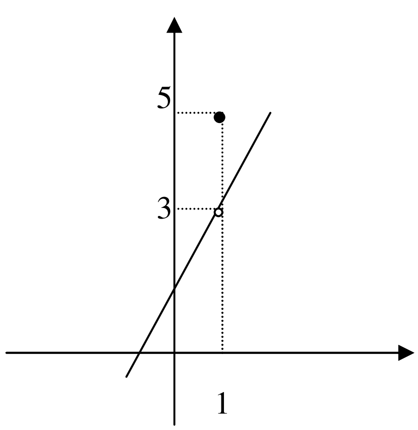
Quando x tende a p, $f(x)$ tende a L: $\lim_{x \to p} f(x) = L$

O conceito de limite de funções tem grande utilidade na determinação do comportamento de funções nas vizinhanças de um ponto fora do domínio, no comportamento de funções quando x aumenta muito(tende para infinito) ou diminui muito (tende para menos infinito). Conceitos do tipo limite são utilizados frequentemente na conversação e no pensamento não-matemático. Por exemplo, a produtividade máxima teórica de uma máquina ou fábrica é um limite, o desempenho ideal (ou limitante) que nunca é atingido na prática, mas que pode ser aproximado arbitrariamente.)

Obs:

1ª.) O que interessa para o cálculo do limite não é o valor que a função tem no ponto, mas sim de onde ela se aproxima.

Ex: f(x)= $\begin{cases} 2x+1 & se \quad x \neq 1 \\ 5 & se \quad x = 1 \end{cases}$



f(1)=5

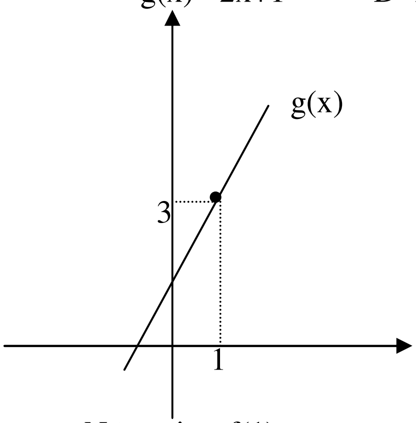
$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

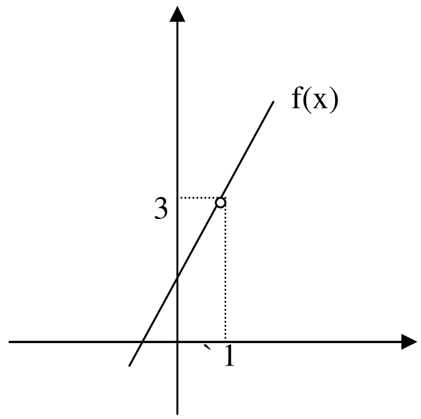
Vemos assim que o valor do limite é diferente do valor da função no ponto.

2ª.) Se duas funções f(x) e g(x) são sempre iguais, exceto para x=a, então elas tem o mesmo comportamento para o cálculo do limite no ponto a.

Ex1: f(x)= $\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}=2x+1$ D=R-{1}

g(x)= 2x+1 D=R





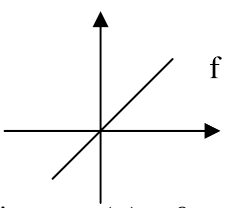
Não existe f(1).

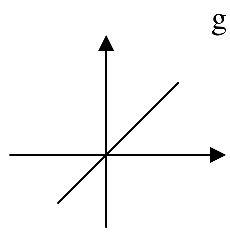
$\lim_{x\to 1} f(x)=3$

Vemos assim que, embora a função não exista no ponto 1, ela tem limite nesse ponto.

Ex2: f(x)= x D=R

g(x)= $\dfrac{x^2}{x}$ D=R-{0}

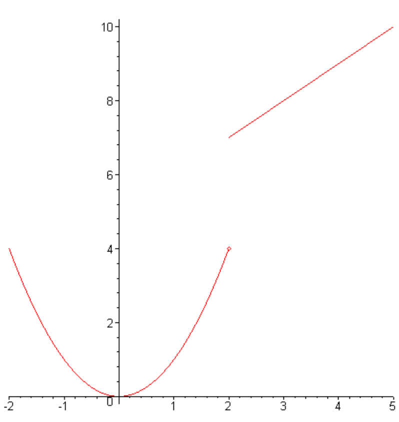




$\lim_{x\to 0} g(x)=0$

3ª.) Pode ocorrer que uma função exista no ponto, mas não tenha limite nesse ponto.

Ex.: f(x)= $\begin{cases} x^2 & se \quad x\le 2 \\ x+5 & se \quad x>2 \end{cases}$



f(2)=4

$\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$

Vemos assim que, embora a função exista no ponto 2, ela não tem limites nesse ponto.

Limites laterais

Consideremos a função f(x) do exemplo anterior.

$\lim_{x \to 2^-} f(x)$ Limite à esquerda ou limite da função f(x) quando x tende a 2 pela esquerda.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$ (limite à esquerda)

$\lim_{x \to 2^+} f(x)$ Limite à direita ou limite da função f(x) quando x tende a 2 pela direita

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 7$

Para que uma função tenha limite num ponto, os dois limites laterais devem existir e serem iguais.

Exercícios:

1) Para cada uma das funções abaixo, esboce seu gráfico e, utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule:

$\lim_{x \to a^-} f(x)$ $\qquad \lim_{x \to a^+} f(x)$ $\qquad \lim_{x \to a} f(x)$

a) $f(x)=x^3$, a=2

b) $f(x)=3x+1$, a=3

c) $f(x)= \begin{cases} 2x+1, & se \quad x \neq 3 \\ 8 & se \quad x = 3 \end{cases}$ a=3

d) $f(x)= \begin{cases} x^2, & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$ a=0

e) $f(x)= \begin{cases} 2x, & se \quad x \geq 2 \\ 7 & se \quad x < 2 \end{cases}$ a=2

2) Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule:

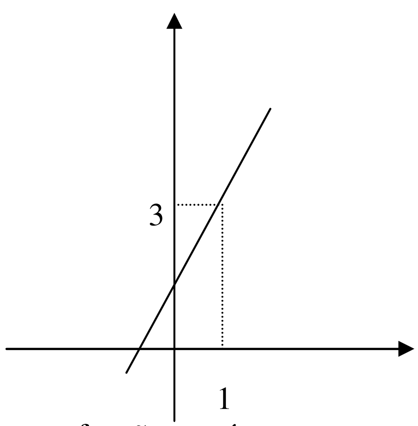
a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ $b)\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x}$ $c)\lim_{x\to 0} senx$

Limite e continuidade

Continuidade de uma função

Intuitivamente, a idéia de função contínua decorre da análise de seu gráfico. Quando o gráfico de uma função não apresenta interrupções (isto é, uma curva que pode ser traçada sem se tirar o lápis do papel), dizemos que ela é contínua. Se houver algum ponto em que ocorre a interrupção, dizemos que esse é um ponto de descontinuidade. A definição matemática de continuidade envolve propriedades de limites).
Pode ocorrer que uma função tenha limite num ponto, exista neste ponto e estes valores sejam iguais. Dizemos então que a função é contínua no ponto.

Ex: f(x)= 2x+1



função contínua

f(1)=3
$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ = f(1)

Logo, dizemos que uma função f(x) é contínua no ponto x=a se e somente se
$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Vemos assim que para uma função ser contínua no ponto devem ser satisfeitas 3 condiçoes:

1) A função deve existir no ponto, isto é, ∃ f(a);
2) A função deve ter limite no ponto, isto é, ∃ $\lim_{x\to a} f(x)$.
3) Estes valores devem ser iguais.
$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
Se alguma das 3 condições não se verificar, dizemos que a função é descontínua no ponto.

Exemplos de funções contínuas em R

1) Funçao constante f(x)=k, k$\in\Re$
2) f(x)= $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... a_{n-1} x + a_n$,
3) f(x)=|x|
4) f(x)=a^x .Logo, e^x .
5) f(x)=sen(ax)
6) f(x)= cos(ax)
7) f(x)=$\log_a x$ (x>0)

Propriedades

Se f(x) e g(x) são contínuas para x=a, então também são contínuas para x=a.

1) f(x)+g(x)
2) f(x)-g(x)
3) f(x).g(x)
4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}, g(a) \neq 0$

Exemplos de funções contínuas:

1) h(x)=$x^2 + \text{sen}\,4x$
2) h(x)=$x^3 - 2|x|$
3) h(x)= $2^x \cos 5x$
4) h(x)=$\dfrac{5+\text{sen}\,3x}{x^2+1}$

Exercícios:

1) Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 2} x^2 - 1$
b) $\lim_{x\to 1} x^3 - 1$
c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x+2}$
d) $\lim_{x\to 0} e^x$
e) $\lim_{x\to 0} e^{-x}$
f) $\lim_{x\to -2} \dfrac{3x+1}{5}$
g) $\lim_{x\to 0} \cos x$
h) $\lim_{x\to \pi/2} senx$
i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+4}{1+x+x^2}$

2) Determine se a função é contínua no ponto x dado.

a) F(x)= $\begin{cases} x^2, & se \quad x \geq 2 \\ x+1 & se \quad x < 2 \end{cases}$ x=2

b) F(x)= $\begin{cases} 3x+1, & se \quad x \neq 1 \\ 0 & se \quad x = 1 \end{cases}$ x=1

c) F(x)= $\begin{cases} 2x-1, & se \quad x \leq 3 \\ 3x-4 & se \quad x > 3 \end{cases}$ x=3

d) F(x)= $\begin{cases} 0, & se \quad x \leq 0 \\ x & se \quad x > 0 \end{cases}$ x=0

3) Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{em } p = 2$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ L & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad \text{em } p = 3$$

Limites quando a variável tende ao infinito (Limites no infinito) e Limites infinitos

Quando a variável x assume valores cada vez maiores dizemos que ela tende a mais infinito e indicamos $x \to +\infty$. Analogamente, quando a variável x assume valores cada vez menores dizemos que ela tende a menos infinito e indicamos por $x \to -\infty$. Podemos ter os seguintes casos de limite envolvendo infinito.

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$
4) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
5) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
6) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$
7) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$
8) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Ex.: 1) f(x)=x^2
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (1º.caso)
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (4º. caso)

Ex. 2) f(x)-x+2

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (2º. caso)
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (4º. caso)

Ex.3) f(x)=x^3

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (5º. caso)
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (1º. caso)

Ex.4) f(x)=$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
D=R
Im=R-{0}
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (3º. caso)
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (4º. caso)

Ex.5) f(x)=3^x

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (6º. caso)
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (1º. caso)

Ex.6) f(x)=$\frac{1}{x^2}$

D=R-{0}
$\nexists$ f(0)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (6º. caso)
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (3º. caso)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \text{ (7º. caso)} \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ (7º. caso)} \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

Ex.7) f(x)=- $\frac{1}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \text{ (8º. caso)} \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \text{ (8º. caso)}\end{array}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

Ex.8) f(x)=$\frac{1}{x}$

D=R

$\nexists$ f(0)

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

OBS:

1. quando se afirma que um limite existe, deve ser entendido por isto , que o limite existe e é finito. Possível confusão surge quando, por exemplo, se escreve a expressão $\lim_{x\to a} A = \infty$. Entretanto, isto não significa que A tende a um número designado por ∞, mas apenas que A torna-se arbitrariamente grande, à medida que x tende para a.
2. ∞ não é número! (e não deve ser considerado como tal, ainda que, por conviniência, seja usado da forma que um número seria usado, em algumas expressões.)

Exercícios:

Calcule os limites

1) $\lim_{x\to 0} |x|$

2) $\lim_{x\to 0} f(x)$ se

f(x)=$\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^X & se \quad x \le 0 \\ \operatorname{sen} x & se \quad x > 0\end{cases}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

4) $\lim_{x\to 0^+} \log_2 x$

5) $\lim_{x\to 0-} \log_2 x$

6) $\lim_{x\to 0} \log_2 x$

7) $\lim_{x\to \frac{\Pi}{2}} tgx$

8) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

9) $\lim_{x\to 1} f(x)$, se

f(x)=$\begin{cases}-x+1 & se \quad x < 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} x & se \quad x \ge 1\end{cases}$

10) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

11) $\lim_{x\to+\infty}\ \log_3 x$

12) $\lim_{x\to+\infty}\ \text{sen}\, x$

OBS:
1) Função constante: $\lim_{x\to a} k = k$
2) Nenhuma função trigonométrica tem limite quando a variável tende ao infinito.

<u>Propriedades dos limites</u>

Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$ (b e c finitos) temos:

1º.) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c$

Limite de uma soma é igual a soma dos limites

2º.) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = b.c$

Limite de um produto é igual ao produto dos limites

3º.) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}$ (c≠0)

Limite do quociente é igual ao quociente dos limites

4º.) $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\lim_{x\to a} g(x)} = b^c$ (b>0)

5º.) $\lim_{x\to a} \log_m f(x) = \log_m \lim_{x\to a} f(x)$

Limite do logaritmo é igual ao logaritmo do limite

Exemplos:
1) $\lim_{x\to 0}(\text{x}^2+\cos x) = \lim_{x\to 0}\text{x}^2 + \lim_{x\to 0}\cos x = 0+1=1$
2) $\lim_{x\to 1} 3^x - 2|x| = \lim_{x\to 1} 3^x - \lim_{x\to 1} 2|x| = 3-2=1$
3) $\lim_{x\to\frac{\Pi}{4}}(\text{x.senx}) = \lim_{x\to\frac{\Pi}{4}}\text{x}.\ \lim_{x\to\frac{\Pi}{4}}\text{senx} = \frac{\pi}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$
4) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^3+2} = \frac{\lim_{x\to 2} x^2-1}{\lim_{x\to 2} x^3+2} = \frac{3}{10}$
5) $\lim_{x\to 0}(x+4)^{tgx} = [\lim_{x\to 0}(x+4)]^{\lim_{x\to 0} tgx} = 4^0 = 1$
6) $\lim_{x\to 3}\log_2(x^2-1) = \log_2 \lim_{x\to 3}(x^2-1) = \log_2 8 = 3$

Casos especiais:

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$
b	+∞	+∞
b	-∞	-∞
+∞	+∞	+∞
-∞	-∞	-∞
+∞ -∞	-∞ +∞	Indeterminados

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	$\lim_{x \to a} [f(x).g(x)]$
b>0	+∞	+∞
b<0	+∞	-∞
b>0	-∞	-∞
b<0	-∞	+∞
+∞	+∞	+∞
-∞	-∞	-∞
0 0	+∞ -∞	indeterminado

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$
b	+∞	0
b	-∞	0
b≠0	0	+∞ -∞ ∄
+∞	C	idem
-∞	C	idem
0	0	Indeterminado
+∞	+∞	Indeterminado
+∞	-∞	Indeterminado
-∞	+∞	Indeterminado
-∞	-∞	Indeterminado

Ex: $\lim_{x \to +\infty} (x.\log_{\frac{1}{2}} x) =$

1) Se f(x)=x e g(x)=3-x. Calcule:

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

b)$\lim_{x \to +\infty} g(x) =$

c) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] =$

O limite está inicialmente indeterminado

(nenhum limite é indeterminado. O limite está inicialmente indeterminado.)

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to +\infty} [x + 3 - x] = \lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

Calcule:

1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^3}$

3) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} =$

4) $\lim_{x \to 1} \dfrac{3}{1 - x} =$

Casos de indeterminação

1) $\infty - \infty$
2) $0 \times \infty$
3) $\frac{0}{0}$
4) $\frac{\infty}{\infty}$
5) 0^0
6) ∞^0
7) 1^∞

Calcule os limites

1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 13x + 22}$
2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} x^{tgx}$
3) $\lim_{x \to +\infty} (3^x . \log x)$
4) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
5) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}$
6) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$
7) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^3 - 1}$
8) $\lim_{t \to -2} \frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t + 2)(t - 3)}$
9) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
10) $\lim_{t \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$

Limite de função racional quando x tende ao infinito

Função racional é aquela formada pelo quociente de dois polinômios.
O limite nos extremos de uma função polinomial é igual ao limite de seu termo de maior expoente, pois, colocando-se esse termo em evidência, todos os outros termos tendem a zero. Isso pode ser constatado no seguinte exemplo:

$$\lim_{x \to \infty} 2x^3 + 4x^2 - 5x + 9 = x^3 \left(2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{9}{x^3} \right) = \lim_{x \to \infty} 2x^3 = \infty =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{m}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{a_m}{x^m}\right)}{x^{n}\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{b_n}{x^n}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n}$$

Para calcular o limite de uma função racional quando a variável tende a infinito, basta calcular o limite do quociente dos termos de mais alto grau do numerador e denominador.

Ex:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5 - 3x^4 + 7x^2 - x + 12}{9x^5 + 13x^3 + x^2 + x - 1}$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^8 + 2x^7 - 5x^4 + x^2 - 7}{4x^{10} - x^9 + x^8 - 2x^7 + x^4 + 13}$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^7 + 2x^6 - 5x^3 + 4x^2 - x + 12}{2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 19x - 1}$

<u>Limites fundamentais</u>

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, kx}{x} = k$

Exercício: Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, 9x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, 4x}{3x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, 10x}{sen\, 7x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x - x}{x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, kx}{x}$

Limite de sequência

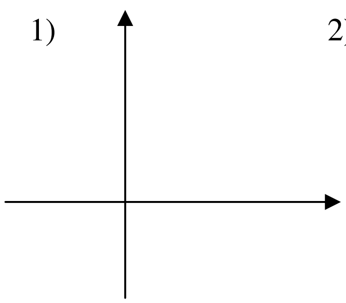
Sequência ou sucessão é uma função em que a variável pertence ao conjunto dos números naturais, pode ser finita ou infinita. Indica-se por (a_n) onde a_n é chamado termo geral da sequência.

Ex:

1) f(n)=2n-1 , n $\in$ N-> 1,3,5,7,...
2) f(n)=1/n, n $\in$ N -> 1,1/2,1/3,1/4,...
3) f(n)=(n+1)/n , n $\in$ N -> 2, 3/2, 4/3, 5/4, ...
4) f(n)=$\left(\frac{1}{\sqrt{n-2}}\right)$, n $\in$ N -> 1, $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{3}$, ...

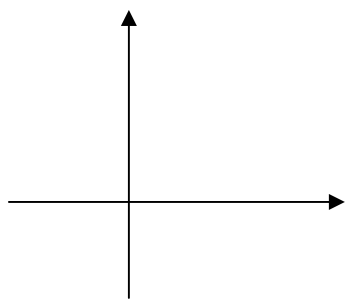
Gráficos:
(formados por pontos isolados)

1)



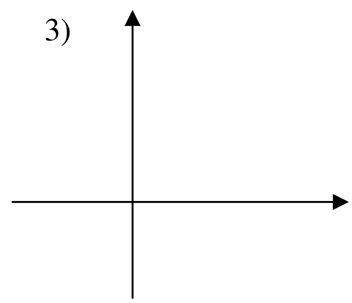
f(n)=2n-1

2)



f(n)=1/n

3)



f(n)=(n+1)/n

(só tem sentido se for calcular limite da sequência tendendo ao infinito, quando tende a um número, não faz sentido!)

Convergência de Sucessões

Dizemos que uma sucessão converge para um número fixo se, à medida que n aumenta, o valor de f(n) se aproxima desse valor fixo.

1) Ex: f(n) =1/n converge para 0. $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0$

Se a medida que n aumenta, os valores de f(n) não convergem para nenhum valor fixo. Dizemos que tal sequência diverge.
Entre as sucessões divergentes, existem aquelas que em que à medida que n aumenta, os valores de f(n) conseguem superar qualquer valor fixado; dizemos que essas sucessoes divergem para mais infinito.

Ex.: f(n)=2n-1 $\lim_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$

Pode ocorrer que à medida que n aumenta, os valores de f(n) conseguem ficar abaixo de qualquer valor fixo, por menor que ele seja; dizemos que essas sucessões <u>divergem para menos infinito.</u>

Ex: f(n)= - (2n-1) -> (-1,-3,-5,-7,...) $\lim_{n\to\infty} -(2n-1) = -\infty$

Existem sucessões que não divergem nem para mais nem para menos infinito.

Ex.: f(n)=$(-1)^n.n$ -> (-1,2,-3,4,-5,...)

OBS:
1. Não se calcula limite da sequência através de gráfico, mas somente analisando o termo geral.
2. Quando o limite da sequência é infinito, a sequência é divergente e quando o limite da sequência é finito, a sequência é convergente.

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (inicialmente indeterminado)

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

A sequência cujo termo geral é $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é chamada de sequência de Euler.

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\lim_{n\to\infty} n} = 1^{\infty} \quad \text{(indeterminado)}$$

n=1 -> $a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2^1 = 2$

n=2 -> $a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}250$

n=3 -> $a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}370$

n=4 -> $a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2{,}441$

n=5 -> $a_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125} = 2{,}488$

n=6 -> $a_6 = \left(1+\frac{1}{6}\right)^6 = \left(\frac{7}{6}\right)^6 = \frac{117649}{46656} = 2{,}521$

Outros valores:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	2,593742
20	2,653298
50	2,691588
100	2,704814
500	2,715569
1000	2,716924
5.000	2,718010
50.000	2,718255
100.000	2,718268
1.000.000	2,718280

O limite da sequência de Euler é um número irracional compreendido entre 2 e 3 designado pela letra e (número de Euler). Um valor aproximado deste número é e≅2,718281828459.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Um número próximo ao número e foi usado como base de um sistema de logaritmos pelo matemático escocês John Napier (ou Neper) e ficou conhecido como sistema de logaritmo neperiano.

Símbolos: $\log_e N$, ln N.

Outros limites iguais a e.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Em geral: k∈ℜ-{0}

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$$

$$\lim_{x\to0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^{k}$$

Exercício

Calcule:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^{x}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

Aplicação: Juros capitalizados continuamente

Consideremos um capital de \$1.000,00 aplicado a juros compostos à taxa de 12% ao ano pelo prazo de dois anos.

- Se os juros forem capitalizados anualmente, o montante será

M=1.000(1+0,12)$^{2}=1.254{,}40$

- Se os juros forem capitalizados semestralmente a uma taxa semestral proporcional a 12% ao ano, a taxa semestral será de 12%/2=6% ao semestre e o montante será:

M=1.000(1+0,06)$^{4}=1.262{,}48$

- Se os juros forem capitalizados mensalmente a uma taxa mensal proporcional a 12% ao ano, a taxa mensal será de 12%/12=1% ao mês, e o montante será:

M=1.000(1+0,01)$^{24}=1.269{,}73$

- Se os juros forem capitalizados a uma taxa diária proporcional a 12% ao ano, a taxa diária (considerando um ano de 360 dias) será de 12%/360 ao dia, e o montante será:

M=1.000(1+0,12/360)$^{720}=1.271{,}20$

Cada vez que diminui o prazo de capitalização, o número de capitalizações (k) em um ano aumenta de modo que a taxa proporcional a 12% ao ano nesse período de capitalização é igual a 12%/k e o prazo de aplicação de 2 anos expresso de acordo com o prazo de capitalização vale 2k. Consequentemente, o montante é dado por:

$$M=1.000\left(1+\frac{0{,}12}{k}\right)^{2k}$$

Dizemos que o capital é <u>capitalizado continuamente,</u> quando o montante M é dado por:

$$M=\lim_{k\to\infty}1.000\left(1+\frac{0{,}12}{k}\right)^{2k}.$$

Para calcularmos tal limite, podemos chamar 0,12/k de 1/x e consequentemente será igual a k/0,12. Quando k tende a infinito, x também tende, de modo que o limite acima pode ser expresso por:

$$M=\lim_{k\to\infty}1.000\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2.(0,12).x}=1000\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2.(0,12)}=1000.e^{2.(0,12)}$$

=1.271,25, pois a expressão entre colchetes é o limite exponencial fundamental. De um modo geral, se um capital C é capitalizado continuamente a uma taxa proporcional a uma taxa i anual, pelo prazo de n anos, o montante é dado por:

$$M=C.e^{i.n}.$$